

文章编号: 1671-7449(2026)05-0592-08

J. Test Measur. Technol., 2026, 40(5): 592-599.

标准渐开线的双抛物线拟合法

梁志国^{1*}, 刘欣荣¹, 梁家奕², 段小艳³

(1. 北京长城计量测试技术研究所 计量与校准技术国家重点实验室, 北京 100095;

2. 电子科技大学 信息与软件工程学院, 四川 成都 611700;

3. 北京航空航天大学 仪器科学与光电工程学院, 北京 100191)

摘要: 针对标准渐开线测量曲线的高精度拟合难题, 提出了一种双抛物线拟合法, 用于渐开线测量序列的参数化表征。首先, 将渐开线测量曲线段分割为两段, 以拟合残差均衡为判据寻优方式找出最佳分割点, 使分割点两侧的渐开线段在各自的抛物线拟合中的拟合残差有效值最接近; 然后, 对最佳分割点两侧的渐开线测量线段分别使用抛物线拟合法进行曲线拟合, 并获得各自的拟合参数作为本段曲线的表征参数。最后, 在仿真实验数据上验证了双抛物线拟合法的有效性与可行性, 其拟合精度相比单抛物线法提高6倍以上, 可用于渐开线齿轮齿廓等的计量校准。

关键词: 渐开线; 抛物线; 曲线拟合; 最小二乘法

中图分类号: TH703; TH744

文献标识码: A

DOI: 10.62756/csjs.1671-7449.2026076

引用格式: 梁志国, 刘欣荣, 梁家奕, 等. 标准渐开线的双抛物线拟合法[J]. 测试技术学报, 2026, 40(5): 592-599.

Liang Zhiguo, Liu Xinrong, Liang Jiayi, et al. Two-parabola approximation method for standard involute curves [J]. Journal of Test and Measurement Technology, 2026, 40(5): 592-599.

Two-Parabola Approximation Method for Standard Involute Curves

Liang Zhiguo^{1*}, Liu Xinrong¹, Liang Jiayi², Duan Xiaoyan³

(1. National Key Laboratory of Science and Technology on Metrology and Calibration, Changcheng Institute of Metrology and Measurement, Beijing 100095, China;

2. School of Information and Software Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611700, China;

3. School of Instrument Science and Optoelectronic Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: A double parabolic fitting method is proposed to address the high-precision fitting problem of standard involute measurement curves for the parametric characterization of involute measurement sequences. First, the involute measurement curve segment is divided into two segments; then, the optimal segmentation point is found by using the criterion of fitting residual balance to find the best segmentation point, so that the involute segments on both sides of the segmentation point have the closest fitting residual error in their respective parabolic fitting. Then, by using the parabolic fitting method to fit the waveform of the involute on both sides of the optimal segmentation point, the fitting parameters are obtained as the characteristic parameters of this curve segment. On a set of simulation experiment data,

【收稿日期】2025-12-18

【修回日期】2026-04-23

【录用日期】2026-05-06

*【通信作者】梁志国(1962—), 男, 研究员, 博士, 主要从事数字化测量与校准、模式识别、动态校准、精确测量等研究。E-mail: Lzg304@sina.com。

the effectiveness and feasibility of the double parabolic fitting method were verified, and its fitting accuracy can be improved by more than 6 times compared to the single parabolic method. It can be used for metrological calibration of involute gear tooth profiles, etc.

Key words: involute; parabolic; curve-fitting; least square

0 引言

渐开线是齿轮行业用途最广泛的曲线模型,其形貌特征在机械传动中具有得天独厚的优越性,是其它形貌齿轮无法替代的。标准渐开线齿轮齿廓的测量及参数表征在相应的齿轮参数质量评价中至关重要,涉及到机械加工、制造、动力传动中的众多质量参数。

齿轮标准渐开线样板是几何量计量中另外一个重要的计量标准,其质量评估也涉及到渐开线的参数及失真等参量评价。此外,渐开线花键、渐开线凸轮等的优良传动特性及广泛的应用场合,也表明了标准渐开线在几何量计量校准中的重要地位和作用,是其它曲线无法替代的。因此,有关渐开线测量评价与表征的研究从未停息。

通常,人们使用渐开线有效长度、渐开线可用长度、齿廓偏差等定量表征渐开线有关参数^[1],以专用的万能齿轮测量机、齿轮测量中心、三坐标测量机等进行实际测量,利用测量结果与标准渐开线之间的偏差及分布情况定量表征渐开线齿轮齿廓的参数质量。

在使用三坐标测量机的测量过程中,渐开线齿轮齿廓的测量结果以直角坐标系中坐标点方式描述表征。其后,可对测量点进行曲线拟合,以进行回归偏差的计算与获取。

如图 1 所示,渐开线的基圆半径为 r_b ,渐开线发生线 BK 的展开角度为 θ ,沿基圆圆周运动的动点 B 的初始位置为点 D ,线段 BK 的长度等于 B 点走过的弧长 $\widehat{BD}$,则渐开线的参数方程为

$$\begin{cases} x(r_b, \theta) = r_b(\cos \theta + \theta \cdot \sin \theta), \\ y(r_b, \theta) = r_b(\sin \theta - \theta \cdot \cos \theta), \end{cases} \quad (1)$$

式中: r_b 为基圆半径;坐标点 $D(x_D, y_D) = (r_b, 0)$ 为渐开线起始点; θ 为发生线 BK 展开角度;渐开线起始点处 $\theta_0 = 0$ 。

由图 1 可见,渐开线的测量确定与完整表征需要已知基圆圆心 O 、基圆半径 r_b 、渐开线起始点 D ,然后,可通过展开角 θ 确定渐开线上任何一点的确切位置坐标。而渐开线本身没有基圆圆心

O 、基圆半径 r_b 的任何量值信息,它们并不在渐开线上。若仅仅测量的是一段未包含 D 点的有限长度的渐开线段,渐开线展开角起始点 D 也不在测量曲线上,如此导致很难从渐开线测量数据中直接获得有用的渐开线参数信息,即无法复现式(1)所述的渐开线方程,渐开线的测量与精确表征难度巨大。此外,由于渐开线方程为包含三角函数的超越方程,且基于离散测量点求解其参数时会构成超定方程组,难以直接解析求解,也难以用简单数学曲线对其进行精确统一表征。

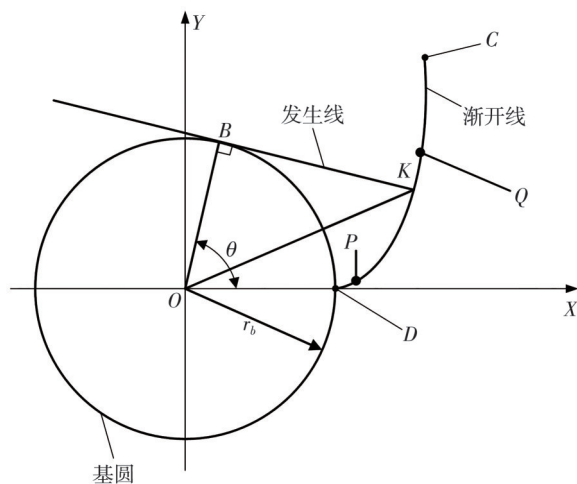


图 1 渐开线生成示意图

Fig. 1 Curve diagram of standard involute equation

由此便发展了许多其它方法用于渐开线波形的近似测量表征,其中,比较常见的是使用圆弧进行近似的定量表征^[2-5],用以衡量渐开线的加工质量,也有用双曲线拟合^[6],以及以样条插值函数拟合等方式^[7-8]。研究涉及渐开线测量与拟合的各方面,包括拟合方法^[9-14]、测量方法^[15-20]、拟合误差等^[21-31]。但其共同缺点是拟合误差较大,缺乏统一一致的公共参考点,使得不同拟合近似之间的比较难以有效进行。

本文主要针对这一问题,提出了一种双抛物线拟合方式对渐开线波形进行近似拟合,并获得其参数化表征结果,最后与单抛物线法进行拟合精度比较。本文暂不与圆弧、样条等其他方法开展对比,主要原因是不同近似方法缺乏统一的公共参考点,难以进行客观、公平的精度比较。

1 双抛物线法渐开线波形的曲线拟合

由于渐开线拟合在直角坐标系中为包含三角函数的超定方程,具有螺旋渐进张开性特征,很难找到一条简单确定的曲线与其完全契合。因而,在所使用的一小段渐开线区间,通常利用函数规律简捷、特性已知、形状接近渐开线的曲线来对所用渐开线段进行曲线拟合。抛物线被本文选为模型曲线主要源于以下特点:1)与渐开线一样,抛物线具有曲线曲率单调下降的相似数学特征;2)与渐开线一样,抛物线具有导数存在且为0的唯一谷值点,可供设定为公共参考点;3)渐开线在所使用的区间具有凹性特征,而抛物线具备相似的凹性特征;4)抛物线属于最简洁的二次曲线,用于拟合渐开线时,计算简单明确,其谷值点及位置均可直接计算获得,无需复杂迭代运算,具有良好的绝对收敛性;5)由于抛物线仅为2次函数曲线,其用于渐开线拟合时,随着拟合区间增大,拟合残差增大明显。因此,本文使用双抛物线法进行自适应分段拟合以提高精度,并降低拟合误差。

1.1 抛物线模型拟合的原理与方法

如图1所示,圆的渐开线是一条只有起始点无终点的开放式曲线,而通常齿轮用到的齿廓轮廓线仅是其中横坐标 x 与纵坐标 y 呈单调变化的起始阶段的一小部分。

当基圆半径为 r_b ,展开角 $\theta \in [0, \pi/2]$ 时,直角坐标系中的横坐标 x 与纵坐标 y 的取值范围为 $x \in [r_b, r_b \cdot \pi/2]$, $y \in [0, r_b]$,由此,齿轮所用渐开线齿廓的测量与表征仅需针对 $\theta \in [0, \pi/2]$ 区间即可。本文所述方法中,限制区间 $\theta \in [0, \pi/2]$,此时, $x \in [r_b, r_b \cdot \pi/2]$, $y \in [0, r_b]$ 。由式(1)微分可得

$$\begin{cases} \frac{dx(r_b, \theta)}{d\theta} = r_b \cdot \theta \cdot \cos \theta, \\ \frac{dy(r_b, \theta)}{d\theta} = r_b \cdot \theta \cdot \sin \theta. \end{cases} \quad (2)$$

当 $\theta \in [0, \pi/2]$ 时,有 $x \in [r_b, r_b \cdot \pi/2]$, $y \in [0, r_b]$, $\frac{dx(r_b, \theta)}{d\theta} \geq 0$, $\frac{dy(r_b, \theta)}{d\theta} \geq 0$ 。 $x(r_b, \theta)$ 与 $y(r_b, \theta)$ 均属于在所述区间内单调增加的函数曲线。

由有限区间 $\theta \in [0, \pi/2]$ 内的渐开线形状和式(1)可知,渐开线的纵坐标相对于横坐标是具有单峰特征的凹函数,且唯一的谷值出现在边界 $\theta=0$ 处,将该点坐标值记为 (x_g, y_g) 。则有 $x_b = x_g$, $y_b = y_g$ 。

在区间 $\theta \in [0, \pi/2]$ 内,渐开线形状和抛物线形状近似,在直角坐标系 XOY 中的渐开线测量坐标点为 $(x, y) = [x(r_b, \theta), y(r_b, \theta)]$,使用抛物线 $y = y(x)$ 拟合渐开线,并认为两者具有共同的谷值点。则其最小二乘拟合曲线的函数表达式为

$$y(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, \quad (3)$$

式中: a 、 b 、 c 为3个拟合参数。

令 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ 为齿轮齿廓线段 PQ 的采样测量点的横坐标, $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ 为齿轮齿廓采样测量点的纵坐标,相对应的渐开线发生线展开角度为 $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ 。测量参考点位置选择与表征将造成采样坐标数据值 $[x_i, y_i]$ 与渐开线模型理论值 $[x(r_b, \theta_i), y(r_b, \theta_i)]$ 之间存在恒定坐标偏移 x_d 和 y_d ,即

$$\begin{cases} x_i = x(r_b, \theta_i) + x_d, \\ y_i = y(r_b, \theta_i) + y_d, \end{cases} \quad (i = 0, \dots, n-1). \quad (4)$$

拟合残差有效值为

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - y(x_i))^2}. \quad (5)$$

则可得拟合波形谷值估计值为

$$y_g = c - \frac{b^2}{4a}. \quad (6)$$

拟合波形谷值出现的位置为

$$x_g = -\frac{b}{2a}. \quad (7)$$

利用拟合残差有效值 ρ 比较拟合优劣,并以此对所获峰值结果进行判断。

拟合过程如下:

针对采样坐标数据值 $[x_i, y_i]$ ($i=0, 1, \dots, n-1$)的采样序列,由式(3)有

$$\epsilon = \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2. \quad (8)$$

在 ϵ 取最小值时,有

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial b} = 0, \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial c} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} a \sum_{i=0}^{n-1} x_i^4 + b \sum_{i=0}^{n-1} x_i^3 + c \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} y_i x_i^2, \\ a \sum_{i=0}^{n-1} x_i^3 + b \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 + c \sum_{i=0}^{n-1} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} y_i x_i, \\ a \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 + b \sum_{i=0}^{n-1} x_i + cn = \sum_{i=0}^{n-1} y_i. \end{cases} \quad (10)$$

解该线性方程组得拟合参数 a 、 b 、 c 作为拟合渐开线的抛物线形式的近似表征参数, 按照式(6)、式(7)计算获得相应的 y_g 、 x_g 值, 其拟合残差有效值 ρ 按式(5)计算。

拟合曲线回归残差序列为

$$\Delta y_i = y_i - ax_i^2 - bx_i - c, (i=0, \dots, n-1). \quad (11)$$

拟合抛物线谷值点作为渐开线与基圆的交点 D 的坐标估计值, 记为 $D(x_g, y_g)$, 其可作为渐开线测量拟合定位的参考坐标点。则渐开线上任意一点 $K(x, y)$ 与参考点 $D(x_g, y_g)$ 的直线段长度 $\hat{r}_{KD}$ 和斜率 $\hat{k}_{KD}$ 分别为

$$\hat{r}_{KD} = \sqrt{(x - x_g)^2 + (y - y_g)^2}, \quad (12)$$

$$\hat{k}_{KD} = \frac{y - y_g}{x - x_g}. \quad (13)$$

渐开线上任一点 $K(x, y)$ 与参考点 $D(x_g, y_g)$ 的直线段长度 $\hat{r}_{KD}$ 和斜率 $\hat{k}_{KD}$ 的组合都是唯一的, 在参考点 $D(x_g, y_g)$ 已知时, 通过在式(1)所述的标准渐开线上寻找理论上具有相同斜率值 $\hat{k}_{KD}$ 的点位置, 可确定点 $K(x, y)$ 在渐开线中的几何位置。

1.2 双抛物线拟合过程

由于渐开线波形与抛物线波形存在形貌差异, 使得在以抛物线对渐开线进行曲线拟合时, 拟合残差有效值会随着被拟合曲线段的增加而呈增加趋势变化。将被拟合的渐开线波形段分为 α 、 β 两段, 寻找使得两段拟合残差有效值最接近的分界点作为最佳分界点, 然后, 分别对最佳分界点两侧的波形段执行 1.1 节所述拟合过程, 获得拟合参数, 即完成了双抛物线法渐开线拟合。

过程如下:

针对上述渐开线齿轮齿廓线段 PQ 的采样测量点 $(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$, 选取正整数序号 $q \in [10, n-10]$, 将测量点序列分为 α 部分: $(x_0, y_0), \dots, (x_{q-1}, y_{q-1})$ 和 β 部分: $(x_q, y_q), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ 。对 α 部分渐开线段波形按 1.1 节所述方式进行拟合, 获得拟合参数 a_α 、 b_α 、 c_α 、 ρ_α 、 $y_{g\alpha}$ 、 $x_{g\alpha}$ 。对 β 部分渐开线段波形按 1.1 节所述方式进行拟合, 获得拟合参数 a_β 、 b_β 、 c_β 、 ρ_β 、 $y_{g\beta}$ 、 $x_{g\beta}$ 。

令从 $q=10$ 开始进行分段拟合, 获得拟合参数后顺次增加 q 值再行拟合并获取拟合参数, 一直增大到 $q=n-10$ 为止, 完成全部拟合过程。

将 ρ_α 、 ρ_β 随 q 变化的关系绘制成曲线图表。由于

拟合误差 ρ_α 和 ρ_β 均随各自曲线段长度增加而单调增加, 因此, ρ_α 的包络线随着 q 值的增加呈单调增大变化, ρ_β 的包络线随着 q 值的增加呈单调减小变化, ρ_α 与 ρ_β 两者在量值最接近时, $q=q_0$ 取值作渐开线线段最佳分界点。此时, 分别对最佳分界点两侧的渐开线段进行抛物线拟合, 获得最佳拟合结果, 记为 $\hat{a}_\alpha$ 、 $\hat{b}_\alpha$ 、 $\hat{c}_\alpha$ 、 $\hat{\rho}_\alpha$ 、 $\hat{y}_{g\alpha}$ 、 $\hat{x}_{g\alpha}$ 、 $\hat{a}_\beta$ 、 $\hat{b}_\beta$ 、 $\hat{c}_\beta$ 、 $\hat{\rho}_\beta$ 、 $\hat{y}_{g\beta}$ 、 $\hat{x}_{g\beta}$, 作为双抛物线方法拟合渐开线的参数表征结果。并且, 坐标点 $(\hat{x}_{g\alpha}, \hat{y}_{g\alpha})$ 作为渐开线起始点 D 的估计结果。

2 实验及验证

2.1 双抛物线法拟合

由标准渐开线参数方程计算得到仿真坐标测量序列点 $\{[x_i, y_i]\}$, $(i=0, \dots, n-1)$, 其中, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ 为齿轮齿廓采样测量点的横坐标; $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ 为齿轮齿廓采样测量点的纵坐标。

理论上, 展开角很少超过 $\pi/2$, 但由于测量坐标系与设计基准不重合, 以及实际测量时需要覆盖冗余的过渡段, 导致测量数据展开角很容易大幅超出 $[0, \pi/2]$ 范围, 本文模拟展开角末端约为 3。图 2 为用渐开线公式计算获得的渐开线波形曲线 $\{[x_i, y_i]\}$, $(i=0, \dots, n-1)$ 。

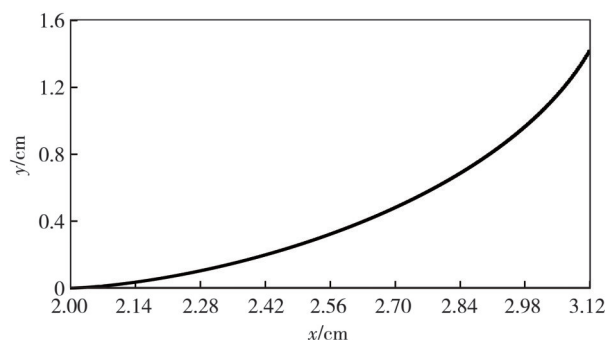


图 2 渐开线测量波形序列

Fig. 2 Involute measurement waveform

基圆半径 $r_b=2$ cm, θ 为发生线 BK 展开角度, 渐开线起始点处 $\theta_0=0$ rad, 渐开线末端点处 $\theta_{n-1}=2.984\ 513$ rad, 横坐标采样间隔为 $\Delta x_i=1.493\ 003 \times 10^{-3}$ cm, 采样点数 $n=2\ 000$ 。选取正整数序号 $q \in [10, n-10]$ 作为分割点序号, 将渐开线测量序列分为 α 、 β 两部分, 使用 1.2 节所述方式, 获得各自的拟合残差有效值序列 ρ_α 、 ρ_β , 如图 3 所示。其中, 黑色曲线为 α 部分曲线拟合残差有效值 ρ_α 随分界点 q 变化情况, 红色曲线为 β 部分曲线拟合残差有效值 ρ_β 随分界点 q 变化情况, 红色曲线和黑色曲线包络呈现此消彼长

的变化规律,并且,在 $q=1571$ 附近两者出现量值相近的交汇,选取该点作为最佳分界点。

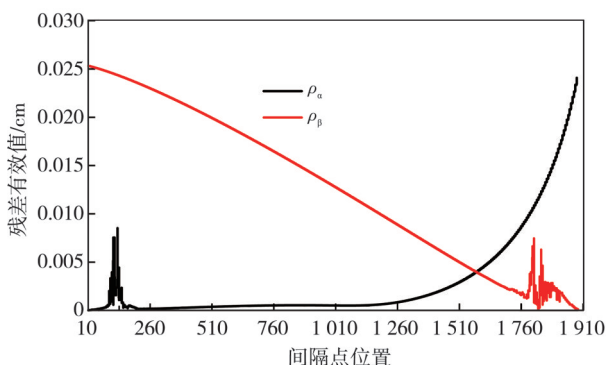


图3 α 、 β 两部分拟合残差有效值变化情况

Fig. 3 fitting residuals for α and β parts

将 α 部分测量点 $(x_0, y_0), \dots, (x_{1570}, y_{1570})$ 按照1.1节所述过程进行拟合,获得拟合曲线波形序列 y_i 如图4红色曲线 $(\alpha: y_i)$,蓝色曲线为原始测量曲线波形。其拟合残差波形序列 Δy_i 如图5所示的红色曲线 $(\alpha: \Delta y_i)$,拟合残差最大值为0.014 4 cm。拟合参数为 $\hat{a}_\alpha=0.880\ 678\ 5$, $\hat{b}_\alpha=-3.408\ 885$, $\hat{c}_\alpha=3.298\ 007$, $\hat{\rho}_\alpha=3.780\ 243 \times 10^{-3}$ cm, $\hat{y}_{g\alpha}=-7.266\ 021 \times 10^{-4}$ cm, $\hat{x}_{g\alpha}=1.935\ 374$ cm,坐标点 $(x_{g\alpha}, y_{g\alpha})$ 作为渐开线起始点D的估计结果。

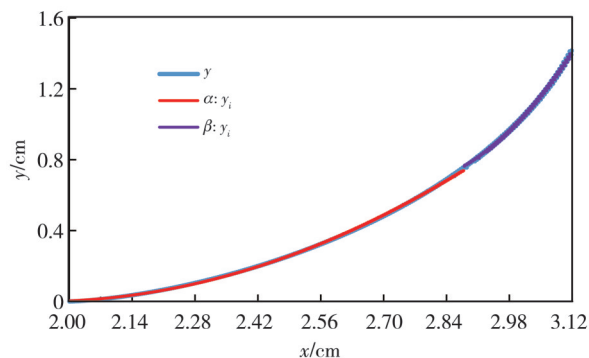


图4 渐开线双抛物线拟合曲线

Fig. 4 Fit curve of involute with double parabolic curve

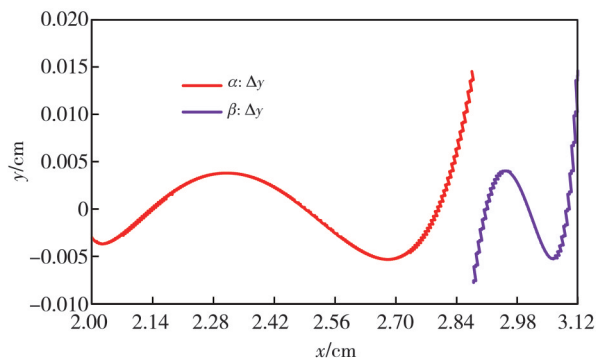


图5 渐开线双抛物线拟合回归残差曲线

Fig. 5 Residual curve of involute bi-parabolic fitting regression

将 β 部分测量点 $(x_{1571}, y_{1571}), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ 按照1.1节所述过程进行拟合,获得拟合曲线波形序列 y_i 如图4紫色曲线 $(\beta: y_i)$,拟合残差波形序列 Δy_i 如图5紫色曲线 $(\beta: \Delta y_i)$,拟合残差最大值为0.014 6 cm。拟合参数为 $\hat{a}_\beta=5.245\ 548$, $\hat{b}_\beta=-28.386\ 15$, $\hat{c}_\beta=39.052\ 17$, $\hat{\rho}_\beta=4.064\ 269 \times 10^{-3}$ cm, $\hat{y}_{g\beta}=0.649\ 426$ cm, $\hat{x}_{g\beta}=2.705\ 738$ cm。由图4可见,以双抛物线对渐开线进行曲线拟合的红色和蓝色曲线,几乎与黑色测量曲线相重合,可获得良好的拟合效果。但是,由于追求红色与蓝色两段抛物线各自拟合时的拟合残差的均衡性,导致它们在衔接处出现了微小的跳变特征,图5所示的红色与蓝色两段拟合残差曲线的间断特征也说明了相同问题。

2.2 单抛物线拟合

在上述示例中,若使用单一抛物线波形按照1.1节所述过程进行拟合,获得拟合曲线波形序列 y_i 如图6红色曲线,黑色曲线 y 为原始测量曲线波形,其拟合残差波形序列 Δy_i 如图7所示,拟合残差最大值为0.118 cm。

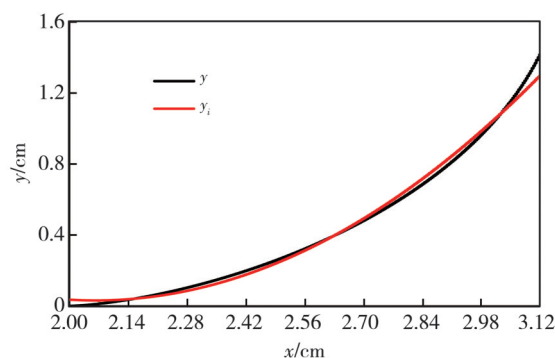


图6 渐开线单抛物线拟合曲线

Fig. 6 Fitting curve of involute with single parabolic curve

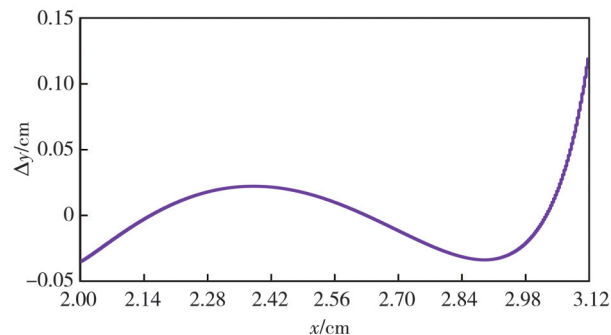


图7 渐开线单抛物线拟合回归残差曲线

Fig. 7 Residual curve of involute with single parabolic fitting regression

拟合参数为 $a=1.208\ 445$, $b=-4.980\ 468$, $c=5.162\ 574$, $\rho=2.537\ 980 \times 10^{-2}$ cm, $y_g=$

$3.096\ 793 \times 10^{-2}\text{ cm}$, $x_g=2.060\ 692\text{ cm}$ 。

从图 6 可见,单抛物线用来对渐开线执行曲线拟合,也可以获得全局总体最优的拟合结果,但拟合的贴合程度存在起伏,特别是尾部接近端点处,拟合残差更大,效果远不如双抛物线方法。图 7 所述的拟合残差曲线的残差量级远较图 5 所示的双抛物线的大。

3 讨 论

实验表明,双抛物线拟合与单抛物线拟合两种方法均能实现渐开线曲线波形的拟合。

双抛物线拟合的优点是所选择的两段拟合曲线段并非任意分割和选取,而是需要经过拟合残差有效值的均衡优化过程,可获得更高拟合精度,比单抛物线拟合精度提高 6 倍以上,具有特别明显的精度优势,由图 4 可见,拟合曲线和测量曲线几乎完全重合。相应地,其拟合参数用于表征被拟合的渐开线波形也更加精准和确切,适合在有高精度要求的场合进行推广应用,特别在计量校准应用中。其局限性主要是需要在不同的拟合曲线段中使用不同的拟合参数表征,缺乏统一一致性和参数的连贯性,从图 5 可见,两段拟合曲线波形的残差曲线波形是不连续的,拥有跳跃式间断点。此外,需要分割点的搜索和寻优过程,比较耗时。

单抛物线拟合的优点是简单直接,无需分割点选取,全部被拟合的曲线段使用统一一致的参数组进行参数化表征,具有明确、唯一、连续的特点,其缺点是相对于双抛物线法,拟合精度较低,比较适合于精度要求不太高或测量误差较大的应用场合。

由图 3 曲线变化规律可见,就图 2 所示的标准渐开线而言,从渐开线起始点 $\theta=0$ 处开始,其在左半部分 60% 以下的部分(对应 1 260 采样点以前)与抛物线形貌贴合较好,用抛物线拟合残差非常小,而 60% 以上的部分与抛物线形貌差异较大,由此导致拟合曲线段大于 60% 时,拟合残差将随着曲线段的增大而急剧增加。

对 $\theta \in [0, \pi/2]$ 区间,相应的横坐标区间 $x \in [r_b, r_b \cdot \pi/2]$,就横坐标区间右半段中的曲线而言,随着曲线段长度减小,其拟合残差几乎线性降低,表明其随着线段长度降低,越来越贴近抛物线模型。由此可见,搜寻两条拟合曲线分段点,可以只从远渐渐开线谷值的右半段中搜寻。

另外,由图 3 可见,拟合残差有效值在测量序列段较短时会呈现一些波动,可以归结为软件计算误差对测量序列的适应性出现的波动,当测量序列段长度超过 12% 总长后,便不再出现残差有效值波动情况,可在实际试验中通过增加最小测量段长度方式予以避免,使其不影响测量序列的分段优化。

就纯曲线拟合而言,3 阶及以上的更高多项式阶次可以获得更高精度的渐开线拟合效果,本文之所以选择抛物线方程进行拟合,主要原因是抛物线是一种单峰曲线,其峰值位置可很容易地用于估计渐开线起始点 D 的坐标,作为渐开线拟合线段的参考点,这是其它高阶多项式曲线所不具备的优势。

4 结 论

本文针对齿轮齿廓渐开线拟合的难点和精度不高的难题,提出一种基于优化双抛物线拟合法,以优化分段的两段曲线分别进行抛物线拟合,达到了高精度拟合渐开线波形的效果,同时,给出渐开线起始点 D 的坐标估计结果。仿真实验表明,该方法具有稳定、可靠、精度高等特点,可用于齿轮齿廓渐开线的计量测试中。

利益冲突声明/Conflict of Interests

所有作者声明不存在利益冲突。

All authors declare no relevant conflict of interests.

参考文献

- [1] GB/T 13924-2008 渐开线圆柱齿轮精度检验细则[S]. GB/T 13924-2008 Inspection code for accuracy of involute cylindrical gears[S]. (in Chinese)
- [2] 张利民,周建来. 拟合公式法圆弧快速逼近渐开线的研究[J]. 机械研究与应用, 2010, 23(4): 39-41. Zhang Limin, Zhou Jianlai. Fitting formula method involute arc fast approaching[J]. Mechanical Research & Application, 2010, 23(4): 39-41. (in Chinese)
- [3] 刘涛,李亚军. 三段基圆渐开线蜗旋型线的双圆弧插值算法拟合与加工[J]. 现代制造工程, 2018(8): 109-114. Liu Tao, Li Yajun. Fitting and processing of double circular arc interpolation algorithm for three section base circle involute profile[J]. Modern Manufacturing Engineering, 2018(8): 109-114. (in Chinese)
- [4] 王忠,周汝忠. 渐开线的圆弧最佳拟合[J]. 机械,

- 2003(S1): 116-118.
- Wang Zhong, Zhou Ruzhong. Optimal fitting of circular arcs for involutes[J]. Machinery, 2003(S1): 116-118. (in Chinese)
- [5] 丁克会, 周建来. 渐开线的圆弧快速逼近研究[J]. 制造技术与机床, 2010(1): 32-34.
- Ding Kehui, Zhou Jianlai. Research of approaching involute quickly by arc[J]. Manufacturing Technology & Machine Tool, 2010(1): 32-34. (in Chinese)
- [6] 蔡善乐, 李丙才, 谢黎明, 等. 渐开线蜗杆齿形双曲线拟合新方法[J]. 制造技术与机床, 1995(3): 8-10.
- Cai Shanle, Li Bingcai, Xie Liming, et al. New hyperbola fitting method for profile of involute worm [J]. Manufacturing Technology & Machine Tool, 1995(3): 8-10. (in Chinese)
- [7] 黄富贵. 基于样条函数拟合的全局齿形误差的测量评定方法[J]. 工具技术, 2011, 45(2): 109-111.
- Huang Fugui. Assessing method of complete tooth form error based on spline function[J]. Tool Engineering, 2011, 45(2): 109-111. (in Chinese)
- [8] 孙永厚, 肖威, 黄美发, 等. 基于移动最小二乘法的渐开线齿轮齿廓曲线拟合方法[J]. 中国机械工程, 2014, 25(22): 3017-3021.
- Sun Yonghou, Xiao Wei, Huang Meifa, et al. Fitting method of tooth profile curve for involute cylindrical gears based on MLS[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(22): 3017-3021. (in Chinese)
- [9] 王俊英, 解文涛, 闫石. 渐开线齿廓单点拟合法及其精度分析[J]. 新技术新工艺, 2000(11): 16-17.
- Wang Junying, Xie Wentao, Yan Shi. Fitting of trace of wire cut for involute profile of die by one point and precision analysis of the method[J]. New Technology & New Process, 2000(11): 16-17. (in Chinese)
- [10] 田福祥, 解文涛. 渐开线齿廓二点拟合法及其精度分析[J]. 机械制造, 2001, 39(1): 27-28.
- Tian Fuxiang, Xie Wentao. Two-point fitting method of involute tooth profile and its accuracy analysis [J]. Machinery, 2001, 39(1): 27-28. (in Chinese)
- [11] 王永旭, 阿达依·谢尔亚孜旦, 刘明亮. 双正交小波对球面渐开线螺旋锥齿轮齿面拟合的研究[J]. 机床与液压, 2022, 50(2): 1-7.
- Wang Yongxu, Adayi Xieryazidan, Liu Mingliang. Research on tooth surface fitting of spherical involute spiral bevel gear based on biorthogonal wavelet [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2022, 50(2): 1-7. (in Chinese)
- [12] 丁撼, 阿达依·谢尔亚孜旦. 球面渐开线齿面的形成理论及其NURBS精确拟合方法[J]. 中南大学学报 (自然科学版), 2015, 46(6): 2052-2058.
- Ding Han, Adayi Xieryazidan. Theory of forming spherical involute tooth surface and its accurate cubic NURBS fitting method [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2015, 46(6): 2052-2058. (in Chinese)
- [13] Brandão J A, Seabra J H O, Castro M J D. Surface fitting of an involute spur gear tooth flank roughness measurement to its nominal shape [J]. Measurement, 2016, 91: 479-487.
- [14] 李文斌, 梁国星, 吕明. 一种CBN径向珩齿刀的理论廓形及其渐开线拟合研究[J]. 太原理工大学学报, 2010, 41(3): 215-219.
- Li Wenbin, Liang Guoxing, Lü Ming. The theoretical profile and involutes' fitting research of CBN plunge gear-honing cutter [J]. Journal of Taiyuan University of Technology, 2010, 41(3): 215-219. (in Chinese)
- [15] 贺敬良, 吴序堂. 渐开线锥形齿轮精密测量原理及方法[J]. 计量学报, 2003, 24(3): 177-180.
- He Jingliang, Wu Xutang. Principle and method of precision measurement for conical involute gears [J]. Acta Metrologica Sinica, 2003, 24(3): 177-180. (in Chinese)
- [16] 高超学, 苏小平, 梁栋, 等. 改进的渐开线齿轮检测方法的研究[J]. 机械设计与制造, 2021(11): 301-304.
- Gao Chaoxue, Su Xiaoping, Liang Dong, et al. Improvement algorithm of the gear non-completely detection research [J]. Machinery Design & Manufacture, 2021(11): 301-304. (in Chinese)
- [17] Liu H, Ling S, Wang L, et al. A high-precision fitting and dressing method for the flex and circular rigid splines with involute tooth profile in gear form grinding [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2022, 120(11): 8329-8343.
- [18] Miao J, Tan Q, Liu S, et al. Vision measuring method for the involute profile of a gear shaft [J]. Applied Optics, 2020, 59(13): 4183-4190.
- [19] 廖念钊, 玉代华. 大齿轮齿形误差在位检测的一种新方法[J]. 计量学报, 1994, 15(1): 17-21.
- Liao Nianzhao, Yu Daihua. A new method for on-line measurement of large gear's profile [J]. Acta Metrologica Sinica, 1994, 15(1): 17-21. (in Chinese)
- [20] 王家平, 林虎, 石照耀, 等. 标准渐开线的单圆弧最佳拟合方法[J]. 计量学报, 2025, 46(9): 1371-1376.
- Wang Jiaping, Lin Hu, Shi Zhaoyao, et al. The optimal fitting method of standard involute using single arc [J]. Acta Metrologica Sinica, 2025, 46(9): 1371-1376. (in Chinese)

- [21] 石照耀, 叶勇. 广义极坐标法测量渐开线轮廓误差的研究[J]. 仪器仪表学报, 2001, 22(2): 140-142.
Shi Zhaoyao, Ye Yong. Research on the generalized polar-coordinate method for measuring involute profile deviations [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2001, 22(2): 140-142. (in Chinese)
- [22] 凌明, 凌四营, 刘远航, 等. 测头半径对 1 级渐开线样板齿廓偏差测量的影响[J]. 仪器仪表学报, 2022, 43(4): 121-128.
Ling Ming, Ling Siying, Liu Yuanhang, et al. Effect of probe radius on the measurement for profile deviations of class-1 gear involute artefact[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2022, 43(4): 121-128. (in Chinese)
- [23] 林家春, 滕辰, 李晗晓, 等. 基于粗糙度轮廓仪的圆柱齿轮齿廓形状偏差测量[J]. 仪器仪表学报, 2020, 41(12): 15-22.
Lin Jiachun, Teng Chen, Li Hanxiao, et al. Tooth profile deviation measurement of cylindrical gears based on a roughness profilometer [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2020, 41(12): 15-22. (in Chinese)
- [24] 王翔, 袁鸿, 黄筱调. 基于等效拟合和扫掠线的渐开线圆柱齿轮齿形误差计算方法[J]. 机械设计与制造, 2016(6): 171-173.
Wang Xiang, Yuan Hong, Huang Xiaodiao. A calculation method for profile error of involute cylindrical gear based on equivalent fitting and sweeping involute [J]. Machinery Design & Manufacture, 2016 (6): 171-173. (in Chinese)
- [25] 王翔. 渐开线扫掠法齿形误差评定研究[D]. 南京: 南京工业大学, 2016: 34.
Wang Xiang. Research on the Evaluation of Tooth Profile Errors Using the Involute Sweeping Method[D]. Nanjing: Nanjing Tech University, 2016: 34. (in Chinese)
- [26] 肖威. 基于 CMM 的渐开线圆柱齿轮误差评定方法研究[D]. 桂林: 桂林电子科技大学, 2014: 28-30.
Xiao Wei. Research on Error Evaluation Methods for Involute Cylindrical Gears Based on CMM [D]. Guilin: Guilin University of Electronic Technology, 2014: 28-30. (in Chinese)
- [27] 黄富贵, 张认成. 在三坐标测量机上精确测量渐开线圆柱齿轮的齿形误差[J]. 工具技术, 2005, 39(7): 85-87.
Huang Fugui, Zhang Rencheng. Precise measuring for error of tooth form of involute spur gear in 3D coordinate measuring machine [J]. Tool Engineering, 2005, 39(7): 85-87. (in Chinese)
- [28] 肖威, 孙永厚, 赵碧洁, 等. 渐开线圆柱齿轮齿廓偏差的评定方法研究[J]. 机械设计与制造, 2014(3): 244-246.
Xiao Wei, Sun Yonghou, Zhao Bijie, et al. Research on evaluate method for tooth profile of involute cylindrical gears [J]. Machinery Design & Manufacture, 2014 (3): 244-246. (in Chinese)
- [29] 彭浩坤. 渐开线圆柱齿轮偏差计算及精度等级评估[D]. 苏州: 苏州大学, 2011: 1-62.
Peng Haokun. Deviation Calculation and Accuracy Assessment of Involute Cylinder Gear [D]. Suzhou: Soochow University, 2011: 1-62. (in Chinese)
- [30] 凌明, 凌四营, 刘祥生, 等. 虑及计值范围的 1 级齿轮渐开线样板精密成型[J]. 仪器仪表学报, 2021, 42(11): 35-44.
Ling Ming, Ling Siying, Liu Xiangsheng, et al. Precision forming for class-1 gear involute artefact considering the evaluation range [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2021, 42(11): 35-44. (in Chinese)
- [31] 严鉴铂, 林欧. 渐开线拟合矩形花键滚刀齿形及齿顶圆角计算[J]. 工具技术, 2018, 52(2): 95-99.
Yan Jianbo, Lin Ou. Calculation of tooth profile and top fillet based on involute fitting hob of rectangle spline [J]. Tool Engineering, 2018, 52 (2): 95-99. (in Chinese)