



万大庆, 重庆璧山人, 曾任加州大学欧文分校教授, 现任重庆大学教授。教育部重要人才计划入选者, 中科院“百人计划”入选者。1991 年获华盛顿大学数学博士学位, 主要研究领域为数论与算术代数几何, 特别是有限域上的 ζ 函数。因证明 Dwork 猜想获得国际关注, 第二届世界华人数学家大会“晨兴数学银奖”获得者。

Betti 数的显式估计及其算术应用

万大庆^{1,2}, 张鼎新^{3,4}

(1. 重庆大学离散数学中心, 重庆 400044; 2. 重庆大学数学与统计学院, 重庆 400044; 3. 复旦大学数学与交叉学科研究中心, 上海 200433; 4. 上海数学与交叉学科研究院 (SIMIS), 上海 200433)

摘要: 本文是一篇带有历史线索的综述, 主要介绍代数簇 Betti 数显式估计及其算术应用。本文从拓扑上同调与实、复代数簇的经典估计讲起, 再过渡到 Grothendieck 平展上同调、Weil 猜想以及任意特征中的 Betti 数上界问题。最后, 本文综述了作者近年来围绕 Katz 问题、普通 Betti 数及紧支 Betti 数所取得的一些研究进展。

关键词: Betti 数; 显式估计; 平展上同调; Weil 猜想; Katz 问题; 紧支上同调

中图分类号: O156 **文献标志码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.260195

Explicit estimates for Betti numbers and their arithmetic applications

WAN Daqing^{1,2}, ZHANG Dingxin^{3,4}

(1. Center for Discrete Mathematics, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
3. Center for Mathematics and Interdisciplinary Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China;
4. Shanghai Institute for Mathematics and Interdisciplinary Sciences (SIMIS), Shanghai 200433, China)

Abstract: This survey discusses explicit estimates for Betti numbers of algebraic varieties and their arithmetic applications. The guiding problem is to bound the total Betti number, or the compactly supported total Betti number, of a variety defined by equations of bounded degree in terms of the degree, the number of equations, and the ambient dimension. Such bounds are coarse topological invariants, but they become concrete constants in point-counting estimates, zeta functions, and exponential-sum problems over finite fields. We begin with classical estimates in topology and real algebraic geometry. After recalling ordinary and compactly supported cohomology, we review the Milnor-Thom bounds for real algebraic sets and the Smith-Thom comparison between real and complex points. These results show that Betti numbers are polynomially controlled in fixed ambient dimension, while also showing why realification gives estimates that are often too large for arithmetic use. We then turn to étale cohomology and the Weil conjectures. The Grothendieck trace formula relates point counts over finite fields to Frobenius traces on compactly supported cohomology, and Deligne's

收稿日期: 2026-06-05 修回日期: 2026-07-02 接受日期: 2026-07-08

基金项目: 科技部重点研发项目(2022YFA1007100)

作者简介: 万大庆(1964—), 男, 重庆璧山人, 博士, 教授, 主要研究方向为数论与算术代数几何. E-mail: dwan@math.uci.edu

通信作者: 张鼎新, E-mail: dingxinzhang@fudan.edu.cn

theorem on weights controls the size of the corresponding eigenvalues. Thus explicit Betti bounds enter directly into Lang-Weil type estimates and into the control of zeta functions. This provides the arithmetic motivation for asking for bounds that are not only finite, but explicit in the defining degrees. The second part of the survey concerns arbitrary characteristic. We recall the work of Bombieri and Katz, including Katz's explicit compactly supported Betti bound and his question on ordinary Betti numbers. We then survey recent progress around this question: Ordinary Betti numbers of affine varieties admit explicit bounds of the expected order in the degree, while compactly supported Betti numbers admit sharp-order estimates. The proofs combine Euler characteristic estimates, weak Lefschetz theorems, stratification and reduction arguments, and, for complete intersections, degeneration ideas related to perverse sheaves. The survey also discusses the asymptotic behavior of affine complete intersections, where the leading order can be identified more precisely. These results clarify both the power of Katz's method and the additional geometric input needed to reach optimal dependence on the degree.

Keywords: Betti numbers; explicit estimates; étale cohomology; Weil conjectures; Katz's question; compactly supported cohomology

代数簇的 Betti 数是衡量其几何与拓扑复杂度的一类基本数值不变量。本文所关心的核心问题是:对于由次数有界的多项式方程定义的代数簇,能否仅用方程次数、方程个数和环境维数对总 Betti 数或紧支总 Betti 数给出显式上界。此类上界虽然只能提供较粗的拓扑信息,却会在有限域上的点数估计、zeta 函数和指数和问题中成为具体常数。因此,算术应用需要的往往不仅是上界的存在性,还要求上界能够由定义方程的次数明确写出,并尽可能具有正确的增长阶。

在实数域和复数域上, Betti 数的显式估计与拓扑学、实代数几何的经典发展密切相关。Milnor-Thom 估计说明,在环境维数固定时,实代数簇的 Betti 数可由方程次数多项式控制。Smith-Thom 不等式则把实点集的拓扑与相应复点集联系起来。这些结果构成了问题的经典起点,同时也表明,将复代数簇实化所得的估计通常过大,难以满足精细算术应用的需要。

有限域情形的关键工具是平展上同调和 Weil 猜想。Grothendieck 迹公式把有限域上的点数表示为 Frobenius 在紧支上同调上的迹,而 Deligne 的权理论控制相应特征值的大小。因此,总 Betti 数的显式上界直接进入 Lang-Weil 型估计以及 zeta 函数的控制,并进一步影响指数和估计中的常数。这解释了为什么需要在任意特征中研究仅依赖于次数和环境维数的上同调维数上界。

在任意特征的代数闭域上, Bombieri 和 Katz 的工作为这一问题奠定了基础。特别地, Katz 给出了紧支总 Betti 数的显式上界,并提出普通总

Betti 数是否也存在同类估计的问题。近年来,围绕这一问题已有进一步进展:仿射簇的普通总 Betti 数可以得到具有次数预期增长阶的显式上界;紧支总 Betti 数也具有最优阶估计;在仿射完全交情形,还可以更精确地描述其渐近行为。这些证明综合使用 Euler 示性数估计、弱 Lefschetz 定理、分层与约化以及与偏屈层有关的退化方法。

本文沿着上述历史线索组织内容。第 1 节回顾总 Betti 数的基本概念、实代数簇的 Milnor-Thom 估计以及 Smith-Thom 比较。第 2 节介绍平展上同调、Weil 猜想及其在有限域点数估计中的作用。第 3 节梳理 Bombieri 与 Katz 的工作并讨论普通总 Betti 数的显式估计。第 4 节介绍紧支总 Betti 数的最优阶上界以及仿射完全交的渐近结果。这些结果说明,要获得关于次数的最优依赖,除上同调的一般形式性质外,还需要更细致的几何输入。

1 总 Betti 数与 Milnor-Thom 估计

同调与上同调是二十世纪上半叶拓扑学的重要成果。它们起源于 Poincaré 并伴随近代拓扑学和同调代数的发展而兴起,是最直接、最易于计算的拓扑不变量之一。

设 Λ 为环, X 为局部紧 Hausdorff 拓扑空间。记 $H^i(X; \Lambda)$ 为 X 以系数环 Λ 的第 i 阶上同调模, $H^i_c(X; \Lambda)$ 为第 i 阶具有紧支集的上同调模。若 Λ 是域,则分别定义

$$h^i(X; \Lambda) = \dim_{\Lambda} H^i(X; \Lambda)$$

为第 i 个 Betti 数,

$$h_c^i(X; \Lambda) = \dim_{\Lambda} H_c^i(X; \Lambda)$$

为第 i 紧支 Betti 数。相关定义可参见标准教材, 例如文献[1]。

定义 1.1 若 Λ 是域且各阶上同调有限维, 则

$$B(X, \Lambda) = \sum_i \dim_{\Lambda} H^i(X; \Lambda)$$

称为 X 关于 Λ 的总 Betti 数。若各阶紧支上同调有限维, 则

$$B_c(X, \Lambda) = \sum_i \dim_{\Lambda} H_c^i(X; \Lambda)$$

称为紧支总 Betti 数。

这两个数可以看作空间 X 的“复杂度”的线性代数度量。上同调把空间中的“洞”、分支、奇点及无穷远行为压缩为有限维向量空间, Betti 数则进一步将这些向量空间的维数汇总为整数。尽管该过程会丢失一些细节信息, 但它保留了可以计算的、较为粗略的复杂度刻画。

本文关心的是: 若代数簇由次数不超过 d 的方程定义, 能否仅用次数、环境维数和方程个数给出 B 或 B_c 的显式上界。这里“显式”是关键词。在点计数和 zeta 函数估计中, 仅知道某个上界存在通常还不够, 我们希望得到可以写下来的界, 并且最好具有关于 d 的正确增长阶。

若 X 为紧空间, 则普通上同调与紧支上同调一致, 所以 $h^i(X; \Lambda) = h_c^i(X; \Lambda)$, 从而 $B(X, \Lambda) = B_c(X, \Lambda)$ 。对于非紧空间, 一般有 $B(X, \Lambda) \neq B_c(X, \Lambda)$, 即总 Betti 数通常不等于总紧支 Betti 数。下面给出一个简单例子。

例 1.2 令 X 为二维紧环面 $T = S^1 \times S^1$ 上的开锥, 即商空间

$$X = \frac{(S^1 \times S^1) \times [0, 1]}{T \times \{0\}}.$$

由于 X 可缩, $H^i(X; \Lambda) = 0$ 对所有 $i > 0$ 成立, 所以 $B(X, \Lambda) = 1$ 。

另一方面, 记 $\bar{X}$ 为 T 的闭锥, 即

$$\bar{X} = \frac{(S^1 \times S^1) \times [0, 1]}{T \times \{0\}}.$$

则 $\bar{X}$ 为可缩紧空间, $H^i(\bar{X}; \Lambda) = 0$ 对所有 $i > 0$ 成立, 且 X 是 $\bar{X}$ 的开子空间, 其补集为 $T = T \times \{1\}$ 。利用长正合列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_c^i(X; \Lambda) \rightarrow H^i(\bar{X}; \Lambda) \rightarrow \\ H^i(T; \Lambda) \xrightarrow{\partial} H_c^{i+1}(X; \Lambda) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

可以算得

$$H_c^i(X; \Lambda) = \begin{cases} H^1(T; \Lambda) = \Lambda^2, & i = 2; \\ H^2(T; \Lambda) = \Lambda, & i = 3; \\ 0, & i \neq 2, 3. \end{cases}$$

因此, $B_c(X; \Lambda) = 3$ 。

紧支上同调有一个后文会反复使用的形式性质: 若 $Z \subseteq X$ 是闭子空间, $U = X \setminus Z$, 则有开闭长正合列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_c^i(U; \Lambda) \rightarrow H_c^i(X; \Lambda) \rightarrow \\ H_c^i(Z; \Lambda) \rightarrow H_c^{i+1}(U; \Lambda) \rightarrow \cdots. \end{aligned}$$

因此, 在各项有限维时,

$$B_c(X, \Lambda) \leq B_c(U, \Lambda) + B_c(Z, \Lambda).$$

更一般地, 若 X 有有限局部闭分层 $X = \bigsqcup_a X_a$, 则

$$B_c(X, \Lambda) \leq \sum_a B_c(X_a, \Lambda).$$

随着同调与上同调理论的建立, 其抽象体系逐渐发展为同调代数这一独立分支。Cartan 和 Eilenberg 的开创性著作^[2]为该领域奠定了坚实基础。此后, 同调代数不断进步, 并与范畴论、同伦论等分支相互推动, 形成了丰富而深刻的结构。然而, 理论抽象之外, 具体空间的同调计算同样不可或缺。

自 Descartes 以来, 最基本的几何对象就是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中若干多项式方程的公共零点。十九世纪以后, 随着复数的引入和广泛应用, 数学家意识到在 $\mathbf{C}^n$ 中研究代数方程零点常常会引出更加简洁的结果。同时, 通过考虑复数解集的复共轭对合的不动点, 可以将某些复数域信息反映到实数域。进一步地, 若在射影空间 $\mathbf{P}^n$ 中用齐次方程描述对象, 许多结论更加整齐, 可避免对“无穷远”情形的繁琐讨论。下面我们简要介绍这些概念。

设 $F_1, \dots, F_r \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$, 它们在仿射空间 $\mathbf{C}^n$ 中的公共零点

$$V(\mathbf{C}) = \{F_1 = \cdots = F_r = 0\} \subseteq \mathbf{C}^n$$

称为复仿射代数簇。它带有从 $\mathbf{C}^n$ 继承的自然拓扑, 在该拓扑下 $V(\mathbf{C})$ 是局部紧空间。若定义方程具有实系数, 则它们的公共实数解集合记为

$$V(\mathbf{R}) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid F_1(x) = \cdots = F_r(x) = 0\}.$$

该集合同样带有自然拓扑, 并且是局部紧空间。由于定义方程具有实系数, 复共轭诱导了 $V(\mathbf{C})$ 上的对合, 其不动点集正是 $V(\mathbf{R})$ 。

射影情形与仿射类似。若 $F_1, \dots, F_r \in \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ 为齐次多项式, 则

$$V(\mathbf{C}) = \{F_1 = \cdots = F_r = 0\} \subseteq \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$$

称为射影复代数簇,可赋予继承于 $P^n(C)$ 的自然拓扑,在该拓扑下 $V(C)$ 是紧空间。拟射影代数簇则由齐次方程和齐次不等式共同定义,例如 $F_1 = \cdots = F_r = 0$ 且 $G_1 \neq 0, \dots, G_s \neq 0$,拟射影簇仍然是局部紧的。若上述定义拟射影簇的齐次多项式有实系数,则定义实点集

$$V(R) = \{x \in P^n(R) \mid F_1(x) = \cdots = F_r(x) = 0, G_1(x) \neq 0, \dots, G_s(x) \neq 0\}.$$

由于定义方程具有实系数,复共轭诱导了 $V(C)$ 上的一个对合,其不动点集正是 $V(R)$ 。

对于这些最自然的空间,我们希望研究它们的上同调性质。若空间较为规整,有时可以精确计算其 Betti 数。下面的例子说明,在光滑射影情形中,次数 d 所带来的增长集中在中间上同调。

例 1.3 (光滑射影超曲面) 设 $V \subseteq P^n(C)$ 是光滑次数 d 超曲面,也就是说, V 由一个次数等于 d 的齐次多项式定义,且 $V(C)$ 是 $P^n(C)$ 中的闭子流形。令 $\mathcal{O}_V(1)$ 为 V 上的超平面线丛。弱 Lefschetz 定理^[3]与 Poincaré 对偶给出

$$H^i(V; \mathbf{Q}) \cong H^i(P^{n-1}(C); \mathbf{Q}) \quad (i \neq n-1).$$

因此,除中间次数外, V 的上同调与 P^{n-1} 相同。于是 Euler 示性数已经决定总 Betti 数:两者只可能在第 $n-1$ 阶相差,而这一阶在 Euler 示性数中带符号 $(-1)^{n-1}$ 。因此

$$B(V, \mathbf{Q}) = n + (-1)^{n-1}(\chi(V) - \chi(P_c^{n-1})).$$

下文将说明

$$B(V, \mathbf{Q}) = n + \left((d-1)^{n+1} + (-1)^{n-1}(d-1) \right) / d = d^n + O_n(d^{n-1}) \quad (1)$$

这里 O_n 中的隐含常数只依赖于 n ,下文的 $O_{n,r}, \ll_n, \ll_{n,r}$ 等记号的含义与此类似。

我们简要说明公式(1)的来源。记 $\chi(V)$ 为 V 的 Euler 示性数。由 Gauss-Bonnet 定理,

$$\chi(V) = \int_V c_{n-1}(T_V),$$

这里 T_V 是 V 的切丛, c_{n-1} 表示第 $n-1$ 个 Chern 类。令 $h = c_1(\mathcal{O}_V(1))$ 。记

$$c(T_V) = 1 + c_1(T_V) + \cdots + c_{n-1}(T_V)$$

为 T_V 的全 Chern 类。可以证明:

$$c(T_V) = \frac{(1+h)^{n+1}}{1+dh}.$$

这里的等式在 V 的上同调环中理解,右端按 h 展开后只取次数不超过 $n-1$ 的部分。又 $\int_V h^{n-1} = d$,因而

$$\chi(V) = d \cdot [h^{n-1}] \left((1+h)^{n+1} (1-dh + d^2 h^2 - \cdots) \right),$$

其中 $[h^{n-1}]$ 表示取 h^{n-1} 的系数。化简得到

$$\chi(V) = (-1)^{n-1} \frac{(d-1)^{n+1} + (-1)^n}{d} + 1 + \chi(P_c^{n-1}),$$

代入上面的 Euler 示性数关系便得到式(1)。

当空间存在奇异性、且我们不对这些奇异性作具体分析时,往往只能对总 Betti 数进行估计。对在实数域上定义的代数簇,成立如下的定理,这里及下文中的 F_2 表示含有两个元素的有限域:

定理 1.4 设 $X(R) \subseteq R^m$ 为由若干次数不超过 d 的实系多项式方程所定义的代数簇的实点集。则存在一个只依赖于 m 的常数 C_m ,使得

$$B(X(R), F_2) \leq C_m d^m.$$

进一步,根据 Milnor 对超曲面的估计及其规范化版本,有

$$B(X(R), F_2) \leq (d+1)(2d+1)^{m-1}.$$

对于上述结论,已有研究者提出若干类似的表述,如 Milnor^[4]、Thom^[5]和 Oleinik^[6]。此处采用的是 Milnor 的版本,Thom 也有类似的结果,仅涉及的常数略有不同。需要特别指出的是:当底空间的维数 m 固定时,实代数集的总 Betti 数能被 d^m 这一阶有效控制。定理 1.4 的证明思想如下。Milnor 与 Thom 的方法利用了 Morse 理论:先把问题化到紧光滑超曲面或其邻域,再取一个一般线性函数作为 Morse 函数,使 Betti 数由 Morse 临界点个数控制,而临界点则满足一组多项式方程,最后用 Bezout 型估计控制临界点个数。若 X 由多个方程定义,可考虑 $f_1^2 + \cdots + f_r^2 = \epsilon$ 给出的光滑邻近超曲面,把一般代数集归约到超曲面估计。值得注意的是,阶数 d^m 在实数上不能改进。事实上,在 R^m 中取 m 个一般次数为 d 的多项式,它们可以有 d^m 个实交点,此时 $B(X(R), F_2) = d^m$ 。

把复代数簇看成实代数集,可以立刻得到一个复版本。若 $V(C) \subseteq C^n$ 由次数不超过 d 的复多项式定义,则把每个复方程写成实部和虚部就得到 R^{2n} 中次数不超过 d 的实方程组。

推论 1.5 设 $V(C) \subseteq C^n$ 由次数不超过 d 的多项式定义。则

$$B(V(C), F_2) \leq (d+1)(2d+1)^{2n-1}.$$

特别地, 固定 n 时, $B(V(C), F_2) \ll_n d^{2n}$ 。

另一方面, Thom^[5]指出: 借助 Smith 的等变理论, 只要能够估计复代数簇的总 Betti 数就能相应地估计定义在实数域上的代数簇的总 Betti 数。这正是著名的 Smith-Thom 不等式。

定理 1.6 设 V 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的拟射影代数簇, 则

$$B(V(\mathbb{R}), F_2) \leq B(V(C), F_2).$$

紧支上同调版本的不等式同样成立。

定理 1.6 的证明思想如下。复共轭在 $V(C)$ 上引入一个对合, 其不动点集就是 $V(\mathbb{R})$ 。Smith 理论比较有限 CW 复形与其对合不动点集在 F_2 系数上的上同调, 从而得出上述不等式。关于等变拓扑的相关背景可参见文献[7]。

定理 1.4 的结论已经在渐进意义下达到最优, 但其推论 1.5 却略显不足: 由此得到的复数情形估计为 d^{2n} 级别, 远高于例 1.3 所示的 d^n 级别, 似乎未能准确反映复代数簇 Betti 数的真实增长趋势。此外, 这种方法主要依赖于拓扑手段和 Morse 理论, 对下文将要讨论的算术工具, 特别是平展上同调, 缺乏有效的启发, 对于紧支上同调也无法给出相应的有效估计。

2 平展上同调与 Weil 猜想

让我们将视角从拓扑学转向代数几何, 即专门研究代数簇几何结构的学科。与拓扑学在二十世纪中叶的蓬勃发展相对应, 代数几何同样在此后经历了革命性的变革。在 Weil、Zariski、Serre 及 Chevalley 等人的奠基工作之后, Grothendieck 引入了概形的语言, 并在文献[8]中系统地发展了概形论的基础。到了今天, Grothendieck 体系下的代数几何早已不再是二十世纪七十年代人们眼中“晦涩难懂”“抽象深奥”的学问。像代数拓扑一样, 它已逐渐成为代数、几何与数论方向的研究生普遍掌握的基础知识。因此, 本文不再赘述其基本记号与概念, 标准教材可参见文献[9]。

对于尚不熟悉代数几何的读者, 只需明白: 复数域上的代数簇可被赋予自然的概形结构, 而概形的定义范围更为广泛、也更加灵活。特别地, 概形理论允许我们在整数环 $\mathbb{Z}$ 、有限域 F_q 、数域 K , 甚

至一般概形 S 等不同基底上开展代数几何的研究。正是这种灵活性为后文将复几何、有限域点计数、平展上同调和 zeta 函数等主题融会贯通打下了基础。

接下来我们将专注于讨论平展上同调而不再回顾概形理论的其他重要应用。Grothendieck 首创性地提出了“景(site)”与“拓扑斯(topos)”等概念, 在范畴论的基础上建立起崭新的上同调理论体系。在概形理论中, 他与学生 Verdier 以及合作者 Artin 共同发展了平展景(étale site)理论, 由此使得我们能够在概形层面上定义平展上同调。这是首次在概形这一范畴中对拓扑学的上同调理论进行了系统的重构。

具体而言, 对于代数闭域 k 上的分离有限型概形 X , 以及任一与特征互素的素数 l , 都可以定义平展上同调 $H_{\text{ét}}^i(X; F_l)$ 和紧支平展上同调 $H_{\text{ét}, c}^i(X; F_l)$ (其系数亦可取 $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ 、 $\mathbb{Z}_l$ 、 $\mathbb{Q}_l$ 等, 这些情形下同样有类似的理论结果)。平展上同调满足许多基本且重要的性质, 如 Mayer-Vietoris 正合列、Leray 谱序列、Poincaré 对偶、Künneth 公式以及 Lefschetz 不动点定理等。

此外, 当 $k = \mathbb{C}$ 时, 平展上同调与经典拓扑上同调完全兼容。更具体地说, 若 X 是 $\mathbb{C}$ 上有限型且分离的概形, 则存在自然的同构:

$$H_{\text{ét}}^i(X; F_l) \cong H^i(X(\mathbb{C}); F_l),$$

$$H_{\text{ét}, c}^i(X; F_l) \cong H_c^i(X(\mathbb{C}); F_l).$$

因此, 复代数簇以 F_l 为系数的奇异上同调可以完全用代数的方式定义出来。对于 $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ 、 $\mathbb{Z}_l$ 、 $\mathbb{Q}_l$ 等系数也成立类似结论。鉴于此, 今后文中所称“上同调”均指平展上同调, 不再在记号上区分奇异上同调和平展上同调。

Weil 很早便预见到, 如果能构建一种理想的代数簇上同调理论, 并且该理论满足 Poincaré 对偶、Künneth 公式、Lefschetz 迹公式等重要性质, 那么他在 1949 年提出的若干有限域算术核心猜想便可通过形式推理得出。这也正是 Grothendieck 建立平展上同调理论的重要动机之一。接下来, 我们简要介绍 Weil 猜想及平展上同调的相关应用, 并顺带指出总 Betti 数在算术中的意义。

平展上同调有一个经典拓扑理论难以体现的特征: 它能够反映算术信息。设 $X = X_0 \otimes_{k_0} k$, 其中 $k_0 \in k$, 且 k 是 k_0 的代数闭包。那么 Galois 群 $\text{Gal}(k/k_0)$ 会自然且连续地作用在 $H^i(X; \mathbb{Q}_l)$ 和

$H_c^i(X; \mathbf{Q}_l)$ 上, 并同样作用于其他系数下的版本。特别地, 对数域 K 上分离有限型概形 X_0 (譬如有理系数多项式定义的拟射影簇), 其普通平展上调 $H^i(X_0 \otimes_K \overline{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q}_l)$ 与紧支平展上调 $H_c^i(X_0 \otimes_K \overline{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q}_l)$ 自然是绝对 Galois 群 $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ 的线性表示。这一结构将椭圆曲线、Abel 簇中熟悉的 l -进 Galois 表示, 自然推广到了任意代数簇的情形。

现在取 $k_0 = F_q, k = \overline{F}_q$ 。此时 Galois 群 $\text{Gal}(k/k_0)$ 为算术 Frobenius $\sigma: x \mapsto x^q$ 拓扑生成的投射循环群, 其逆元 $F_q = \sigma^{-1}$ 被称为几何 Frobenius。设 $X = X_0 \otimes_{F_q} \overline{F}_q$, 则 F_q 作用在 $H_c^i(X; \mathbf{Q}_l)$ 上, 这个作用的迹正好控制有限域上的点数。

定理 2.1 (Grothendieck 迹公式) 设 X_0 为 F_q 上有限型分离概形, $X = X_0 \otimes_{F_q} \overline{F}_q$, 且 $l \nmid q$ 。则对于任意 $e \geq 1$, 有

$$\#X_0(F_{q^e}) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(F_q^e | H_c^i(X; \mathbf{Q}_l))。$$

若 X_0 由有限域 F_q 上的多项式方程及不等式定义, 则 $X_0(F_{q^e})$ 即为这些方程和不等式在扩域 F_{q^e} 中的解集。上述公式说明, 扩域上所有解的个数实际上由同一组有限维 $\mathbf{Q}_l$ -向量空间及 Frobenius 线性变换所决定。

回忆 X_0 的 zeta 函数定义为

$$Z(X_0, t) = \exp\left(\sum_{e=1}^{\infty} \#X_0(F_{q^e}) \frac{t^e}{e}\right)。$$

将迹公式代入, 同时利用线性代数恒等式 $\exp\left(\sum_{e \geq 1} \text{Tr}(T^e) t^e / e\right) = \det(1 - tT)^{-1}$, 可得到乘法形式的迹公式:

$$Z(X_0, t) = \prod_i \det(1 - tF_q | H_c^i(X; \mathbf{Q}_l))^{(-1)^{i+1}}。$$

由此即刻得到如下定理:

定理 2.2 设 X_0 为 F_q 上有限型分离概形。则存在 $P, Q \in 1 + t\mathbf{Z}[t]$, 使得

$$Z(X_0, t) = \frac{P(t)}{Q(t)}。$$

特别地, $Z(X_0, t)$ 是有理函数。

定理 2.2 也是 Weil 猜想中的一部分。Dwork 最早用 p -进分析方法证明了有理性^[10], 而 Grothendieck 的迹公式则提供了第二种更具观念性的证明。此外, 概形 X_0 的 zeta 函数完全由 X_0 的算术性质所决定, 无需借助任何上同调理论, 但 $Z(X_0, t)$ 的一些基本数值量却可以通过上同调读出。

定义 2.3 设

$$R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

是系数在域 K 中的有理函数, 其中 $P, Q \in 1 + tK[t]$ 互素。定义

$$\deg R = \deg P - \deg Q,$$

$$\deg_{\text{tot}} R = \deg P + \deg Q。$$

利用乘法形式的迹公式立即可以得出 zeta 函数次数与上同调的关系:

$$\deg Z(X_0, t) =$$

$$-\sum_i (-1)^i \dim_{\mathbf{Q}_l} H_c^i(X; \mathbf{Q}_l) = -\chi_c(X),$$

这里 $\chi_c(X)$ 是 X 的紧支 Euler 示性数。此外, 我们有如下全次数不等式:

$$\deg_{\text{tot}} Z(X_0, t) \leq B_c(X, \mathbf{Q}_l) \quad (2)$$

这里 $B_c(X, \mathbf{Q}_l)$ 是 X 的紧支总 Betti 数。一般来说, 等号有可能不成立, 因为相邻次数中的 Frobenius 特征根可能在化为互素分子分母时相互抵消。

注 1 定义 χ_c 时使用紧支上调是因为迹公式自然涉及紧支上调。另一方面, Laumon 的定理说明, 在平展上调中普通 Euler 示性数与紧支 Euler 示性数相等^[11]:

$$\sum_i (-1)^i \dim_{\mathbf{Q}_l} H^i(X; \mathbf{Q}_l) =$$

$$\sum_i (-1)^i \dim_{\mathbf{Q}_l} H_c^i(X; \mathbf{Q}_l)。$$

这与通常实拓扑中的情形不同。例如, $\mathbf{R}$ 是非紧定向流形, 其普通 Euler 示性数为 1, 而紧支 Euler 示性数为 -1。

类似于光滑流形, 光滑概形也满足 Poincaré 偶定理。这直接推出了 Weil 想中的函数方程。为避免引入不必要的一般性, 这里我们只说明光滑射影情形。设 $X_0 \setminus F_q$ 为光滑射影、纯维数为 d 的概形, 令 $X = X_0 \otimes_{F_q} \overline{F}_q$ 。Poincaré 对偶性给出非退化配对

$$H^i(X; \mathbf{Q}_l) \times H^{2d-i}(X; \mathbf{Q}_l) \rightarrow \mathbf{Q}_l(-d)。$$

上式右侧的 $-d$ 称为 Tate 扭, 该扭的引入确保配对与几何 Frobenius 作用相容: 若 α 是 Frobenius F_q 在 $H^i(X; \mathbf{Q}_l)$ 上的特征值, 则与其配对的特征值为 q^d/α , 其中指数 d 正是 Tate 扭中所指的值。把这一对称性代入 zeta 函数的乘法公式即得到 Weil 猜想中函数方程部分的上同调来源。

定理 2.4 (函数方程) 在上述设定下, 记

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbf{Q}_l} H^i(X; \mathbf{Q}_l)。$$

则存在 $\epsilon = \pm 1$, 使得

$$Z(X_0, q^{-d}t^{-1}) = \varepsilon q^{dx(X)/2} t^{x(X)} Z(X_0, t).$$

Weil猜想的最后也是最困难的部分,是所谓“黎曼猜想”。它断言:若 X_0 是定义在有限域 F_q 上的光滑射影概形,则几何 Frobenius F_q 作用于 $H^i(X; \mathbf{Q}_l)$ 的特征值都是代数整数,并且对任意域同构 $\iota: \overline{\mathbf{Q}_l} \rightarrow \mathbf{C}$,这些特征值在 ι 下的复绝对值均为 $q^{i/2}$ 。

Deligne在1974年证明了该猜想^[12],并在1980年大大推广了这一结果^[13]。为了表述该推广,我们先给出权的定义。

定义 2.5 设 $\iota: \overline{\mathbf{Q}_l} \rightarrow \mathbf{C}$ 为域之间的同构, $q > 0$ 为实数,且 $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}_l}$ 。我们称 α 关于 ι 的 q -权不超过 w ,若 $|\iota(\alpha)| \leq q^{w/2}$ 。若取等号,则称 α 关于 ι 的 q -权等于 w 。通常 q 可由上下文确定。

有了以上定义,我们可以给出 Deligne 定理的一个弱形式:

定理 2.6 设 X_0 是有限域 F_q 上有限型分离概形, $X = X_0 \otimes_{F_q} \overline{F_q}$ 。则对任意整数 i 和任意同构 $\iota: \overline{\mathbf{Q}_l} \rightarrow \mathbf{C}$,几何 Frobenius F_q 作用在 $H_c^i(X; \overline{\mathbf{Q}_l})$ 上的所有特征值关于 ι 的 q -权均不超过 i 。

举例来说,若 X_0 几何不可约,维数为 d ,则 $H_c^{2d}(X; \mathbf{Q}_l)$ 是一维的,且 F_q 在其上的特征值为 q^d 。结合 Grothendieck 迹公式与定理 2.6,可以得到如下形式的 Lang-Weil 估计^[14]:

定理 2.7 (Lang-Weil 估计) 设 X_0 是 F_q 上 A^n 中的几何不可约、维数为 d 的闭子概形,且 $X = X_0 \otimes_{F_q} \overline{F_q}$ 。则有

$$|\#X_0(F_q) - q^d| \leq B_c(X, \mathbf{Q}_l) q^{d-1/2}.$$

定理 2.7 的证明思想如下。由 Grothendieck 迹公式,

$$\#X_0(F_q) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(F_q | H_c^i(X; \mathbf{Q}_l)).$$

几何不可约性保证最高次数 $H_c^{2d}(X; \mathbf{Q}_l)$ 贡献主项 q^d ,其余特征值的权至多为 $2d-1$,故其复绝对值均不超过 $q^{d-1/2}$ 。逐个取绝对值并求和,即得上述估计。证毕。

从解析数论的角度看,上述 Lang-Weil 估计已经给出 $q^{1/2}$ 的幂次节省:主项的大小为 q^d ,误差项的大小至多为 $q^{d-1/2}$ 乘以一个上同调常数。不过,这个指数并非总是最优。若能证明更高次数的紧支上同调消失,则同样关于权的论证会给出更强的点数估计。

命题 2.8 沿用上一定理的设定。设 $d \geq 1, 0 \leq a \leq d-1$,且

$$H_c^i(X; \mathbf{Q}_l) = 0 (d+a < i < 2d).$$

则有

$$|\#X_0(F_q) - q^d| \leq B_c(X, \mathbf{Q}_l) q^{(d+a)/2}.$$

命题 2.8 的证明思想如下。最高次数 $H_c^{2d}(X; \mathbf{Q}_l)$ 仍给出主项 q^d 。由假设,除最高次数外所有非零紧支上同调都只可能出现在次数不超过 $d+a$ 的地方。于是,Deligne关于权的估计说明相应 Frobenius 特征值的复绝对值至多为 $q^{(d+a)/2}$ 。再用 Grothendieck 公式并逐项取绝对值即得结论。证毕。

当 $a = d-1$ 时,命题 2.8 给出的正是前面的 Lang-Weil 误差项。若能取 $a = 0$,则误差项为 $B_c(X, \mathbf{Q}_l) q^{d/2}$,这就是通常所说的平方根相消。从上同调的观点看,达到这种估计的一个自然充分条件是

$$H_c^{d+i}(X; \mathbf{Q}_l) = 0 (0 < i < d).$$

在适用弱 Lefschetz 定理的情形,例如某些一般完全交或一般截面情形,上述消没可以由 Lefschetz 型定理推出。对于任意给定的簇,判断这些紧支上同调是否消失通常并不直接。一种常见做法是选取合适的紧化,再通过无穷远边界和奇异点集的维数来控制相关上同调。Hooley 的论文中 Katz 所写的附录^[15]给出了这一思想的一个典型形式。

定理 2.9 (Katz) 设 $Y_0 \subseteq P_{F_q}^N$ 是理想意义下的射影完全交 (Ideal-Theoretic Projective Complete Intersection), 纯维数为 r , 多重次数为 $d = (d_1, \dots, d_{N-r})$ 。设 $Y = Y_0 \otimes_{F_q} \overline{F_q}$, 并设 Y 的奇异点集维数不超过 s 。记

$$p_r = \#P^r(F_q) = 1 + q + \dots + q^r.$$

若 $0 \leq s \leq r-2$,则存在只依赖于 N, r, d 的常数 C ,使得 $|\#Y_0(F_q) - p_r| \leq C q^{(r+s+1)/2}$ 。

光滑情形可视为 $s = -1$,此时误差指数为 $r/2$ 。

这里的关键点是误差指数对奇异点集维数 s 的依赖。奇异性越小,可能出现的较高的权越少,点数估计也就越接近平方根相消。因此,Lang-Weil 型估计中会出现哪些权并不总能从原方程表面直接看出。但是,原则上它可以通过紧化与奇异性分析转化为几何问题。从迹公式的证明看,定理中的常数 C 可由同一类射影完全交的总 Betti 数上界控制。

综上, Lang-Weil 型估计的质量有两个来源: 误差项的指数由出现的 Frobenius 的权决定, 这些权又受较高次数紧支上同调的消没控制; 另一方面, 隐含常数由相关上同调空间的维数之和的控制, 因而可由总 Betti 数估计。这正是算术上研究 Betti 数显式上界的一个基本动机。

3 Bombieri 与 Katz 的 Betti 数估计

Bombieri 关于有限域指数和的两篇论文^[16-17]给出了相关 L 函数次数与总次数的显式上界。这些结果本身属于指数和理论, 本文只记录它们对 Betti 数问题所提供的输入。设 $V_0 \subseteq A_{F_q}^N$ 由 r 个次数不超过 d 的多项式定义, 并记 $V = V_0 \otimes_{F_q} \overline{F}_q$ 。Bombieri 的总次数估计给出

$$\deg_{\text{tot}} Z(V_0, t) \leq (4(d+1) + 5)^{N+r}.$$

鉴于不等式 (2), 此类结果提示相应的 Betti 数也应有类似的显式控制。不过, 由于相邻上同调次数中的 Frobenius 特征值可能在 zeta 函数中相互抵消, 总次数上界不能直接推出 Betti 数上界。

从方法论上讲, Bombieri 的证明是基于 p -进分析的。他采用 Dwork 理论将 zeta 函数表达为某个完全连续算子 (Dwork 算子) 的 Fredholm 行列式, 并在链复形层面研究 Frobenius 的斜率。用现代语言来说, 这一思路与 Berthelot 所引入的刚性上同调中的 Frobenius 作用紧密相关, 参见文献 [18]。Dwork 理论的一个变体给出了用于计算刚性上同调的具体链复形。其核心在于对 Dwork 算子的谱性质进行精确控制。由于刚性上同调是链复形的子商 (Subquotient), 链级别的控制自然传递到刚性上同调。因此, Bombieri 的论证实际上可以导出刚性上同调紧支总 Betti 数的上界。

注 2 一个重要的猜想认为, 对于任意定义在特征 $p > 0$ 的代数闭域上的代数簇, 其 l -进上同调和刚性上同调的 Betti 数应当一致。然而, 这一猜想目前仍仅在极少数情形下得到证实, 在一般情形下尚属悬而未决。

另一方面, Dwork 的方法能够精确估计 zeta 函数的次数, Bombieri 已利用此法获得相关结果。由于该次数即为 Euler 示性数, 无论采用何种 l -进上同调理论, 我们也由此得到了 Euler 示性数的上界。Adolphson-Sperber 随后通过 Newton 多面体方法对这类估计进行了改进^[19-20]。其主要结果可总结如下:

定理 3.1 设 $D_{N,r}$ 表示 $r+1$ 个变量的 N 次齐次多项式, 所有单项式系数均为 1。换言之, $D_{N,r}$ 就是这 $r+1$ 个变量的 N 次齐次完全对称多项式, 即

$$D_{N,r}(T_0, \dots, T_r) = \sum_{a_0 + \dots + a_r = N} T_0^{a_0} \cdots T_r^{a_r}.$$

在上述条件下, 有如下 Euler 示性数的上界:

$$|\chi_c(V)| \leq 2^r D_{N,r}(1, 1+d, \dots, 1+d) \leq 2^r (r+1+rd)^N.$$

经过 Bombieri 和 Adolphson-Sperber 多年的研究, Katz 在纪念四川大学柯召教授的论文^[21]中首次给出了紧支总 Betti 数 $B_c(V, \mathbf{Q}_l)$ 的新的显式上界。其做法结合了前述 Euler 示性数的上界与 étale 上同调中的仿射弱 Lefschetz 定理, 成为估计 Betti 数的核心思想。这里我们先记录一个适合后文引用的弱 Lefschetz 形式。

引理 3.2 设 X 是维数不超过 n 的代数簇, 并设 $X \rightarrow P^n$ 是拟有限浸入。令 $\mathcal{F}$ 为 X 上的可构造层。则对充分一般的超平面 H , 存在 Gysin 映射

$$H_c^{i-2}(X \cap H; \mathcal{F}(-1)) \rightarrow H_c^i(X; \mathcal{F}),$$

它在 $i = n+1$ 时满射, 在 $i \geq n+2$ 时为同构。

这一形式可由 Deligne 的弱 Lefschetz 定理推出, 参见文献 [27] 中的 Lemma 3.9。下面我们给出 Katz 结果的一个显式推论。

定理 3.3 (Katz) 设 k 为代数闭域, $V \subseteq A_k^N$ 是由 $r \geq 1$ 个次数不超过 d 的多项式定义的闭子概形。若 $l \neq \text{char } k$, 则

$$B_c(V, \mathbf{Q}_l) \leq 6 \cdot 2^r (rd+3)^{N+1}.$$

若 V 是零维或 V 光滑连通, 则有较强的界

$$B_c(V, \mathbf{Q}_l) \leq 3 \cdot 2^r (r+1+rd)^N.$$

定理 3.3 的证明思想如下。先考虑 V 光滑连通、维数为 m 的情形。取一般仿射超平面 H 。弱 Lefschetz 定理说明, 除中间次数外, V 的上同调可由 $V \cap H$ 控制。于是

$$B(V, \mathbf{Q}_l) = \underbrace{\sum_{i \neq m} \dim H^i(V; \mathbf{Q}_l)}_{\text{由 } [V \cap H] \text{ 归纳控制}} + \underbrace{\dim H^m(V; \mathbf{Q}_l)}_{\text{由 } [\chi_c V] \text{ 反推出}}.$$

更具体地说,

$$\dim H^m(V; \mathbf{Q}_l) \leq |\chi_c(V)| + \sum_{i \neq m} \dim H^i(V; \mathbf{Q}_l).$$

因此, Euler 示性数界加上超平面截面的归纳界即可控制普通总 Betti 数 $B(V, \mathbf{Q}_l)$ 。另一方面, 对于光滑等维的 V , Poincaré 对偶给出 $H^i(V; \mathbf{Q}_l)$ 与 $H_c^{2m-i}(V; \mathbf{Q}_l)$ 的对偶关系。因此, 二者的总维数相

等,即 $B(V, \mathbf{Q}_l) = B_c(V, \mathbf{Q}_l)$, 但这里并不是说每一阶上同调的维数逐项相等。

对于一般闭子概形的情形,先将其转化为开补 $A^N \setminus V$,再用主开集覆盖与 Mayer-Vietoris 谱序列。交叠的主开集可借助 Rabinowitsch trick 写成更高一维仿射空间中的光滑超曲面:

$$1 - ZF_{i_1} \cdots F_{i_p} = 0.$$

这一步带来 $N+1$ 维空间中的估计,也正是一般界中 d 的次数比光滑情形多一阶的来源。证毕。

注3 定理3.3估计的是紧支 Betti 数。紧支上同调适合开闭分解,因而可以与 Mayer-Vietoris 谱序列和 Gysin 映射直接配合。普通 Betti 数则没有同样的形式性质。

Katz 在同一篇文章(文献[21])中提出的问题可以概括为:对任意由 N, r, d 控制的仿射闭子概形,是否也能给出普通总 Betti 数 $B(V, \mathbf{Q}_l)$ 的显式上界? 对此问题,文献[22]给出了肯定回答:

定理3.4 设 k 为代数闭域, $V \subseteq A_k^N$ 由 $r \geq 1$ 个次数不超过 d 的多项式定义。若 $l \neq \text{char } k$, 则

$$B(V, \mathbf{Q}_l) \leq 2r'(rd+3)^N.$$

特别地,若只假设 $V \subseteq A_k^N$ 可由次数不超过 d 的多项式定义,则

$$B(V, \mathbf{Q}_l) \leq 2(N+1)^{2N+1}(d+1)^N.$$

定理3.4的证明思想如下。证明继承了 Katz 的基本框架:先把 Euler 示性数界转化为 Betti 数界,再用 Lefschetz 型定理做归纳。新的困难在于这里估计的是普通上同调。对局部完全交情形,移位常值层 $\mathbf{Q}_{l,V}[\dim V]$ 是偏屈层,因此可以使用 Deligne 的偏屈弱 Lefschetz 定理(Perverse Weak Lefschetz Theorem)。它控制除中间次数外的普通上同调。中间次数再由 Laumon 的等式 $\chi(V) = \chi_c(V)$ 和已控制的其他次数反推出。而 $\chi_c(V)$ 可由前述 Bombieri-Adolphson-Sperber 型 Euler 示性数估计控制。

对于一般奇异情形,可再通过开闭分解所给出的谱序列把普通上同调估计归约到有限多个局部完全交片段。这些片段的数目和次数仍由 N, r, d 显式控制,于是得到上面的统一界。证毕。

注4(Kronecker 约化) 定理3.4的第二个界不再含有原始方程个数 r 。其原因在于 Kronecker 型约化:在无限基域上, A^N 中任意由次数不超过 d 的多项式定义的闭子集,可以集合论地由至多 $N+1$ 个次数不超过 d 的多项式定义。平展上同

调只依赖约化闭子概型,因此普通 Betti 数不区分原始方程组与这个集合论约化后的方程组。这样,在不指定 r 的问题中,方程个数可以被吸收到只依赖于 N 的常数中。

至此, Katz 的紧支 Betti 数问题和普通 Betti 数问题都已有显式解答。下一步自然的问题是:这些界在次数 d 上是否具有最优阶数?

4 紧支上同调的最优上界

文献[23]给出了仿射簇紧支 Betti 数的正确增长阶。设 n, r, d 为正整数。定义

$$B_c(n, r; d) = \sup B_c(V, \mathbf{Q}_l),$$

其中上确界取遍所有代数闭域 k , 所有满足 $l \neq \text{char } k$ 的素数 l , 以及所有由 r 个次数不超过 d 的多项式定义的闭子簇 $V \subseteq A_k^n$ 。

定理4.1^[23] 对任意正整数 n, r, d , 有

$$(d-1)^n \leq B_c(n, r; d) \leq 3^r \binom{n+r-1}{r-1} (2d+1)^n \leq 6^r (4d+2)^n.$$

因此,当 n, r 固定而 $d \rightarrow \infty$ 时,紧支总 Betti 数的最优增长阶为 d^n 。

定理4.1中的下界已经由零维完全交给出。例如,在 A^n 中取 n 个一般次数为 $d-1$ 的方程,其公共零点有 $(d-1)^n$ 个点。因此,定理中的 d^n 阶不能再降低。此外,方程个数 r 在定义中保留是因为许多应用会自然给出一个指定的方程组。不过,从集合论闭子集的角度看, r 并不总是必要参数。

我们先记录 Kronecker 约化在这里的形式:

引理4.2 固定 n, d 。则

$$B_c(n, 1; d) \leq B_c(n, 2; d) \leq \cdots \leq B_c(n, r; d) \leq B_c(n, r+1; d) \leq \cdots,$$

并且当 $r \geq n+1$ 时,

$$B_c(n, r; d) = B_c(n, n+1; d).$$

证明 单调性来自允许添加零方程。另一方面, Kronecker-Perron 约化^[24]说明,在无限域上, A^n 中任意由次数不超过 d 的多项式定义的闭子集,可以集合论地由至多 $n+1$ 个次数不超过 d 的多项式定义。代数闭域都是无限域,而紧支平展上同调只依赖约化闭子概型。因此,当 $r \geq n+1$ 后,上确界不再改变。证毕。

推论4.3 设 k 为代数闭域, $V \subseteq A_k^n$ 可由任意多个次数不超过 d 的多项式定义。若 $l \neq \text{char } k$,

则

$$B_c(V, \mathbf{Q}_l) \leq 3^{n+1} \binom{2n}{n} (2d+1)^n < 3(24d+12)^n.$$

证明 由引理 4.2, 可以把方程个数换成 $n+1$ 。再将定理 4.1 用于 $r=n+1$ 情形即得第一个不等式。第二个不等式来自 $\binom{2n}{n} < 4^n$ 。证毕。

Katz 的紧支 Betti 数界已经给出了任意特征中的显式控制。用这里的记号, 其一般界的阶为

$$B_c(n, r; d) \leq_{n,r} d^{n+1}.$$

更具体地说, 定理 3.3 给出

$$B_c(n, r; d) \leq 6 \cdot 2^r (rd+3)^{n+1}.$$

定理 4.1 则把这个阶数改进为 d^n , 正好达到零维完全交所强迫的阶。

Katz 方法中多出的一个 d 有清楚的几何来源。为了使用光滑情形的弱 Lefschetz 定理, 他的证明先把奇异闭子簇转化为光滑开补。随后, Rabinowitsch trick 又把主开集写成更高一维仿射空间中的光滑超曲面。这样, 原来 n 维仿射空间中的问题被放到 $n+1$ 维空间中处理, 从而在次数上多出一阶。文献[23]使用偏屈弱 Lefschetz 与退化思想, 避免了这一升维损失。

定理 4.1 还有一个射影形式的直接推论:

推论 4.4 设 k 为域, $\bar{k}$ 为其代数闭包, $X \subseteq \mathbf{P}_k^n$ 是 r 个次数不超过 d 的齐次多项式的公共零点。若 $l \neq \text{char } k$, 则

$$\sum_i \dim H^i(X \otimes_k \bar{k}; \mathbf{Q}_l) \leq 3^r C(n+r-1, r-1) (2d+2)^n.$$

证明 由于 $X \otimes_k \bar{k}$ 是完备的, 普通上同调与紧支上同调一致。取标准仿射开集, 把 $X \otimes_k \bar{k}$ 分解为仿射部分 U 与无穷远超平面上的闭子集 Z , 其中 $U \subseteq \mathbf{A}_k^n$ 仍由 r 个次数不超过 d 的方程定义, 而 Z 是 $\mathbf{P}_k^n$ 中同类的射影闭子集。开闭长正合列给出

$$B_c(X \otimes_k \bar{k}, \mathbf{Q}_l) \leq B_c(U, \mathbf{Q}_l) + B_c(Z, \mathbf{Q}_l).$$

对 U 使用定理 4.1, 对 Z 按 n 归纳即得所述界。证毕。

现在我们讨论首项常数。定理 4.1 证明了正确的 d^n 阶, 但一般情形的最优首项常数仍不清楚。一般完全交给出的模型常数是 $\binom{n-1}{r-1}$ 。文献[23]提出了如下问题:

问题 4.5 设 $1 \leq r \leq \lceil (n+1)/2 \rceil$ 。当 $d \rightarrow \infty$

时, 是否有

$$B_c(n, r; d) = \binom{n-1}{r-1} d^n + o_{n,r}(d^n)$$

成立? 这里对 r 的限制与单调性有关: $B_c(n, r; d)$ 随 r 单调不减, 而 $\binom{n-1}{r-1}$ 只在 $1 \leq r \leq \lceil (n+1)/2 \rceil$ 范围内随 r 增大。若不加这个限制, 一个可能的形式是把 $\binom{n-1}{r-1}$ 换成 $\binom{n-1}{\min\{r-1, \lceil (n-1)/2 \rceil\}}$ 。

对仿射完全交, 上述正确阶可以进一步精确到主项。设 $1 \leq r \leq n$ 。定义

$$B_c^{\text{al}}(n, r; d) = \sup B_c(V, \mathbf{Q}_l),$$

其中上确界取遍所有代数闭域 k , 所有满足 $l \neq \text{char } k$ 的素数 l , 以及所有 $V \subseteq \mathbf{A}_k^n$, 使得 V 由 r 个次数不超过 d 的方程定义, 且是维数为 $n-r$ 的完全交。

我们先记录一般成员的计算。设 $V \subseteq \mathbf{A}_k^n$ 是足够一般的 r 个次数为 d 的方程定义的光滑完全交。则

$$\binom{n-1}{r-1} (d-1)^n \leq \dim H_c^{n-r}(V, \mathbf{Q}_l) \leq C \binom{n-1}{r-1} d^n,$$

并且除中间次数和最高紧支次数外, 它的紧支上同调为零。因此, 一般完全交的紧支 Betti 主项为 $\binom{n-1}{r-1} d^n$ 。这给出下面定理中下界的来源:

定理 4.6 若 $1 \leq r \leq n$, 则

$$\binom{n-1}{r-1} (d-1)^n \leq B_c^{\text{al}}(n, r; d) \leq \binom{n-1}{r-1} (d+1)^n.$$

特别地,

$$B_c^{\text{al}}(n, r; d) = \binom{n-1}{r-1} d^n + O_{n,r}(d^{n-1}).$$

事实上, 证明给出了逐项的紧支上同调估计。

定理 4.7 设 $V \subseteq \mathbf{A}_k^n$ 是 r 个次数不超过 d 的方程定义的完全交, 并设 $\dim V = n-r$ 。若 $l \neq \text{char } k$, 则

$$H_c^i(V, \mathbf{Q}_l) = 0 \quad (i < n-r),$$

且对 $0 \leq j \leq n-r$ 有

$$\dim H_c^{n-r+j}(V, \mathbf{Q}_l) \leq \binom{n-1-j}{r-1} d^{n-j},$$

从而

$$B_c(V, \mathbf{Q}_l) \leq \binom{n-1}{r-1} (d+1)^n.$$

为了说明完全交情形中的退化步骤,我们先记录所需的偏屈退化引理。这里采用文献[25]的中间偏屈 t -结构约定: D_c^b 表示有界可构造导出范畴, ${}^p D_c^{\geq 0}$ 表示相应 t -结构的余连通(Coconnective)部分;而下面的 H_i 仍表示通常上同调层。关于偏屈层和偏屈 t -结构的系统讨论,仍参见文献[25]。

引理 4.8 设 B 是代数闭域 k 上的光滑连通曲线, $U \subseteq B$ 为非空开子集, $\Sigma = B \setminus U$, 并记 $j: U \hookrightarrow B$ 为开浸入。设 $\mathcal{F} \in {}^p D_c^{\geq 0}(B, \mathbf{Q}_l)$ 在曲线 B 上关于通常偏屈 t -结构是余连通的, 并且 $j^* \mathcal{F}$ 的各上同调层为局部系统。则对任意 $s \in \Sigma$, 存在自然单射

$$H^{-1}(\mathcal{F}_s) \hookrightarrow (R^0 j_* \mathcal{H}^{-1}(j^* \mathcal{F}))_s.$$

特别地, $\dim H^{-1}(\mathcal{F}_s)$ 不超过局部系统 $\mathcal{H}^{-1}(j^* \mathcal{F})$ 在 U 上的秩。

引理 4.8 是文献[23, 26]中使用的偏屈退化引理。在仿射完全交的应用中, 它把特殊纤维的中间紧支上同调控制在一般纤维给出的局部系统秩之内。

下面简要说明定理 4.6 的证明思想。第一步是计算一般纤维。足够一般的仿射完全交可以通过射影完全交及其无穷远边界计算 Euler 示性数。再由弱 Lefschetz 定理可知, 所有随 d 增长的部分集中在中间紧支上同调, 其主项为 $\binom{n-1}{r-1} d^n$ 。

第二步是从一般纤维传到任意纤维。把给定完全交放入一个连接到一般完全交的仿射族中。把这族推到参数曲线后, 若 π 表示这族到参数曲线的结构态射, 则可将引理 4.8 用于相应的 $R\pi_* \mathbf{Q}_l$ 。它说明特殊纤维的中间紧支上同调不超过一般纤维给出的局部系统秩, 再加上低维边界项。同类偏屈 Lefschetz 想也见于文献[27], 这些低维边界项可以用归纳处理。

第三步是控制非中间次数。取一般仿射超平面 H 。类似于引理 3.2 的 Lefschetz 型结论把 V 的较高次数紧支上同调归约到 $V \cap H$ 。反复截取超平面并归纳, 即可得到定理 4.7 的逐项估计。最后对所有次数求和, 得到定理 4.6 的总 Betti 数上界。证毕。

需要强调的是, 这个完全交证明本身并不推出定理 4.1 的一般情形, 原因是完全交结构使中间维数和 Lefschetz 归纳配合得很好, 而任意闭子簇

可能有不同维数的分支和更复杂的退化行为, 需要另一种全局约化方法来处理。尽管如此, 完全交估计已经足以在若干后续算术应用中替换 Katz 界, 并改善常数对次数的依赖。

参考文献:

- [1] Hatcher A. Algebraic topology [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [2] Cartan H, Eilenberg S. Homological algebra [M]. Princeton: Princeton University Press, 1956.
- [3] Milnor J W. Singular points of complex hypersurfaces [M]. Princeton: Princeton University Press, 1968.
- [4] Milnor J. On the Betti numbers of real varieties [J]. Proc Amer Math Soc, 1964, 15: 275-280.
- [5] Thom R. Sur l'homologie des variétés algébriques réelles [M]// Cairns S S. Differential and combinatorial topology. Princeton: Princeton University Press, 1965: 255-265.
- [6] Oleinik O A. Estimates of the Betti numbers of real algebraic hypersurfaces [J]. Mat Sbornik NS, 1951, 28(70): 635-640.
- [7] Bredon G E. Introduction to compact transformation groups [M]. New York/London: Academic Press, 1972.
- [8] Grothendieck A, Dieudonné J. Éléments de géométrie algébrique (I) [J]. Inst Hautes Études Sci Publ Math, 1960(4): 5-228.
- [9] Hartshorne R. Algebraic geometry [M]. New York/Heidelberg: Springer-Verlag, 1977.
- [10] Dwork B. On the rationality of the zeta function of an algebraic variety [J]. Amer J Math, 1960, 82: 631-648.
- [11] Laumon G. Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie l -adique [J]. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1981, 292(3): 209-212.
- [12] Deligne P. La conjecture de Weil (I) [J]. Inst Hautes Études Sci Publ Math, 1974(43): 273-307.
- [13] Deligne P. La conjecture de Weil (II) [J]. Inst Hautes Études Sci Publ Math, 1980(52): 137-252.
- [14] Lang S, Weil A. Number of points of varieties in finite fields [J]. Amer J Math, 1954, 76: 819-827.
- [15] Hooley C. On the number of points on a complete intersection over a finite field [J]. J Number Theory, 1991, 38(3): 338-358.
- [16] Bombieri E. On exponential sums in finite fields [J]. Amer J Math, 1966, 88: 71-105.

- [17] Bombieri E. On exponential sums in finite fields (II) [J]. *Invent Math*, 1978, 47(1): 29-39.
- [18] Wan D, Zhang D. Revisiting Dwork cohomology: Visibility and divisibility of Frobenius eigenvalues in rigid cohomology [J]. *Compos Math*, 2025, 161(6): 1215-1249.
- [19] Adolphson A, Sperber S. Newton polyhedra and the degree of the L-function associated to an exponential sum [J]. *Invent Math*, 1987, 88(3): 555-569.
- [20] Adolphson A, Sperber S. Exponential sums and Newton polyhedra: Cohomology and estimates [J]. *Ann of Math*(2), 1989, 130(2): 367-406.
- [21] Katz N M. Sums of Betti numbers in arbitrary characteristic [J]. *Finite Fields Appl*, 2001, 7(1): 29-44.
- [22] Zhang D. On sums of Betti numbers of affine varieties [J]. *Finite Fields Appl*, 2025, 103(1): 102583.
- [23] Wan D, Zhang D. Betti number bounds for varieties and exponential sums [J]. *Adv Math*, 2026, 490: 110852.
- [24] Perron O. Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker [J]. *Math Ann*, 1942, 118: 441-448.
- [25] Beilinson A, Bernstein J, Deligne P, *et al.* Faisceaux pervers [J]. *Astérisque*, 1982(100): 5-171.
- [26] Katz N M. A semicontinuity result for monodromy under degeneration [J]. *Forum Math*, 2003, 15(2): 191-200.
- [27] Wan D, Zhang D. Hodge and Frobenius colevels of algebraic varieties [J]. *J London Math Soc*, 2025, 111(4): e70160.

(责任编辑: 周兴旺)