

自适应多层综合评判^{*}

贾 博¹⁾, 于福生^{2)†}, 杨 霏²⁾, 仇树茂¹⁾, 袁晓曼²⁾, 徐金帆²⁾

(1)中国航空工业集团有限公司,北京;2)北京师范大学数学科学学院,北京)

摘要 针对因素集固定不变,使得多层综合评判(comprehensive evaluation, CE)模型难以应对因被评判对象不同而引起的因素集变化问题,提出了自适应多层 CE(adaptive multi-layer CE, AMLCE)模型,实现了动态 CE;探讨了 CE 模型基于因素距离和相似度核的跨层权重转移机制,设计了相应的权重转移方案.为说明其合理性,通过熵正则设计并优化了另一种权重转移方案,证明了在统一设定下 2 种方案的等价性.通过经典案例 CE 试验验证了所提 AMLCE 模型的有效性.

关键词 多层综合评判;自适应多层综合评判;评判因素集;评判矩阵;权重向量

中图分类号 O29

DOI: 10.12202/j.0476-0301.2025196

0 引言

综合评判(comprehensive evaluation, CE)问题在现实中广泛存在,如教师授课水平、产品品质、水品质、经济管理水平、环境质量、病人状态等综合评价,学生素质、药效等综合评定,人才综合选拔等.

评判一个对象需从一组评判因素出发,依据评判因素与评语之间的关系进行.评判因素与评语之间的关系有的是清晰的,可以用取值为 0 或 1 的布尔矩阵描述;有的不清晰,且带有模糊性,是一种模糊关系.布尔矩阵不能胜任模糊关系的描述任务.可用取值为 $[0, 1]$ 的模糊矩阵描述评判因素与评语之间的模糊关系,进而进行 CE.该方法最早由汪培庄^[1]于 1980 年提出.为突出模糊的特点,人们将其称为模糊 CE.进行 CE 时,所有评判因素处于同一层.但现实问题中,许多评判因素是分层的,具有层次结构.为满足这一需要,陈永义等^[2]提出了多层(multi-layer, ML)CE 模型,其不仅满足了现实需求,还提供了克服 CE 模型不足的途径.

在评判因素过多的情况下,如果不分层,则会因权重过低,导致评判过程中丢失过多信息.凭借处理多因素问题中模糊性的优势,CE 方法自提出后便评价、考核、决策等众多领域迅速得到成功应用^[3-13].

尽管 MLCE 模型显著地拓展了 CE 模型的应用范围,并取得良好应用效果,但仍存在一些局限,主要体现在如下 4 个方面.

1)评判权重形式单一,确定方法多具主观性,难

以满足实际需要.针对这一局限,学者们提出了许多改进方法,如将权重拓展为区间权重,在确定权重时引入层析分析法、集值统计法、灰色关联方法、变权法等^[14-17].

2)评判过程中采用的合成算子主要有 $M(\wedge, \vee)$ 、 $M(\cdot, \vee)$ 、 $M(\cdot, +)$ 3 种形式,存在信息利用不充分的不足.为此,学者们提出了多种改进办法,如广义合成算子、模糊积分综合法、动态变权综合等^[18-27].

3)CE 赖以进行的单因素评判信息采用评语集上的模糊子集描述,这在一些场合下存在表达不到位、不充分的弊端.为此,学者们提出了多种 CE 模型,包括基于信度理论、灰色、区间值、可拓、区间值模糊集、2 型模糊集、集对分析、Vague 集、直觉模糊等 CE 模型^[28-39].

4)CE 模型在对评判向量进行清晰化时,主要采用最大隶属原则,但这一原则存在丢失信息过多的不足.对此,学者们提出了一些改进办法^[40-41].

以上 4 个方面的研究使得 MLCE 模型更趋完善,应用更加广泛和有效.

罗承忠等^[42]给出了 CE 模型的数学描述.在已有 CE 模型中,评判因素的取值不是直接涉及的,评判因素取值的使用通常隐含在单因素评判向量的给出过程中,这使得评判因素取值的使用不明确.对此,汪培庄等^[43]在因素空间中探讨了 CE 及变权综合;罗承忠等^[44]给出了因素空间框架下的 CE 模型,使得评判因素的取值作为变量明确出现在 CE 模型中.为了满

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12371453, 11971065)

[†] 通信作者:于福生(1965—),男,教授,博士,博士生导师.研究方向:模糊数学与人工智能. E-mail: yufusheng@bnu.edu.cn

收稿日期:2025-10-20

足多个数据源情景下的评判需求, Xu 等^[45]提出了多源 CE 模型.

从提出到现在的 40 多年时间里, CE 模型一直在被研究和完善. 随着时代的发展, CE 问题呈现出新的不同形式或需求. 本文将针对评判因素集变化情景下的 CE 问题展开讨论, 建立相应的 CE 模型.

下面举几个例子说明这种新情景下的 CE 问题.

例 1 被评判对象是产品生产标准的评判问题. 评判一个标准的因素很多, 包括清晰性、规范性、先进性、实用性等. 规范性中除了文本规范性外, 还包括图形、表格、公式等的规范性, 用这样一个指标(因素)体系可以评判所有的产品生产的标准. 但是, 并不是每个标准的评判都会用到所有这些评判因素. 有的标准只有图和表而没有公式, 或只有图和公式而没有表, 抑或只有三者中的 1 个, 甚至三者都没有. 只考虑图、表、公式这 3 个因素, 可能出现的因素组合就有 8 种之多. 如果这样的因素再多, 那可能出现的因素组合就会更多.

例 2 新高考志愿填报情景下高考志愿适配的评判问题. 高考学生需依据其成绩评估适配高校, 但不同考生所选学的课程组合不同, 因此会导致例 1 所呈现的问题. 例 1 的评判问题在现实中很多, 比如医生在诊断某种疾病时, 其大脑中有一组诊断疾病因素, 但不同病人症状会不同, 可供医生诊断的因素组合不同, 这也会导致例 1 所呈现的问题. 再比如设备的故障诊断也是如此, 虽然可供考虑的诊断因素总体不变, 但设备在不同时刻呈现给诊断专家的表现因素会不相同, 这也导致了例 1 所呈现的问题.

在上面所给的例子中, 评判所依赖的因素只是全部相关因素的一部分. 另外, 还会遇到如下情况: 评判者只希望看到某种或几种因素组合下的评判结果, 此时所面临的问题跟例 1 所呈现的评判问题一样. 在评判因素并非完全的情形下, 如何确定权重分配、构建评判矩阵以适应评判需要, 成为研究的核心问题.

自适应 MLCE 模型是对其传统模型的改进与拓展, 后者是前者在因素集固定时的特殊情形.

本研究所做的主要工作有如下 3 点: 1) 提出了自适应 MLCE 问题; 2) 提出了因素缺失时的权重转移机制与评判矩阵重构机制; 3) 建立了自适应 MLCE 模型.

1 预备知识

CE 模型分单层和多层 2 种形式, 单层模型适用于评判因素较少且所有评判因素处于同一层的评判问题; 多层模型适用于评判因素多且分层的复杂评判

问题. 后文中, $F(X)$ 代表论域 X 的模糊幂集合.

1.1 单层 CE

该模型由如下 4 部分构成:

1) $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是所有评判因素的集合, n 为评判因素个数;

2) $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ 是所有评语(等级)的集合, m 为评语个数;

3) 评判矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times m}$, $r_{ij} \in [0, 1]$ 为通过 v_i 评判被评判对象对等级 u_j 的隶属度, 矩阵的第 i 行 $(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im})$ 称为 v_i 的单因素评判;

4) 权重向量 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in F(U)$, 表征各个评判因素的重要性程度, w_i 是评判因素 v_i 的权重, 满足 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

评判问题 (V, U, W, R) 的评判结果 $B \in F(U)$, 可通过合成算子“ $\circ$ ”得到, 即评判向量

$$B = W \circ R = (b_1, b_2, \dots, b_m),$$

式中 b_j 表示被评判对象对评判等级 u_j 的隶属度.

“ $\circ$ ”是算子的组合, 常见的有 $M(\wedge, \vee)$ 、 $M(\cdot, \vee)$ 、 $M(\cdot, +)$, 其中“ $\wedge$ ”“ $\vee$ ”分别为取下确界和上确界运算. 对应这 3 组合成算子, 评判结果求解规则分别为 $b_j = \bigvee_{i=1}^n (w_i \wedge r_{ij})$ 、 $b_j = \bigvee_{i=1}^n (w_i \cdot r_{ij})$ 和 $b_j = \sum_{i=1}^n (w_i \cdot r_{ij})$. 实际应用中, 可根据需求选择算子. 本文使用加权平均算子 $M(\cdot, +)$.

评判的清晰化是依据评判向量

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

给出, 常用最大隶属原则. 若

$$b_k = \max \{b_1, b_2, \dots, b_m\},$$

则将 u_k 判定为最终评判结果, 即将评语 u_k 赋予评判对象.

1.2 多层 CE

MLCE 模型因素集被划分为多个子因素集, 分层进行组织, 用一棵有根树表示该因素层级结构: 记根节点为 v_0 (深度为 0); 任一内部因素节点记作

$$v_s \stackrel{\text{def}}{=} v_{i_1, \dots, i_h},$$

其深度为 h , 其子因素节点为

$$\{v_{i_1, \dots, i_h, k} | k = 1, 2, \dots, n_{i_1, \dots, i_h}\},$$

其中 $n_{i_1, \dots, i_h}$ 为该节点的子因素个数.

MLCE 模型评语(等级)集为 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

对任一内部节点 v_s , 记其子节点个数为 n_s , 将其各子节点 $\{v_{s,1}, v_{s,2}, \dots, v_{s,n_s}\}$ 的单因素评判向量作为行, 构成局部评判矩阵, 即

$$\mathbf{R}_s = [\mathbf{B}_{s,1}, \mathbf{B}_{s,2}, \dots, \mathbf{B}_{s,n_s}]^T \in \mathbf{R}^{n_s \times m}, \quad (1)$$

式中第 k 行 $\mathbf{B}_{s,k} = (b_{s,k,1}, b_{s,k,2}, \dots, b_{s,k,m})$, 描述子节点 $v_{s,k}$ 对评语集 U 的隶属度分布. 令该节点的局部权重向量为

$$\mathbf{W}_s = (w_{s,1}, w_{s,2}, \dots, w_{s,n_s}),$$

$$\sum_{k=1}^{n_s} w_{s,k} = 1.$$

节点 v_s 的 CE 向量定义为

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{W}_s \circ \mathbf{R}_s.$$

最底层叶节点 $\mathbf{B}_0$ 由原始观测隶属度直接赋值; 自底向上递推, 最终得到被评判对象的 CE 向量

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{W}_0 \circ \mathbf{R}_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbf{R}^{1 \times m}.$$

记根的第 1 层子节点为 v_{0i} , $i = 1, 2, \dots, n_0$.

以 2 层 CE 为例, 上述 CE 模型可描述为如下 2 步.

步骤 1 构建第 1 层 CE 问题 $(V_1, U, \mathbf{W}_1, \mathbf{R}_1)$, 其中

$$V_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n_1}\}, i = 1, 2, \dots, n_1,$$

权重向量 $\mathbf{W}_1$ 的维度为 n_1 , 评判矩阵 $\mathbf{R}_1$ 的维度为 $n_1 \times m$, 评判向量为

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{W}_1 \circ \mathbf{R}_1 = (b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,m}).$$

步骤 2 构建第 2 层 CE 问题 $(V_0, U, \mathbf{W}_0, \mathbf{R}_0)$, 其中

$$V_0 = \{v_{0,1}, v_{0,2}, \dots, v_{0,n_0}\}, i = 1, 2, \dots, n_0.$$

将 $\mathbf{B}_1$ 作为因素 v_i 的单因素评判, 构建第 2 层 CE 问题评判矩阵, 即

$$\mathbf{R}_0 = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{n_0})^T,$$

权重向量 $\mathbf{W}_0$ 的维度为 n_0 , 评判矩阵 $\mathbf{R}_0$ 的维度为 $n_0 \times m$, 评判向量为

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{W}_0 \circ \mathbf{R}_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m).$$

若第 2 层中的因素仍包含较多子因素, 可进一步分层拓展至更多层的 MLCE 问题.

2 自适应多层 CE 的若干问题

自适应多层 CE (adaptive multi-layer CE, AMLCE) 旨在解决动态评判环境下评判因素集随情境变化而引起的评判失稳问题. 传统 MLCE 模型假定因素集结构固定、权重恒定, 但在实际应用中, 评判因素往往因情境、对象或数据可得性的差异而动态变化. AMLCE 模型通过引入可变因素集与权重重构机制, 实现模型在结构层次与参数权重上的灵活调整, 从而保证评判结果的连续性与合理性.

2.1 多层 CE 结构的单层化

为便于跨场景的一致评判, 本文将多层问题在形

式上等价转化为单层问题, 以便在此基础上刻画缺失叶节点的权重自适应转移. 后文讨论中, 假设评语集为 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, u_1 通常表示最优评判等级, u_m 通常表示最差评判等级.

为便于论述, 考虑如图 1 所示的一个多层 CE 问题 (其他结构的多层 CE 问题处理方法类似).

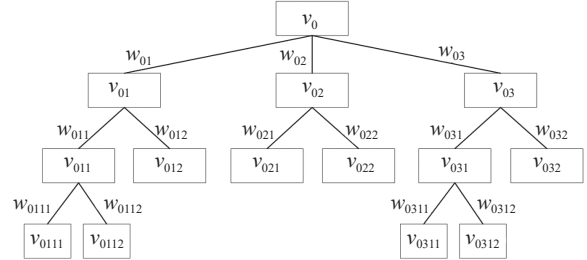


图 1 多层 CE

将多层 CE 问题转化为一个单层 CE $(V, U, \mathbf{W}, \mathbf{R})$ 问题, 其中 V 为最底层的评判因素集合, 称为叶节点集. 图 1 包含 8 个叶节点, 将它们重新编码, 即

$V \stackrel{\text{def}}{=} \{v_1, v_2, \dots, v_8\} = \{v_{0111}, v_{0112}, v_{012}, v_{021}, v_{022}, v_{0311}, v_{0312}, v_{032}\}$. 权重向量为

$$\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_8),$$

式中 w_k 表示 $v_k = v_{0,i_1, \dots, i_h}$ 相对于 v_0 的全局权重, 可由路径上的各级局部权重连乘

$$w_k = \prod_{k=1}^h w_{0,i_1, \dots, i_h}$$

得到. 例如 $v_2 = v_{0112}$ 相对于 v_0 的权重 w_2 可表示为

$$w_2 = w_{01} \cdot w_{011} \cdot w_{0112}.$$

评判矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{8 \times m}$ 定义为

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{81} & r_{82} & \cdots & r_{8m} \end{pmatrix},$$

式中: r_{ij} 是由 v_i 评判时被评判对象对等级 u_j 的隶属度, $i = 1, 2, \dots, 8$; $j = 1, 2, \dots, m$; $\mathbf{B}_i$ 是 v_i 的评判向量.

2.2 节点距离

给定如下 2 个叶节点

$$v_s = v_{0,i_1, \dots, i_d}, \quad v_t = v_{0,j_1, \dots, j_b},$$

它们的最长公共前缀长度为

$$\text{lcp}(v_s, v_t) = \max \{l | (0, i_1, \dots, i_l) = (0, j_1, \dots, j_l)\},$$

例如 $\text{lcp}(v_{0111}, v_{012}) = 2$, 因为二者下标序列的前 2 位 01 相同.

基于 $\text{lcp}(v_s, v_t)$, 可以采用如下方式定义 v_s 和 v_t 的结构距离.

$$d(v_s, v_t) = |v_s| + |v_t| - 2 \cdot \text{lcp}(v_s, v_t), \quad (2)$$

式中: $|v_s| = |v_{0,i_1, \dots, i_k}| = a$, 表示 v_s 在层级结构树中的深度(从 v_0 往下的边数); $|v_t| = |v_{0,j_1, \dots, j_b}| = b$ 含义类似。

直观地理解, $d(v_s, v_t)$ 是从 v_s 到达 v_t 的最短路径边数, 即先向上走 $|v_s| - \text{lcp}(v_s, v_t)$ 条边, 至最近公共节点, 再往下走 $|v_t| - \text{lcp}(v_s, v_t)$ 条边。

在该定义中, 认为每条边等权. 若需对不同的相邻层赋予不同权重(如更强调上层差异、弱化下层差异), 可在式(2)的 2 段路径上分别加上相应层权, 得到加权结构距离, 此处不再赘述。

此外, 为描述层差约束, 定义 v_s 、 v_t 的层距函数为

$$\kappa(v_s, v_t) = \text{abs}(|v_s| - |v_t|), \quad (3)$$

例如 $f(v_{0111}, v_{012}) = |3 - 2| = 1$ 。

层距函数用于限定可转移邻域, 如仅允许 $\kappa(v_s, v_t) \leq c$ 的近层之间进行权重转移。

2.3 AMLCE

在自适应情形下, 部分叶节点会因各种原因出现观测缺失. 典型场景如高校教师科研绩效评判: 不同学科的产出类型与评判因素差异显著, 理工学科侧重论文、项目经费与专利, 人文社科更注重著作、教学成果与社会服务。

实际评估中: 有些评判因素虽在个别对象处缺失, 但可由同层或近层的相关评判因素合理补偿并在邻域内转移权重; 另一些核心评判因素(如科研诚信、教学质量)属于必备项, 一旦缺失不可替代, 应保留其原有权重并在 CE 中按最差等级评判. 若仍采用固定不变的因素集, 易造成对象间可比性不足, 因此需在叶节点实施自适应权重转移与评判矩阵重构, 以实现对多样化因素结构的统一评估。

记叶节点集合(即最底层评判因素集)为 V , 可将其划分为可用节点集 $\hat{V}$ 和缺失节点集 $\bar{V}$ 2 类: $\hat{V}$ 包含具有评判向量(观测)的叶节点; $\bar{V}$ 包含缺失评判向量(观测)的节点; $V = \bar{V} \cup \hat{V}$ 。

为区分缺失项是否允许在邻域内转移权重, 对每个 $v_s \in \bar{V}$ 均赋予 1 个可转移因子 $\tau_s \in [0, 1]$. 据此将 v_s 的原始全局权重 w_s 分解为可转移权重部分

$$\bar{w}_s = \tau_s w_s \in [0, w_s] \quad (4)$$

和不可转移权重部分

$$\tilde{w}_s = (1 - \tau_s) w_s,$$

式中: $\tau_k = 1$ 表示该评判因素不是必备的, 其权重可完全转移; $\tau_k = 0$ 表示该评判因素是必备项, 其权重不可转移, 赋予该项最差的评判等级, 即将该项的评判向量记为 $B_k = (0, 0, \dots, 1)$ 。

AMLCE 的任务: 给定 $\bar{V}$ 、 $\hat{V}$ 、 $\{\tau_s\}$, 针对 $\bar{V}$ 中的叶节点执行可转移权重部分的再分配, 并据此重新构建权重向量, 最终完成与(由多层问题转化而来的)单层问题一致的 CE; 若 $\bar{V} = \emptyset$, 或者 $\tau_s = 0, (s = 1, 2, \dots, 8)$, 则 AMLCE 问题退化为常规 MLCE 问题。

3 缺失节点的权重转移机制

本文提出 2 种缺失叶节点的权重转移方案(分别称为方案 A 和 B). 需要强调的是, 在相同邻域、核函数与先验权重比例的设定下, 方案 B 的最优闭式解与方案 A 的结果一致, 说明本文所给出的权重转移是合理的。

为论述方便, 仍以图 1 所示的多层 CE 问题为例, 并在单层化视角下讨论。

设叶节点集合为 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$, 有观测的叶节点集为 $\hat{V} \subseteq V$, 观测缺失叶节点集为 $\bar{V} = V \setminus \hat{V}$. 原始全局权重向量记为

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_8),$$

$$\sum_{k \in L} w_k = 1.$$

3.1 方案 A: 基于固定层距与相似度核的权重转移

对 $v_s \in \bar{V}$, 其可转移因子 $\tau_s \in [0, 1]$, 可转移权重部分为 $\bar{w}_s = \tau_s w_s \in [0, w_s]$, $\bar{w}_s$ 只在层距允许阈值 $\leq c$ 的邻域

$$\mathcal{N}_c(v_s) = \{k \in \{1, 2, \dots, 8\} | \kappa(v_s, v_k) \leq c\} \quad (5)$$

内进行分配. 式中层距函数 $\kappa(v_s, v_k)$ 由式(3)定义, 不可转移权重 $\tilde{w}_s$ 不参与分配。

一个自然的想法是, 与缺失节点 v_s 距离较近的节点应获得较多权重; 同时, 待转移权重应按照可分配节点的先验权重比例分配(即原来权重大的节点应该得到更多的转移权重). 为体现“近者影响大于先验比例”的思想, 引入关于距离 $d(v_s, v_t)$ 单调不增的相似度核 $K(d)$, 即

$$K(d) = \exp(-\beta d), \quad (6)$$

并将先验权重比例直接取为当前可用权重 w_k 的比例, 将 2 方面影响相乘, 得到从 v_s 指向 v_t 的分配比例, 即

$$\pi(v_s, v_t) = \begin{cases} \frac{K(d(v_s, v_t)) \cdot w_t}{\sum_{k \in \mathcal{N}_c(v_s)} K(d(v_s, v_k)) \cdot w_k}, & v_t \in \mathcal{N}_c(v_s), \\ 0, & v_t \notin \mathcal{N}_c(v_s). \end{cases}$$

当 $\mathcal{N}_c(v_s) = \emptyset$ 时, 约定 v_s 不执行转移. 于是节点 v_s 的可转移权重在邻域内的实际转移量为

$$x'_{st} = \bar{w}_s \cdot \pi(v_s, v_t) = \bar{w}_s \cdot \frac{K(d(v_s, v_t)) \cdot w_t}{\sum_{k \in N_c(v_s)} K(d(v_s, v_k)) \cdot w_k}. \quad (7)$$

在方案 A 下, 节点 v_t 的权重更新为

$$\hat{w}_t = \begin{cases} w_t + \sum_{v_i \in \bar{V}} x'_{st}, & v_t \in \bar{V}, \\ w_t - \bar{w}_s, & v_t \in \bar{V}. \end{cases} \quad (8)$$

可见, 缺失项可转移权重 $\bar{w}_s$ 被转移到允许邻域内的可用节点, 同时该缺失项仍然保留的权重为 $w_s - \bar{w}_s$. 再用 $\hat{W} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_8)$ 进行单层合成 $B = \hat{W} \circ R$.

该调整方案满足如下 3 个性质.

1) 权重归一. 多层问题转化为单层后, 调整之后的权重保持归一, 即

$$\begin{aligned} \sum_{v_i \in V} \hat{w}_i &= \sum_{v_i \in \bar{V}} \left(w_i + \sum_{v_j \in \bar{V}} \bar{w}_s \cdot \pi(v_s, v_j) \right) + \sum_{v_i \in \bar{V}} (w_i - \bar{w}_s) = \\ &= \sum_{v_i \in V} w_i + \sum_{v_i \in \bar{V}} \sum_{v_j \in \bar{V}} \bar{w}_s \cdot \pi(v_s, v_j) - \sum_{v_i \in \bar{V}} \bar{w}_s = \\ &= \sum_{v_i \in V} w_i + \sum_{v_i \in \bar{V}} \bar{w}_s - \sum_{v_i \in \bar{V}} \bar{w}_s = \sum_{v_i \in V} w_i = 1. \end{aligned}$$

2) 必备项缺失惩罚. 若 $v_s \in \bar{V}$ 是必备项且缺失, 则整体评判将得到惩罚. 因为转移系数 $\tau_s = 0$, 由式(4)和(8)可知权重转移之后 $\hat{w}_s = w_s$, 其单因素评判 B_s 按最差评判等级计入合成.

3) 转移与距离正相关. 由于 $K(d)$ 单调不减, 如果 $d(v_s, v_{t_1}) \leq d(v_s, v_{t_2})$, 则 $\pi(v_{t_1}, v_s) \geq \pi(v_{t_2}, v_s)$, 表明先验权重相等时, 距离越近的节点, 得到的转移权重越多, 这符合直觉.

3.2 方案 B: 基于优化模型的权重转移

通过优化寻找合理权重转移方案, 先选择决策变量, 然后根据决策变量设计目标函数, 进而求解优化问题.

3.2.1 决策变量

考虑缺失节点 v_s , 其可转移权重为 $\bar{w}_s$, 记从 v_s 转移到 v_t 的权重为 $x_{st} \geq 0$. $x_{st} > 0$ 当且仅当 $v_t \in N_c(v_s)$. 以 x_{st} 为决策变量, 显然 x_{st} 应该满足

$$\sum_{k \in N_c(v_s)} x_{sk} = \bar{w}_s, \forall s \in \bar{V}, x_{sk} = 0, \forall k \notin N_c(v_s). \quad (9)$$

3.2.2 目标函数

权重转移应当满足如下 2 个要求.

1) 新增权重应成比例. x_{st} 占可转移权重 $\bar{w}_s$ 的比例 p_{st} 应等于 v_t 在 $N_c(v_s)$ 中的权重比例, 即

$$p_{st} = \frac{w_t}{\sum_{k \in N_c(v_s)} w_k}, t \in N_c(v_s). \quad (10)$$

2) 转移成本最小. 定义从 v_s 转移到 $v_t \in N_c(v_s)$ 的单位权重转移成本为

$$C_{st} = -\varepsilon \ln K(d(v_t, v_s)), \varepsilon > 0, \quad (11)$$

显然 $d(v_t, v_s)$ 越小, C_{st} 也越小.

综合考虑这 2 个要求, 确定合理的转移权重等价于求解如下优化问题, 即

$$\min_x \sum_{v_i \in \bar{V}} \sum_{t \in N_c(v_i)} C_{st} x_{st} + \varepsilon \sum_{v_i \in \bar{V}} \sum_{t \in N_c(v_i)} x_{st} \ln \frac{x_{st}}{\bar{w}_s p_{st}}, \quad (12)$$

式中: 第 1 项用来惩罚远距权重转移, 使权重转移优先发生在结构近邻; 第 2 项是熵正则项, 使得 $\bar{w}_s$ 尽可能按照比例 $p_{st} (v_t \in N_c(v_s))$ 分配给 v_t ,

$$x = \{x_{st} | v_s \in \bar{V}, t \in N_c(v_s)\}.$$

对于固定的 s , 设 v_t 获得 $\bar{w}_s$ 的比例为

$$\begin{aligned} \pi_{st} &= \frac{x_{st}}{\bar{w}_s}, \\ \sum_{t \in N_c(v_s)} \pi_{st} &= 1. \end{aligned}$$

于是熵正则项可转化为

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{t \in N_c(v_s)} x_{st} \left(\ln \frac{x_{st}}{\bar{w}_s p_{st}} - 1 \right) &= \varepsilon \cdot \bar{w}_s \sum_{t \in N_c(v_s)} \frac{x_{st}}{\bar{w}_s} \ln \frac{x_{st}}{\bar{w}_s p_{st}} = \\ &= \varepsilon \cdot \bar{w}_s \sum_{t \in N_c(v_s)} \pi_{st} \ln \frac{\pi_{st}}{p_{st}}, \end{aligned}$$

易见, 它是典型的相对熵正则项, 当且仅当 $\pi_{st} = p_{st}$ 时它取得最小值.

3.2.3 求解

在式(9)条件下求解目标函数式(12).

对于每个固定的 s , 构造拉格朗日函数

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{t \in N_c(v_s)} C_{st} x_{st} + \varepsilon \sum_{t \in N_c(v_s)} x_{st} \ln \frac{x_{st}}{\bar{w}_s p_{st}} + \mu_s \left(\sum_{t \in N_c(v_s)} x_{st} - \bar{w}_s \right) - \\ &\quad \sum_{t \in N_c(v_s)} \nu_{st} x_{sk}. \end{aligned}$$

对于 x_{st} 的一阶极值条件为

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{st}} = C_{st} + \varepsilon \left(\ln \frac{x_{st}}{\bar{w}_s p_{st}} + 1 \right) + \mu_s - \nu_{st},$$

若 $x_{sk} > 0$, 则 $\nu_{st} = 0$, 得

$$\ln \frac{x_{st}}{\bar{w}_s p_{st}} = -\frac{C_{st} + \mu_s}{\varepsilon} - 1,$$

所以

$$x_{st} = \bar{w}_s p_{st} \exp(-1) \exp\left(-\frac{C_{st} + \mu_s}{\varepsilon}\right). \quad (13)$$

由 $\sum_{k \in N_c(v_s)} x_{sk} = \bar{w}_s$ 可求出归一化参数

$$\exp(-1)\exp\left(-\frac{\mu_s}{\varepsilon}\right)\sum_{t\in N_c(v_s)}P_{st}\exp\left(-\frac{C_{st}}{\varepsilon}\right)=1.$$

将上式代入式(13)可得最优解(对所有 $t\in N_c(v_s)$)为

$$x_{st}^*=\overline{w}_s\frac{p_{sk}\exp\left(-\frac{C_{st}}{\varepsilon}\right)}{\sum_{k\in N_c(v_s)}p_{sk}\exp\left(-\frac{C_{sk}}{\varepsilon}\right)}.$$
 (14)

3.3 2 种方案的等价性

基于式(11)单位权重转移成本的表达式,可得到 $\exp\left(-\frac{C_{st}}{\varepsilon}\right)=K(d(v_t,v_s))$,代入式(14)得

$$x_{st}^*=\overline{w}_s\frac{p_{sk}K(d(v_t,v_s))}{\sum_{k\in N_c(v_s)}p_{sk}K(d(v_t,v_s))}.$$

进一步将式(10)中 p_{st} 的表达式代入,可得

$$x_{st}^*=\overline{w}_s\cdot\frac{K(d(v_t,v_s))\cdot w_t}{\sum_{k\in N_c(v_s)}K(d(v_k,v_s))\cdot w_k}.$$

不难看出,它与方案 A 中式(7)的分配方案一致,因此节点 v_t 的权重更新同式(8).

4 案例研究

4.1 问题描述

以高校教师科研绩效评价为例,展示 AMLCE 的应用.

不同学科在评判因素差异明显,除了项目经费,理工类强调论文与专利,人文社科更侧重著作.部分因素在个体上可能缺失但可转移(如人文学者的“专

利”);评语(等级)集为

$$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}=\{\text{好,较好,一般,较差,差}\}.$$

本评判体系以根节点 v_0 为总目标,其第 2 层(根的子节点)包含如下 2 项,即

$$\{v_{0,1},v_{0,2}\}=\{\text{科研,教学}\},$$

局部权重向量为

$$W_0=(0.5,0.5).$$

在第 1 层(最底层因素)中,科研模块($v_{0,1}$)的子节点为

$$\{v_{0,1,1},v_{0,1,2},v_{0,1,3},v_{0,1,4}\}=\{\text{论文,经费,专利,著作}\},$$

其局部权重向量为

$$W_{0,1}=(0.4,0.3,0.2,0.1),$$

其中“专利”与“著作”为可转移因素,设可转移因子集为

$$\{\tau_{0,1,1},\tau_{0,1,2},\tau_{0,1,3},\tau_{0,1,4}\}=\{0,0,1,1\}.$$

教学模块($v_{0,2}$)的子节点为

$$\{v_{0,2,1},v_{0,2,2},v_{0,2,3}\}=\{\text{课堂,课程建设,竞赛指导}\}.$$

其局部权重向量为

$$W_{0,2}=(0.60,0.25,0.15).$$

可转移因子为

$$\{\tau_{0,2,1},\tau_{0,2,2},\tau_{0,2,3}\}=\{0,0.5,0.2\}.$$

对最底层因素集重新命名为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_7\}$,某教师在这 7 个因素的隶属函数如表 1 所示,其中{著作,竞赛指导}缺失.

表 1 最底层因素隶属函数参数设置

评判因素	评语				
	好	较好	一般	较差	差
论文 (v_1)	0.25	0.50	0.25	0	0
经费 (v_2)	0.30	0.40	0.30	0	0
专利 (v_3)	0	0.25	0.50	0.25	0
著作 (v_4)	—	—	—	—	—
课堂 (v_5)	0.50	0.30	0.20	0	0
课程建设 (v_6)	0	0.20	0.40	0.30	0.10
竞赛指导 (v_7)	—	—	—	—	—

4.2 单层问题转化

采用 2.1 节的方法,将该多层问题转化为单层问题,建立最底层因素的 CE.

对最底层因素重新命名为

$$\{v_1,v_2,\cdots,v_7\}=\{v_{0,1,1},v_{0,1,2},v_{0,1,3},v_{0,1,4},v_{0,2,1},v_{0,2,2},v_{0,2,3}\},$$

权重向量为

$$W=(0.20,0.150,0.10,0.05,0.30,0.125,0.075),$$

$$\sum_k w_k=1.$$

著作(v_4)缺失但权重可完全转移($\tau_4=1$);竞赛指

导(v_7)缺失但仅部分可转移($\tau_7 = 0.2$), v_4 和 v_7 不可转移部分的隶属函数计入最不利的等级(0, 0, 0, 0, 1), 因此

$$\bar{V} = \{v_4, v_7\},$$

$$\tilde{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\},$$

$$\bar{w}_4 = 0.05, \tilde{w}_4 = 0,$$

$$\bar{w}_7 = 0.015, \tilde{w}_7 = 0.060.$$

4.3 参数设定

同模块(教学或者科研)内部节点的距离 $d = 2$, 跨模块节点之间的距离 $d = 4$, 即

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} 2, & \{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}, \text{ 或 } \{5, 6, 7\}, \\ 4, & \text{其他}. \end{cases}$$

在式(5)的邻域函数中取 $c = 4$, 有

$$N_c(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$N_c(v_7) = \{5, 6, 1, 2, 3\}.$$

核函数选择指数核, 以体现“近者多得”的衰减. 式(6)的相似度核函数及其相关参数分别为

$$\beta = 1,$$

$$K(2) = \exp(-2) \approx 0.1353,$$

$$K(4) = \exp(-4) \approx 0.0183.$$

这意味着跨模块影响约为同模块的 $K(4)/K(2) = \exp(-2) \approx 0.1353$ 倍, 远近差异得到量化.

4.4 权重转移

缺失源(v_s)的可转移份额 $\bar{w}_s$ 在其邻域内按“核 $\times$ 先验”的相对权重进行再分配; 先验可取为当前可用权重 w_k 的行内归一.

按照式(7)计算 v_4 、 v_7 的权重转移. 对于 v_4 , 权重转移结果分别为

$$x_{41}^* \approx 0.0197,$$

$$x_{42}^* \approx 0.0148,$$

$$x_{43}^* \approx 0.0099,$$

$$x_{45}^* \approx 0.0040,$$

$$x_{46}^* \approx 0.0017.$$

由于同模块的 v_1 、 v_2 、 v_3 和 v_4 的距离更近, 且本身的 w_1 、 w_2 、 w_3 和 w_4 也较大, 绝大部分权重被分配至“科研”模块; 少量跨模块分配体现了 $c = 4$ 的弱模块补偿.

对于 v_7 , 权重转移结果分别为

$$x_{75}^* \approx 0.0093,$$

$$x_{76}^* \approx 0.0039,$$

$$x_{71}^* \approx 0.0008,$$

$$x_{72}^* \approx 0.0006,$$

$$x_{73}^* \approx 0.0004.$$

同模块的 v_5 、 v_6 获得了绝大部分转移份额; 同时, 因 $c = 4$ 允许跨模块, 论文/经费/专利也得到极小比例补偿.

4.5 权重更新与CE

对可用节点累计收到的转移量, 扣除缺失节点可转移份额, 得到更新后的叶层全局权重向量为

$$\hat{W} = (0.2205, 0.1654, 0.1103, 0, 0.3133, 0.1305, 0.060),$$

$$\sum_k \hat{w}_k = 1,$$

式中: v_4 的权重转移为空; v_7 的残留权重0.060不参与再分配而直接在合成中以最差等级计分, v_7 的不可转移部分按最不利等级计分, 以体现“必备项缺失惩罚”.

按照式(8), 采用加权平均合成算子(单层合成), 用 $\hat{W}$ 与最底层评判矩阵 R (如表1所示), 得到该教师的CE为

$$B \approx (0.2614, 0.3241, 0.2748, 0.0667, 0.0731),$$

$b^2 = 0.3241$ 大, 对应等级“较好”; “好”和“一般”的隶属度分别约为0.2614与0.2748, 表明该教师整体处于“较好”到“一般”之间偏上.

5 结束语

在快速变化的现实中, 评判因素集通常随着对象与场景而动态变动, 常规MLCE难以直接应对. 为此, 本文提出AMLCE模型: 在保持多层语义的前提下, 将多层结构单层化表示, 结合“距离-邻域”约束与“可转移/不可转移”机制, 重构权重向量与评判矩阵; 同时给出2种权重转移实现路径——方案A(基于距离核的软比例分配)与方案B(基于熵正则的优化模型), 并在统一设定下证明二者的等价性. 实证算例表明, AMLCE能在因素缺失与结构异质的条件下, 稳定地给出可比、可解释的CE结果, 拓展了MLCE的应用边界.

当然, 本文仍有如下3方面的局限:

1) 权重调整当前主要依赖变化前的先验比例, 数据驱动的权重学习仍不充分;

2) 模型对层级结构与自底向上的递推关系作了理想化假设, 尚未系统处理复杂现实中的跨层/跨项耦合与非线性关联;

3)核函数、衰减系数 β 与邻域半径 c 的选取缺乏统一的自适应准则。

未来工作将从如下 3 方面推进:

1)引入机器学习/因果与深度表征,利用历史数据学习权重与相似度(含不确定性量化),形成数据驱动的自适应策略;

2)借助复杂网络与图模型刻画因素间多尺度关联,完善层级-网络——一体化的评判结构;

3)建立参数自动校准机制,完善理论证明,如结果的一致性、稳定性,并在方案 B 中设计更加丰富的优化目标,以完善复杂环境 CE。

6 参考文献

- [1] 汪培庄. 模糊数学简介(Ⅱ)[J]. 数学的实践与认识, 1980, 10(3): 52
- [2] 陈永义, 刘云丰, 汪培庄. 综合评判的数学模型[J]. 模糊数学, 1983(1): 61
- [3] 王少豪, 高森. 矿区钻探难易程度综合评判的模糊数学方法[J]. 地质与勘探, 1982, 18(12): 59
- [4] 潘君拯. 模糊数学用于教学质量评判[J]. 江苏工学院学报, 1982, 3(4): 1
- [5] 高素华. 模糊综合评判分析农业气候条件[J]. 数学的实践与认识, 1982, 12(1): 4
- [6] 黄开烈, 赵松. 试析中医临床的辩证思维方法: 综合评判[J]. 贵阳师院学报(社会科学版), 1983(4): 61
- [7] 张铁明. 模糊数学在教学工作质量量化及其综合评判中的应用探讨[J]. 华东师范大学学报(教育科学版), 1984, 2(4): 71
- [8] 沈健, 沙丹. 教学水平的一个综合评判方法[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 1984, 13(4): 31
- [9] 傅雁鹏, 高嘉瑞. 地下水污染模糊综合评判原理及隶属度确定法[J]. 水文地质工程地质, 1986, 13(6): 29
- [10] Feng S, Xu L D. Decision support for fuzzy comprehensive evaluation of urban development[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, 105(1): 1
- [11] Kuo Y F, Chen P C. Selection of mobile value-added services for system operators using fuzzy synthetic evaluation[J]. *Expert Systems with Applications*, 2006, 30(4): 612
- [12] Wei X, Luo X F, Li Q, et al. Online comment-based hotel quality automatic assessment using improved fuzzy comprehensive evaluation and fuzzy cognitive map[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2015, 23(1): 72
- [13] Liang D C, Dai Z Y, Wang M W. Assessing customer satisfaction of O2O takeaway based on online reviews by integrating fuzzy comprehensive evaluation with AHP and probabilistic linguistic term sets[J]. *Applied Soft Computing*, 2021, 98: 106847
- [14] 夏玉成, 徐凤银. 灰色关联分析在模糊综合评判中的应用[J]. 西安矿业学院学报, 1991, 11(1): 44
- [15] 余群英. 多种综合评判方法的分析与比较[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 1992, 10(3): 18
- [16] 梅绍祖, 丁立言. “变权综合”在模糊综合评判中的应用[J]. 钢铁, 1994, 29(9): 77
- [17] 李洪兴, 汪培庄. 关于综合评判的几点注记[J]. 天津纺织工学院学报, 1987, 6(1): 26
- [18] 杨纶标. 广义 Fuzzy 运算及其在人才决策中的应用[J]. 华南工学院学报, 1985, 13(3): 129
- [19] 刘覃石. 综合评判的 Fuzzy 积分方法[J]. 韶关师专学报, 1988, 9(2): 48
- [20] 曾文艺, 罗承忠. 综合决策模型的一种改进方法[J]. *北京师范大学学报(自然科学版)*, 1994, 30(4): 431
- [21] 吕杰能, 张世强, 蒋峥, 等. 关于模糊综合评判标准的一点注记[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(20): 172
- [22] 汪培庄. 模糊集与随机集落影[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985
- [23] 李盛德. 关于变权综合评判的探讨[J]. 大连水产学院学报, 1993, 8(4): 89
- [24] 汪培庄, 李洪兴. 知识表示的数学理论[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1994
- [25] 刘文奇. 均衡函数及其在变权综合中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(4): 58
- [26] 苗壮, 徐俊彦, 王寒菊. 部分变权综合评判模型研究[J]. 预测, 1997, 16(4): 51
- [27] 桂丹萍, 李德清, 曾文艺. 几何变权综合决策模型及其在多因素决策中的应用[J]. 模糊系统与数学, 2023, 37(3): 168
- [28] 张连文, 汪培庄. 基于信度理论的综合评判模型[J]. 系统工程学报, 1986, 1(1): 63
- [29] 高敬振. 灰色综合评判的数学模型[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 14(12): 56
- [30] 张兴芳, 管恩瑞, 孟广武. 区间值模糊综合评判及其应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2001, 21(12): 81
- [31] 王洪英. 基于区间值模糊集的综合评判[D]. 济南: 山东大学, 2005
- [32] 贾飒飒, 廖江, 周直. 可拓综合评判模型在工程风险评价中的应用[J]. 重庆交通学院学报, 2006, 25(2): 125
- [33] 姜军, 宋保维, 潘光, 等. 基于集对分析的模糊综合评判[J]. 西北工业大学学报, 2007, 25(3): 421
- [34] 杨艳生. 多层次二型模糊(Fuzzy)综合评判在土壤侵蚀研究中的应用[J]. 土壤, 1986, 18(2): 101
- [35] 卜广志, 张宇文. 基于灰色模糊关系的灰色模糊综合评判[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(4): 141
- [36] 张晓平. 基于 Vague 集的模糊综合评判模型[J]. 山东建筑工程学院学报, 2004, 19(3): 77
- [37] 尚玉莲, 朱鹏飞, 刘秀芳. 基于 2 型模糊集的综合评判

- 判[J]. 山东建筑工程学院学报, 2004, 19(3): 81
- [38] 常海滨. 基于直觉模糊综合评判的网络流量预测方法[J]. 微型电脑应用, 2017, 33(5): 41
- [39] 苏哲斌, 陈广锋. 基于三角形区间二型模糊数的综合评价模型[J]. 模糊系统与数学, 2021, 35(3): 116
- [40] 姚敏. 一种改进的模糊综合评判法[J]. 软科学研究, 1990(1): 30
- [41] 姚敏. 最大关联隶属原则及其应用[J]. 控制与决策, 1991, 6(4): 283
- [42] 罗承忠, 于福生, 曾文艺. 模糊集引论: 上册[M]. 3版. 北京: 北京师范大学出版社, 2019
- [43] 汪培庄, 李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机[M]. 北京: 科学出版社, 1996
- [44] 罗承忠, 于福生. 诊断识别问题的数学模型和专家系统开发工具[J]. 模糊系统与数学, 1992, 6(2): 20
- [45] Xu X Y, Yu F S, Pedrycz W, et al. Multi-source fuzzy comprehensive evaluation[J]. Applied Soft Computing, 2023, 135: 110042

Adaptive multi-layer comprehensive evaluation

Jia Bo¹⁾, Yu Fusheng²⁾, Yang Fei²⁾, Qiu Shumao¹⁾, Yuan Xiaoman²⁾, Xu Jinfan²⁾

(1) The Aviation Industry Corporation of China, Company Limited, Beijing, China;

2) School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, China)

Abstract A fixed set of evaluation factors makes the multi-layer comprehensive evaluation (CE) model difficult to use when the set of evaluation factors changes with different objects to be evaluated. To solve this problem, in this paper an adaptive multi-layer comprehensive evaluation (AMLCE) model is proposed to solve the limitation of constant set of evaluation factors. This new model enables dynamic CE to facilitate CE with changing evaluation factors. In the proposed model, the cross-layer weight transfer mechanism based on factor distance and similarity kernel is given, and the corresponding weight transfer scheme is designed. To illustrate the rationality, a weight transfer scheme is designed based on entropy regular optimization, and the equivalence of the two schemes under identical settings is proved. CE experiments on typical cases verify effectiveness of the proposed model for AMLCE.

Keywords multi-layer comprehensive evaluation; adaptive multi-layer comprehensive evaluation; evaluation factor set; evaluation matrix; weight vector

【责任编辑: 陆有忠】