doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023294

非齐度量测度空间上广义分数次积分的加权弱估计

田玉凤，陶双平
（西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070）

摘要：设$(\mathcal{X},d,\mu)$为满足上双倍条件和几何双倍条件的非齐度量测度空间，T_α为$(\mathcal{X},d,\mu)$上的广义分数次积分算子. 通过建立 sharp 极大函数的点态不等式，得到T_α是从加权Lebesgue空间$L^p(\omega)$到加权弱 Lebesgue 空间$L^{p,\infty}(\omega)$上有界的，并且也是从加权 Morrey 空间$L^{p,\kappa,\eta}(\omega)$到加权弱 Morrey 空间$WL^{p,\kappa,\eta}(\omega)$上有界的.

关键词：广义分数次积分；加权弱估计；加权 Morrey 空间；非齐度量测度空间
中图分类号：O174.2 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)03-0573-13

Weighted Weak Estimates for Generalized Fractional Integral on Non-homogeneous Metric Measure Spaces

TIAN Yufeng, TAO Shuangping
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: Let $(\mathcal{X},d,\mu)$ be a non-homogeneous metric measure space which satisfies the upper doubling and geometrically doubling conditions, and T_α be the generalized fractional integral operator on $(\mathcal{X},d,\mu)$. By establishing pointwise inequality of sharp maximum function, we obtain that T_α is bounded from the weighted Lebesgue space $L^p(\omega)$ to the weighted weak Lebesgue space $WL^{p,\infty}(\omega)$, and also from the weighted Morrey space $L^{p,\kappa,\eta}(\omega)$ to the weighted weak Morrey space $WL^{p,\kappa,\eta}(\omega)$.

Keywords: generalized fractional integral; weighted weak estimate; weighted Morrey space; non-homogeneous metric measure space

1 引言及预备知识

满足多项式增长条件的非双倍测度空间[1-2]和 Coifman-Weiss 意义下的齐次空间[3]是两类重要的度量测度空间. 为统一齐型空间和非双倍测度空间，Hytönen[4]引入了一类新的度量测度空间，即非齐度量测度空间，该空间满足上双倍和几何双倍条件.

定义 1[4] 设$(\mathcal{X},d,\mu)$是一个度量测度空间，$\mathcal{X}$上的 Borel 测度μ满足：存在一个控制函数$\lambda:\mathcal{X}\times(0,\infty)\to(0,\infty)$及一个正常数$C_\lambda$，使得对于每个$x\in\mathcal{X}$，$r\to\lambda(x,r)$单调递增，且对所有的$x\in\mathcal{X}$和$r\in(0,\infty)$，有

收稿日期：2023-07-13. **网络首发日期**：2024-03-07.

第一作者简介：田玉凤(1998—)，女，汉族，硕士研究生，从事调和分析的研究，E-mail：tianyufeng0311@163.com. **通信作者简介**：陶双平(1964—)，男，汉族，博士，教授，博士生导师，从事调和分析及其应用的研究，E-mail：taosp@nwnu.edu.cn.

基金项目：国家自然科学基金(批准号：12201500).
网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240301.1702.001.

$$\mu(B(x,r))\leqslant\lambda(x,r)\leqslant C_{\lambda}\lambda\left(x,\frac{r}{2}\right),\tag{1}$$

则称测度 μ 满足上双倍条件.

定义 2[4] 设$(\mathcal{X},d)$是一个度量空间，存在正整数 N_0，使得对所有的球 $B(x,r)\subset\mathcal{X}$，均存在 $B(x,r)$的一个有限球覆盖$\left\{B\left(x_i,\frac{r}{2}\right)\right\}_i$，使得覆盖球的基数至多为 N_0，则称$(\mathcal{X},d)$满足几何双倍条件.

满足上双倍条件和几何双倍条件的度量测度空间统称为非齐度量测度空间，简记为$(\mathcal{X},d,\mu)$.

注 1 1) 易见，当控制函数$\lambda(x,r)=\mu(B(x,r))$时，非齐度量测度空间$(\mathcal{X},d,\mu)$是 Coifman-Weiss 意义下的齐次空间；当控制函数$\lambda(x,r)=C_0r^n$时，非齐度量测度空间$(\mathbb{R}^d,|\cdot|,\mu)$是满足多项式增长条件 $\mu(B(x,r))\leqslant C_0r^n$ 的非双倍测度空间；

2) 设$(\mathcal{X},d,\mu)$为非齐度量测度空间，Hytönen[4]得到几何双倍条件等价于对每个 $\epsilon\in(0,1)$，任意球 $B(x,r)\subset\mathcal{X}$，$x\in\mathcal{X}$，$r\in(0,\infty)$包含于基数最多为 $N_0\epsilon^{-n_0}$的互不相交的球$\{B(x_i,\epsilon r)\}_i$，本文中 N_0 为定义 2 中所定义，$n_0=\log_2N_0$；

3) 设$(\mathcal{X},d,\mu)$为非齐度量测度空间，Hytönen 等[5]得出存在另一个控制函数 $\tilde{\lambda}$，使得 $\tilde{\lambda}\leqslant\lambda$，$C_{\tilde{\lambda}}\leqslant C_{\lambda}$，且对任意的 $x,y\in\mathcal{X}$，$d(x,y)\leqslant r$，有

$$\tilde{\lambda}(x,r)\leqslant C_{\tilde{\lambda}}\tilde{\lambda}(y,r).\tag{2}$$

本文总假设控制函数 λ 满足式(1)，(2)，且对任意的 $x\in\mathcal{X}$，$r\in(0,\infty)$，有 $\lambda(x,r)<\infty$. 由此及式(1)得，对于球 $B(x,r)\subset\mathcal{X}$，满足 $r\in(0,\infty)$，有 $\mu(B(x,r))<\infty$.

定义 3[6] 设 $\alpha\in(0,1)$，函数 $K_{\alpha}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X}\times\mathcal{X}\setminus\{(x,y):x=y\})$，若存在一个依赖于 K_{α} 的正常数 $C_{K_{\alpha}}$，使得：

1) 对任意的 $x,y\in\mathcal{X}$，$x\neq y$，有

$$|K_{\alpha}(x,y)|\leqslant C_{K_{\alpha}(x,y)}\frac{1}{[\lambda(x,d(x,y))]^{1-\alpha}};\tag{3}$$

2) 存在正常数 $\delta\in(0,1]$，$c_{K_{\alpha}}\in(0,\infty)$，使得对任意的 $x,x',y\in\mathcal{X}$，$d(x,y)\geqslant c_{K_{\alpha}}d(x,x')$，有

$$|K_{\alpha}(x,y)-K_{\alpha}(x',y)|+|K_{\alpha}(y,x)-K_{\alpha}(y,x')|\leqslant C_{K_{\alpha}}\frac{[d(x,x')]^{\delta}}{[d(x,y)]^{\delta}[\lambda(x,d(x,y))]^{1-\alpha}}.\tag{4}$$

则称 K_{α} 为广义分数次积分核.

记 $L^{\infty}_b(\mu)=\{f:f\in L^{\infty}(\mu)$，具有有界支集$\}$. 设 K_{α} 为广义分数次积分核，对任意的 $f\in L^{\infty}_b(\mu)$，$x\notin\operatorname{supp}f$，广义分数次积分定义[6]为

$$T_{\alpha}(f)(x):=\int_{\mathcal{X}}K_{\alpha}(x,y)f(y)\mathrm{d}\mu(y).\tag{5}$$

注 2 如果 $K_{\alpha}(x,y)$满足式(3)，则 Hörmander 型条件成立，即存在一个正常数 C，使得对任意的 $y,y'\in\mathcal{X}$，有

$$\int_{d(x,y)\geqslant c_{K_{\alpha}}d(y,y')}(|K_{\alpha}(x,y)-K_{\alpha}(x,y')|+|K_{\alpha}(y,x)-K_{\alpha}(y',x)|)\frac{1}{d(x,y)}\mathrm{d}\mu(x)\leqslant C.$$

广义分数次积分是调和分析的经典算子之一. 目前，关于广义分数次积分在非齐度量测度空间上的研究已有很多结果[6-17]. 例如：Fu 等[6]证明了非齐度量测度空间上广义分数次积分及其交换子的 L^p 有界性；Lu 等[7]得到了双线性分数次积分及其交换子在非齐度量测度空间上的有界性.

本文的目的是建立非齐度量测度空间$(\mathcal{X},d,\mu)$上广义分数次积分在加权 Lebesgue 空间和加权 Morrey 空间上的弱有界性. 用 c_B 和 r_B 分别表示球 B 的中心和半径，且对任意的 $\rho>0$，ρB 表示球 $B(c_B,\rho r_B)$；用 C 表示与主要参数无关的正常数；$Y\lesssim Z$ 表示存在一个正常数 C，使得 $Y\leqslant CZ$；$A\sim B$ 表示$A\lesssim B\lesssim A$；对于给定任意的 $q\in(1,\infty)$，$q':=\frac{q}{q-1}$ 表示 q 的共轭指标.

定义 4[18] 设 $\rho\in[1,\infty)$，$p\in(1,\infty)$，$p':=\frac{p}{p-1}$. 若存在一个正常数 C，使得对于所有球$B\subset\mathcal{X}$，有

$$\left(\frac{1}{\mu(\rho B)}\int_B \omega(x)\mathrm{d}\mu(x)\right)\left\{\frac{1}{\mu(\rho B)}\int_B [\omega(x)]^{1-p'}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{p-1}\leqslant C, \tag{6}$$

则称非负 μ-可测函数 ω 为 $A_p^\rho(\mu)$权. 若存在一个正常数 C，使得对于所有球 $B\subset\mathscr{X}$，有

$$\frac{1}{\mu(\rho B)}\int_B \omega(x)\mathrm{d}\mu(x)\lesssim \inf_{y\in B}\omega(y),$$

则称 ω 为 $A_1^\rho(\mu)$权，并记

$$A_\infty^\rho(\mu):=\bigcup_{p=1}^{\infty}A_p^\rho(\mu).$$

定义 5[19]　若非负 μ-可测函数 ω 满足：对任意的球 $B\subset\mathscr{X}$，有

$$\left\{\frac{1}{\mu(B)}\int_B [\omega(x)]^r\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/r}\lesssim\frac{1}{\mu(B)}\int_B\omega(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

则称权 ω 属于逆 Hölder 类 $RH_r(\mu)$，其中 $r\in(1,\infty)$.

定义 6(加权积分条件)[20]　若存在一个正常数 C_α，使得对于所有球 $B\subset\mathscr{X}$，有

$$\int_1^\infty\frac{1}{[\omega(sB)]^\alpha}\frac{\mathrm{d}s}{s}\leqslant\frac{C_\alpha}{[\omega(B)]^\alpha},$$

则称权 ω 满足加权积分条件.

注 3　加权积分条件等价于：对于 $\alpha\in(0,1)$，$\beta\in(1,\infty)$，存在一个正常数 $C_{\alpha,\beta}$，使得对于所有球 $B\subset\mathscr{X}$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{\omega(B)}{\omega(\beta^iB)}\right]^\alpha<C_{\alpha,\beta}. \tag{7}$$

定义 7[20]　设 $p\in[1,\infty)$，$\kappa\in(0,1)$，$\eta\in(1,\infty)$，ω 是一个权函数，加权 Morrey 空间定义为

$$L^{p,\kappa,\eta}(\omega):=\{f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\omega):\ \|f\|_{L^{p,\kappa,\eta}(\omega)}<\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{L^{p,\kappa,\eta}(\omega)}:=\sup_B\left[\frac{1}{\omega(\eta B)^\kappa}\int_B|f(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/p}; \tag{8}$$

加权弱 Morrey 空间 $WL^{p,\kappa,\eta}(\omega)$定义为

$$\|f\|_{WL^{p,\kappa,\eta}(\omega)}:=\sup_B\sup_{t>0}\frac{1}{\omega(\eta B)^{\kappa/p}}t\omega(\{x\in B:\ |f(x)|>t\})^{1/p}<\infty.$$

注 4　设 $p\in[1,\infty)$，$\kappa\in(0,1)$，Yan 等[20]研究表明，$\|\cdot\|_{L^{p,\kappa,\eta}(\omega)}$ 和 $\|\cdot\|_{WL^{p,\kappa,\eta}(\omega)}$ 与常数 $\eta\in(1,\infty)$ 的选取无关.

定义 8[4]　设 $\alpha,\beta\in(1,\infty)$，若球 $B\subset\mathscr{X}$满足 $\mu(\alpha B)\leqslant\beta\mu(B)$，则 B 称为(α,β)-倍球.

注 5　给定非齐度量测度空间$(\mathscr{X},d,\mu)$，对任意球 $B(x,r)\subset\mathscr{X}$，当 β 充分大时，存在 $j\in\mathbb{N}$，使得 α^jB 为(α,β)-倍球. 对于 a. e. $x\in\mathscr{X}$和 $r\in(0,\infty)$，存在以 x 为中心、$\alpha^{-j}r$ 为半径的最小(α,β)-倍球[4]. 记 $\nu=\log_2C_\lambda$，$n_0=\log_2N_0$，对于任意给定的 $\alpha\in(0,1)$和球 B，$\widetilde{B}^\alpha$ 表示 α^jB 的最小(α,β_α)-倍球，其中

$$\beta_\alpha:=\alpha^{3\max\{n_0,\nu\}}+[\max\{5\alpha,30\}]^{n_0}+[\max\{3\alpha,30\}]^\nu.$$

此外，对任意的 $\rho\in[1,\infty)$和球 B，$\widetilde{B}$ 表示$(30\rho)^jB$ 的最小$(30\rho,\beta_{30\rho})$-倍球[5].

定义 9[21]　设 $\rho\in(1,\infty)$，B,S 为 $\mathscr{X}$中的任意两个球，$B\subset S$，定义

$$\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho)}:=1+\sum_{k=-\lfloor\log_\rho2\rfloor}^{N_{B,S}^{(\rho)}}\frac{\mu(\rho^kB)}{\lambda(c_B,\rho^kr_B)},$$

其中 $N_{B,S}^{(\rho)}$是满足 $\rho^{N_{B,S}^{(\rho)}}r_B\geqslant r_S$ 的最小整数.

注 6　1) 由定义 9 和式(1)，可得

$$\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho)}\sim 1+\sum_{k=1}^{N_{B,S}^{(\rho)}+\lfloor\log_\rho2\rfloor+1}\frac{\mu(\rho^kB)}{\lambda(c_B,\rho^kr_B)};$$

2) Hytönen[4]引入了连续系数 $K_{B,S}$，对任意两个球 $B\subset S\subset\mathscr{X}$，有

$$K_{B,S}:=1+\int_{(2S)\setminus B}\frac{1}{\lambda(c_B,d(x,c_B))}\mathrm{d}\mu(x).$$

文献[5]证明了 $K_{B,S}$ 和 $\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho)}$ 具有相似的性质，但 $K_{B,S}$ 和 $\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho)}$ 通常不相等.

引理 1[22] 设 $\rho\in(1,\infty)$，则：

1) 对于所有球 $B\subset R\subset S$，有 $\widetilde{K}_{B,R}^{(\rho)}\leqslant C_\rho\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho)}$，$\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho)}\leqslant\widetilde{K}_{B,R}^{(\rho)}+c_{\rho,\nu}\widetilde{K}_{R,S}^{(\rho)}$；

2) 设 $\alpha\in[1,\infty)$，对于所有球 $B\subset S$ 满足 $r_S\leqslant\alpha r_B$，有 $\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho)}\leqslant C_{\alpha,\rho}$；

3) 对于所有球 B，有 $\widetilde{K}_{B,\widetilde{B}^\rho}^{(\rho)}\leqslant C_{\rho,\nu}$；

4) 设 $\rho_1,\rho_2\in(1,\infty)$，对于所有球 $B\subset S$，有 $c_{\rho_1,\rho_2,\nu}\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho_1)}\leqslant\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho_2)}\leqslant C_{\rho_1,\rho_2,\nu}\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho_1)}$.

Hu 等[18]首先在非齐度量测度空间$(\mathcal{X},d,\mu)$中定义了与 $K_{B,S}$ 相关的 John-Strömberg 型极大算子. 设 f 为 μ-可测函数，B 为 $\mathcal{X}$ 中的球，$\mu(B)\neq0$. 记

$$m_B(f)=\frac{1}{\mu(B)}\int_B f(x)\mathrm{d}\mu(x),\qquad m_f(B)=\inf_{a\in\mathbb{R}}m_B(|f-\alpha|),$$

则由文献[23]知，

$$\mu(\{x\in B:f(x)>m_f(B)\})\leqslant\frac{1}{2}\mu(B),\qquad\mu(\{x\in B:f(x)<m_f(B)\})\leqslant\frac{1}{2}\mu(B).$$

设 $s\in(0,1)$，$\sigma\in[1,\infty)$，$\rho\in[1,\infty)$. 对任意固定的球 B 和 μ-可测函数 f，当 $\mu(B)>0$ 时，定义

$$m_{0,s;B}^{\sigma,\rho}(f)=\inf\{t>0:\mu(\{y\in B:|f(y)|>t\})<s\mu(\sigma\rho B)\};$$

当 $\mu(B)=0$ 时，$m_{0,s;B}^{\sigma,\rho}(f)=0$.

John-Strömberg 型极大算子定义[18]为

$$M_{0,s}^{\sigma,\rho}(f)(x):=\sup_{\substack{x\in B,\\ B(30\rho,\beta_{30\rho})\text{-doubling}}}m_{0,s;B}^{\sigma,\rho}(f),\qquad x\in\mathcal{X};$$

相应的 John-Strömberg sharp 极大算子定义[18]为

$$M_{0,s}^{\sigma,\rho;\,\sharp}(f)(x):=\sup_{x\in B}m_{0,s;B}^{\sigma,\rho}(f-m_f(\widetilde{B}))+\sup_{\substack{x\in B\subset S,\\ B,S(30\rho,\beta_{30\rho})\text{-doubling}}}\frac{|m_f(B)-m_f(S)|}{\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho)}},\qquad x\in\mathcal{X}.$$

对于任意球 B，$x\in B$ 和任意 $\epsilon\in(0,\infty)$，有

$$\mu(\{y\in B:|f(y)-m_f(\widetilde{B})|>M_{0,s}^{\sigma,\rho;\,\sharp}(f)(x)+\epsilon\})<s\mu(\sigma\rho B).$$

$M_{0,s}^{\sigma,\rho}$ 和 $M_{0,s}^{\sigma,\rho;\,\sharp}$ 最早由 John[24]引进，Strömberg[25]和 Lerner[26]在经典欧氏空间上研究了这些算子的性质.

设 $\rho\in[1,\infty)$，$\eta,\sigma\in(1,\infty)$，$r\in(0,\infty)$. 对于任意 $f\in L_{\mathrm{loc}}^1(\mu)$，$x\in\mathcal{X}$，定义极大算子为

$$M_\eta(f)(x):=\sup_{x\in B}\frac{1}{\mu(\eta B)}\int_B|f(y)|\mathrm{d}\mu(y);\tag{9}$$

倍极大算子为

$$M^\rho(f)(x):=\sup_{\substack{x\in B,\\ B(30\rho,\beta_{30\rho})\text{-doubling}}}\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(y)|\mathrm{d}\mu(y);\tag{10}$$

sharp 极大算子为

$$M_r^{\sigma,\rho;\,\sharp}(f)(x):=\sup_{x\in B}\left(\frac{1}{\mu(\sigma\rho B)}\int_B|f(y)-m_f(\widetilde{B})|^r\mathrm{d}\mu(y)\right)^{1/r}+\sup_{\substack{x\in B\subset R,\\ B,R(30\rho,\beta_{30\rho})\text{-doubling}}}\frac{|m_f(B)-m_f(R)|}{\widetilde{K}_{B,R}^{(\rho)}}.$$

对于任意球 B，有

$$m_{0,s;B}^{\sigma,\rho}(f-m_f(\widetilde{B}))\leqslant s^{-1/r}\left(\frac{1}{\mu(\sigma\rho B)}\int_B|f(y)-m_f(\widetilde{B})|^r\mathrm{d}\mu(y)\right)^{1/r},$$

且对于任意 $x\in\mathcal{X}$，由文献[18]有

$$M_{0,s}^{\sigma,\rho,\,\sharp}(f)(x)\leqslant s^{-1/r}M_r^{\sigma,\rho;\,\sharp}(f)(x).\tag{11}$$

引理 2[18] 设 $\rho\in[1,\infty)$，$\sigma\in[1,30]$，$s_1\in(0,\beta_{30\rho}^{-1}/4)$，$p\in(0,\infty)$，且 $\omega\in A_\infty^\rho(\mu)\bigcap RH_r(\mu)$，

$r\in(1,\infty)$，则存在一个依赖于 s_1 和 ω 的常数 $C_1\in(0,1)$，使得对于任意 $s_2\in(0,C_1s_1)$，下列结论成立：

1) 若 $\mu(\mathscr{X})=\infty$，$f\in L^{p_0,\infty}(\mu)$满足 $p_0\in(0,\infty)$，且对于任意 $R\in(0,\infty)$，有

$$\sup_{t\in(0,R)}t^p\omega(\{x\in\mathscr{X}:\ |f(x)|>t\})<\infty,$$

则

$$\|M^{\sigma,\rho}_{0,s_1}(f)\|_{L^{p,\infty}(\omega)}\lesssim\|M^{\sigma,\rho;\,\sharp}_{0,s_2}(f)\|_{L^{p,\infty}(\omega)};$$

2) 若 $\mu(\mathscr{X})<\infty$，$f\in L^{p_0,\infty}(\mu)$满足 $p_0\in(0,\infty)$，则

$$\|M^{\sigma,\rho}_{0,s_1}(f)\|_{L^{p,\infty}(\omega)}\lesssim\|M^{\sigma,\rho;\,\sharp}_{0,s_2}(f)\|_{L^{p,\infty}(\omega)}+[\omega(\mathscr{X})]^{1/p}[s_1\mu(\mathscr{X})]^{-1/p_0}\|f\|_{L^{p_0,\infty}(\mu)}.$$

引理 3[18]　设 $\rho,p\in[1,\infty)$，$\omega\in A^\rho_p(\mu)$，$\eta\in[5\rho,\infty)$，则存在常数 $C_2,C_3\in[1,\infty)$，使得对于任意倍球 B 和 μ-可测集 $E\subset B$，有

$$\frac{\omega(E)}{\omega(B)}\geqslant C_2^{-1}\left[\frac{\mu(E)}{\mu(\eta B)}\right]^p,$$

$$\frac{\omega(E)}{\omega(B)}\geqslant C_3^{-1}\left[\frac{\mu(E)}{\mu(B)}\right]^p,\qquad\frac{\omega(E)}{\omega(B)}\leqslant 1-C_3^{-1}\left[1-\frac{\mu(E)}{\mu(B)}\right]^p.$$

引理 4[18]　设 $\rho,p\in[1,\infty)$，$\sigma\in[1,30]$，$s\in(0,\beta_{30\rho}^{-1})$，则对任意 μ-可测函数 f 和 $t\in(0,\infty)$，有：

1) $\{x\in\mathscr{X}:\ |f(x)|>t\}\subset\{x\in\mathscr{X}:\ M^{\sigma,\rho}_{0,s}(f)(x)\geqslant t\}\cup E$ 满足 $\mu(E)=0$；

2) 对于任意 $\omega\in A^\rho_p(\mu)$，

$$\omega(\{x\in\mathscr{X}:\ M^{\sigma,\rho}_{0,s}(f)(x)>t\})\lesssim s^{-p}\omega(\{x\in\mathscr{X}:\ |f(x)|>t\}).$$

引理 5[18]　设 $\rho\in[1,\infty)$，$\sigma\in[1,30]$，$s\in(0,\beta_{30\rho}^{-1}/4)$，$B$ 为$(30\rho,\beta_{30\rho})$-倍球，满足 $\mu(B)\neq0$，则对所有常数 $c\in\mathbb{C}$ 和任意 μ-可测函数 f，有

$$|m^{\sigma,\rho}_{0,s;B}(f)-|c||\leqslant m^{\sigma,\rho}_{0,s;B}(f-c).$$

引理 6[27]　设 $\rho\in[1,\infty)$，$\sigma\in[1,30]$，$s\in(0,\beta_{30\rho}^{-1}/4)$，$r\in(0,\infty)$，则对任意球 B 和 μ-局部可积函数 f，有

$$m^{\sigma,\rho}_{0,s;B}(f-m_f(B))\leqslant s^{-1/r}\inf_{c\in\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho B)}\int_B|f(y)-c|^r\mathrm{d}\mu(y)\right]^{1/r}.$$

引理 7[18]　设 $\rho\in[1,\infty)$，$\eta\in[5\rho,\infty)$，M_η 和 M^ρ 分别为式(9)和式(10)中定义，则对任意 $p\in[1,\infty)$ 和 $\omega\in A^\rho_p(\mu)$，M_η 和 M^ρ 从 $L^p(\omega)$ 到 $L^{p,\infty}(\omega)$有界.

引理 8[8]　设 $\alpha\in(0,1)$，K_α 满足式(3)，(4)，T_α 是式(5)中定义的广义分数次积分. 若 T_α 在 $L^2(\mu)$上有界，则对于任意 $p\in(1,\infty)$，T_α 在 $L^p(\mu)$上有界，且从 $L^1(\mu)$到 $L^{1,\infty}(\mu)$有界.

引理 9　设 $f\in L^\infty_b(\mu)$，对于任意 $\rho\in[1,\infty)$，$\sigma\in(5,30]$，$r\in(0,1)$，在引理 8 的条件下，有

$$M^{\sigma,\rho;\,\sharp}_r(T_\alpha(f)(x))\lesssim M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x).\tag{12}$$

证明：对于每个球 B 和 $f\in L^\infty_b(\mu)$，记 $h_B:=m_B(T_\alpha(f_{\chi_{(5B)^c}}))$. 由引理 5 和引理 6 可知，对任意 $s\in(0,\beta_{30\rho}^{-1}/4)$及 $r\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}
\int_B|T_\alpha(f)(y)-m_{T_\alpha(f)}(\widetilde{B})|^r\mathrm{d}\mu(y)&\leqslant\int_B|T_\alpha(f)(y)-h_B|^r\mathrm{d}\mu(y)+|h_B-h_{\widetilde{B}}|^r\mu(B)+\\
&|m^{\sigma,\rho}_{0,s;\widetilde{B}}(T_\alpha(f))-m_{T_\alpha(f)}(\widetilde{B})|^r\mu(B)+|m^{\sigma,\rho}_{0,s;\widetilde{B}}(T_\alpha(f))-h_{\widetilde{B}}|^r\mu(B)\leqslant\\
&\int_B|T_\alpha(f)(y)-h_B|^r\mathrm{d}\mu(y)+|h_B-h_{\widetilde{B}}|^r\mu(B)+\\
&[m^{\sigma,\rho}_{0,s;\widetilde{B}}(T_\alpha(f)-m_{T_\alpha(f)}(\widetilde{B}))]^r\mu(B)+[m^{\sigma,\rho}_{0,s;\widetilde{B}}(T_\alpha(f)-h_{\widetilde{B}})]^r\mu(B)\lesssim\\
&\int_B|T_\alpha(f)(y)-h_B|^r\mathrm{d}\mu(y)+|h_B-h_{\widetilde{B}}|^r\mu(B)+\\
&3^rs^{-1}\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho\widetilde{B})}\int_{\widetilde{B}}|T_\alpha(f)(y)-m_{T_\alpha(f)}(\widetilde{B})|^r\mathrm{d}\mu(y)\right]\mu(B)+\\
&3^rs^{-1}\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho\widetilde{B})}\int_{\widetilde{B}}|T_\alpha(f)(y)-h_{\widetilde{B}}|^r\mathrm{d}\mu(y)\right]\mu(B)\lesssim
\end{aligned}$$

$$\int_B |T_\alpha(f)(y)-h_B|^r d\mu(y)+|h_B-h_{\tilde{B}}|^r\mu(B)+3^r s^{-1}\frac{\mu(B)}{\mu(\tilde{B})}\int_{\tilde{B}}|T_\alpha(f)(y)-h_{\tilde{B}}|^r d\mu(y),$$

对于任意两个倍球 $B\subset R$，由引理5和引理6可知，

$$\begin{aligned}|m_{T_\alpha(f)}(B)-m_{T_\alpha(f)}(R)|&\leqslant|m^{\sigma,\rho}_{0,s;B}(T_\alpha(f))-h_B|+|h_B-h_R|+|m^{\sigma,\rho}_{0,s;R}(T_\alpha(f))-h_R|+\\&|m^{\sigma,\rho}_{0,s;B}(T_\alpha(f))-m_{T_\alpha(f)}(B)|+|m^{\sigma,\rho}_{0,s;R}(T_\alpha(f))-m_{T_\alpha(f)}(R)|\leqslant\\&m^{\sigma,\rho}_{0,s;B}(T_\alpha(f)-h_B)+|h_B-h_R|+m^{\sigma,\rho}_{0,s;R}(T_\alpha(f)-h_R)+\\&m^{\sigma,\rho}_{0,s;B}(T_\alpha(f)-m_{T_\alpha(f)}(B))+m^{\sigma,\rho}_{0,s;R}(T_\alpha(f)-m_{T_\alpha(f)}(R))\lesssim\\&3s^{-1/r}\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho B)}\int_B|T_\alpha(f)(y)-h_B|^r d\mu(y)\right]^{1/r}+|h_B-h_R|+\\&3s^{-1/r}\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho R)}\int_R|T_\alpha(f)(y)-h_R|^r d\mu(y)\right]^{1/r}+\\&3s^{-1/r}\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho B)}\int_B|T_\alpha(f)(y)-m_{T_\alpha(f)}(B)|^r d\mu(y)\right]^{1/r}+\\&3s^{-1/r}\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho R)}\int_R|T_\alpha(f)(y)-m_{T_\alpha(f)}(R)|^r d\mu(y)\right]^{1/r}\lesssim\\&4s^{-1/r}\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho B)}\int_B|T_\alpha(f)(y)-h_B|^r d\mu(y)\right]^{1/r}+|h_B-h_R|+\\&4s^{-1/r}\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho R)}\int_R|T_\alpha(f)(y)-h_R|^r d\mu(y)\right]^{1/r},\end{aligned}$$

因此，为证式(12)成立，只需证明

$$\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho B)}\int_B|T_\alpha(f)(y)-h_B|^r d\mu(y)\right]^{1/r}\lesssim\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x),\tag{13}$$

并且

$$|h_B-h_R|\lesssim\widetilde{K}^{(\rho)}_{B,R}\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x).\tag{14}$$

首先证明式(13). 对任意 $y\in\mathcal{X}$，有

$$|T_\alpha(f)(y)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{X}\setminus(5B)}})(y)|\leqslant|T_\alpha(f_{\chi_{5B}})(y)|,$$

因此，

$$\begin{aligned}&\int_B|T_\alpha(f)(y)-h_B|^r d\mu(y)\leqslant\\&\int_B|T_\alpha(f)(y)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{X}\setminus(5B)}})(y)|^r d\mu(y)+\int_B|T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{X}\setminus(5B)}})(y)-h_B|^r d\mu(y)\leqslant\\&\int_B|T_\alpha(f_{\chi_{5B}})(y)|^r d\mu(y)+\int_B|T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{X}\setminus(5B)}})(y)-h_B|^r d\mu(y)\leqslant\\&\int_B|T_\alpha(f_{\chi_{5B}})(y)|^r d\mu(y)+\frac{1}{\mu(B)}\int_B\int_B|T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{X}\setminus(5B)}})(y)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{X}\setminus(5B)}})(x)|^r d\mu(y)d\mu(x).\end{aligned}$$

由引理8可知，T_α 从 $L^1(\mu)$ 到 $L^{1,\infty}(\mu)$ 有界，结合 Kolmogorov 不等式，有

$$\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho B)}\int_B|T_\alpha(f_{\chi_{5B}})(y)|^r d\mu(y)\right]^{1/r}\lesssim\frac{1}{\mu(\sigma\rho B)}\|f_{\chi_{5B}}\|_{L^1(\mu)}\lesssim\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x).\tag{15}$$

令 $f_*=f_{\chi_{\mathcal{X}\setminus(5B)}}$，对于任意的 $x,y\in B$，有

$$\begin{aligned}|T_\alpha(f_*)(y)-T_\alpha(f_*)(x)|&\leqslant\int_{\mathcal{X}}|f_*(z)|\,|K_\alpha(x,z)-K_\alpha(y,z))|\,d\mu(z)\leqslant\\&\int_{\mathcal{X}}|f_*(z)|\,|K_\alpha(x,z)-K_\alpha(x',z)|\,d\mu(z)+\\&\int_{\mathcal{X}}|f_*(z)|\,|K_\alpha(x',z)-K_\alpha(y',z)|\,d\mu(z)+\\&\int_{\mathcal{X}}|f_*(z)|\,|K_\alpha(y,z)-K_\alpha(y',z)|\,d\mu(z):=A_1+A_2+A_3.\end{aligned}$$

首先证明 A_1. 对任意的 $x,x',y,y'\in B$ 和 $z\in(kB)^c$，$k\in(1,\infty)$，有

$$d(x,z)\sim d(x',z)\sim d(y,z)\sim d(y',z)\sim d(c_B,z), \tag{16}$$

由式(4),(2),(1)，并结合 Minkowski 不等式，有

$$\begin{aligned}
A_1 &\leqslant \int_{(5B)^c}|f(z)|\,|K_\alpha(x,z)-K_\alpha(x',z)|\,\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\\
&\int_{(5B)^c}|f(z)|\frac{[d(x,x')]^\delta}{[d(x,z)]^\delta[\lambda(x,d(x,z))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\\
&\int_{(5B)^c}\frac{|f(z)|}{[\lambda(x,d(x,z))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\int_{(5B)^c}\frac{|f(z)|}{[\lambda(c_B,d(c_B,z))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\int_{5^{k+1}B\setminus(5^kB)}\frac{|f(z)|}{[\lambda(c_B,5^kr_B)]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu[(\sigma/5)\rho5^{k+1}B]}{[\lambda(c_B,5^kr_B)]^{1-\alpha}}\frac{1}{\mu[(\sigma/5)\rho5^{k+1}B]}\int_{5^{k+1}B}|f(z)|\,\mathrm{d}\mu(z)\lesssim M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x).
\end{aligned}$$

同理可得

$$A_3\lesssim M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x).$$

下面证 A_2. 根据 Minkowski 不等式和式(4)，有

$$\begin{aligned}
A_2 &\leqslant \int_{(5B)^c}|f(z)|\,|K_\alpha(x',z)-K_\alpha(y',z)|\,\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\\
&\int_{(5B)^c}|f(z)|\frac{[d(z,z')]^\delta}{[d(z,x')]^\delta[\lambda(z,d(z,x'))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\\
&\int_{(5B)^c}\frac{|f(z)|}{[\lambda(z,d(z,x'))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\int_{(5B)^c}\frac{|f(z)|}{[\lambda(c_B,d(c_B,z))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\int_{5^{k+1}B\setminus(5^kB)}\frac{|f(z)|}{[\lambda(c_B,5^kr_B)]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu[(\sigma/5)\rho5^{k+1}B]}{[\lambda(c_B,5^kr_B)]^{1-\alpha}}\frac{1}{\mu[(\sigma/5)\rho5^{k+1}B]}\int_{5^{k+1}B}|f(z)|\,\mathrm{d}\mu(z)\lesssim M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x),
\end{aligned}$$

再结合 A_1 和 A_3，得

$$\left[\frac{1}{\mu(\sigma\rho B)}\int_B|T_\alpha(f_*)(y)-h_B|^r\mathrm{d}\mu(y)\right]^{1/r}\lesssim\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x),$$

因此，结合式(15)可知式(13)成立.

下面证式(14)成立. 令

$$N:=N_{B,R}^{(30\rho)}+\lfloor\log_{30\rho}2\rfloor+1=N_{B,R}^{(30\rho)}+1,$$

由于 $B\subset R$，球 $(30\rho)^NB$ 和 $5R$ 分别与球 B 和 R 同心，则对于任意 $x\in5R$，有

$$\begin{aligned}
d(c_B,x)&\leqslant d(c_B,c_R)+d(c_R,x)\leqslant r_R+5r_R=6r_R\leqslant\\
&6\cdot(30\rho)^{N_{B,R}^{(30\rho)}}r_B\leqslant(30\rho)^{N_{B,R}^{(30\rho)}+1}r_B=(30\rho)^Nr_B,
\end{aligned}$$

表明 $5B\subset5R\subset(30\rho)^NB$. 因此，对于任意 $x,y\in\mathscr{X}$，有

$$\begin{aligned}
T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(5B)}})(x)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(5R)}})(y)&\leqslant T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(30\rho)^NB}})(x)+T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^NB\setminus(5B)}})(x)+\\
&T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(30\rho)^NB}})(y)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(5R)}})(y)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(30\rho)^NB}})(y)\leqslant\\
&T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(30\rho)^NB}})(x)+T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^NB\setminus(5B)}})(x)+T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^NB\setminus(5R)}})(y)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(30\rho)^NB}})(y).
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(5R)}})(y)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(5B)}})(x)&\leqslant T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(30\rho)^NB}})(y)+T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^NB\setminus(5R)}})(y)+\\
&T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^NB\setminus(5B)}})(x)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(30\rho)^NB}})(x).
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
|T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(5B)}})(x)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(5R)}})(y)|&\leqslant T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^NB\setminus(5B)}})(x)+T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^NB\setminus(5R)}})(y)+\\
&|T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(30\rho)^NB}})(x)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathscr{X}\setminus(30\rho)^NB}})(y)|\leqslant
\end{aligned}$$

$$T_\alpha(f_{\chi_{30\rho B\setminus(5B)}})(x)+T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^N B\setminus(30\rho B)}})(x)+$$
$$T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^N B\setminus(5R)}})(y)+|T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{Y}\setminus(30\rho)^N B}})(x)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{Y}\setminus(30\rho)^N B}})(y)|.$$

进一步可得,

$$|h_B-h_R|=\left|\frac{1}{\mu(B)\mu(R)}\int_R\int_B[T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{Y}\setminus(5B)}})(x)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{Y}\setminus(5R)}})(y)]\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\right|\leqslant$$
$$m_B(T_\alpha(f_{\chi_{30\rho B\setminus(5B)}}))(x)+m_B(T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^N B\setminus(30\rho B)}}))(x)+m_R(T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^N B\setminus(5R)}}))(y)+$$
$$\frac{1}{\mu(B)\mu(R)}\int_B\int_R|T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{Y}\setminus(30\rho)^N B}})(x)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{Y}\setminus(30\rho)^N B}})(y)|\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x):=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

对于 I_1, 由式(3)、Minkowski 不等式, 式(16),(2),(1)可知, 对于任意 $x\in B$, 有

$$T_\alpha(f_{\chi_{30\rho B\setminus(5B)}})(x)\leqslant\int_{30\rho B\setminus(5B)}|K_\alpha(x,z)||f(z)|\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\int_{30\rho B\setminus(5B)}\frac{|f(z)|}{[\lambda(c_B,d(c_B,z))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim$$
$$\frac{\mu[(\sigma/5)\rho 30\rho B]}{[\lambda(c_B,5\rho r_B)]^{1-\alpha}}\frac{1}{\mu[(\sigma/5)\rho 30\rho B]}\int_{30\rho B}|f(z)|\mathrm{d}\mu(z)\lesssim M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x).\qquad(17)$$

由于$(30\rho)^{N_{B,R}^{(30\rho)}-1}r_B\leqslant r_R$, 从而对于任意 $x\in(30\rho)^N B$, 有

$$d(c_R,x)\leqslant d(c_R,c_B)+d(c_B,x)\leqslant r_R+(30\rho)^N r_B\leqslant r_R+900\rho^2 r_R\leqslant 901\rho^2 r_R,$$

所以

$$(30\rho)^N B\subset 901\rho^2 R.$$

对于 I_3, 类似式(17), 对于任意 $y\in R$, 有

$$T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^N B\setminus(5R)}})(y)\leqslant\int_{(30\rho)^N B\setminus(5R)}|K_\alpha(y,z)||f(z)|\mathrm{d}\mu(z)\lesssim$$
$$\int_{(30\rho)^N B\setminus(5R)}\frac{|f(z)|}{[\lambda(y,d(y,z))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim\int_{901\rho^2 R\setminus(5R)}\frac{|f(z)|}{[\lambda(c_R,d(c_R,z))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim$$
$$\frac{\mu[(\sigma/5)\rho 901\rho^2 R]}{[\lambda(c_R,5\rho r_R)]^{1-\alpha}}\frac{1}{\mu[(\sigma/5)\rho 901\rho^2 R]}\int_{901\rho^2 R}|f(z)|\mathrm{d}\mu(z)\lesssim M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x),$$

因此

$$I_1+I_3\lesssim\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x).$$

对于 I_2 项, 由式(3)、Minkowski 不等式、式(16),(1)、定义 9 和引理 1 中 4)可知, 对于任意 $x\in B$, 有

$$T_\alpha(f_{\chi_{(30\rho)^N B\setminus(30\rho B)}})(x)\leqslant\int_{(30\rho)^N B\setminus(30\rho B)}|K_\alpha(x,z)||f(z)|\mathrm{d}\mu(z)\leqslant$$
$$\int_{(30\rho)^N B\setminus(30\rho B)}\frac{|f(z)|}{[\lambda(x,d(x,z))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim$$
$$\sum_{k=1}^{N-1}\int_{(30\rho)^{k+1}B\setminus((30\rho)^k B)}\frac{|f(z)|}{[\lambda(c_B,d(c_B,z))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(z)\lesssim$$
$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\mu[(\sigma/5)\rho(30\rho)^{k+1}B]}{[\lambda(c_B,(30\rho)^k r_B)]^{1-\alpha}}\frac{1}{\mu[(\sigma/5)\rho(30\rho)^{k+1}B]}\int_{(30\rho)^{k+1}B}|f(z)|\mathrm{d}\mu(z)\lesssim$$
$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\mu((30\rho)^{k+2}B)}{[\lambda(c_B,(30\rho)^{k+2}r_B)]^{1-\alpha}}\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x)\lesssim$$
$$\sum_{k=3}^{N_{B,R}^{(30\rho)}+2}\frac{\mu((30\rho)^k B)}{\lambda(c_B,(30\rho)^k r_B)}\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x)\lesssim$$
$$\widetilde{K}_{B,R}^{(30\rho)}\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x)\sim\widetilde{K}_{B,R}^{(\rho)}\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x),$$

因此

$$I_2\lesssim\widetilde{K}_{B,R}^{(\rho)}\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x).$$

对于 I_4, 类似式(15), 得

$$|T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{X}\setminus(30\rho)^{N_B}}})(x)-T_\alpha(f_{\chi_{\mathcal{X}\setminus(30\rho)^{N_B}}})(y)|\lesssim\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x),$$

所以

$$I_4\lesssim\inf_{x\in B}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x).$$

综合 $I_1\sim I_4$，式(14)得证. 由式(13)和式(14)可知式(12)成立，证毕.

2　主要结果

定理 1　设 $\alpha\in(0,1)$，$\delta\in(0,1]$，K_α 满足式(3)和式(4)，T_α 为式(5)定义的广义分数次积分. $p,\rho\in[1,\infty)$，$\omega\in A_p^\rho(\mu)\bigcap RH_r(\mu)$，$r\in(1,\infty)$，若 $T_\alpha(f)$ 在 $L^2(\mu)$ 上有界，则 $T_\alpha(f)$ 从 $L^p(\omega)$ 到 $L^{p,\infty}(\omega)$ 上有界，即

$$\sup_{t>0}t[\omega(\{x\in\mathcal{X}:\ T_\alpha(f)(x)>t\})]^{1/p}\lesssim\|f\|_{L^p(\omega)}.$$

证明：考虑 $\mu(\mathcal{X})=\infty$ 和 $\mu(\mathcal{X})<\infty$ 两种情形.

情形 1) $\mu(\mathcal{X})=\infty$. 由引理 7 只需证：对于任意 $t\in(0,\infty)$ 和 $\sigma\in[25,30]$，有

$$\sup_{t>0}t[\omega(\{x\in\mathcal{X}:\ T_\alpha(f)(x)>t\})]^{1/p}\lesssim\sup_{t>0}t[\omega(\{x\in\mathcal{X}:\ M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x)>t\})]^{1/p}.\tag{18}$$

因此，首先需证明对任意 $p\in[1,\infty)$，$f\in L_b^\infty(\mu)$，有 $T_\alpha(f)\in L^{p,\infty}(\mu)$(引理 8)，且对任意 $R\in(0,\infty)$，$\rho\in[1,\infty)$，$\omega\in A_p^\rho(\mu)$，有

$$\sup_{0<t<R}t^p\omega(\{x\in\mathcal{X}:\ T_\alpha(f)(x)>t\})<\infty.\tag{19}$$

对任意固定的 $x_0\in\mathcal{X}$，令 $l\in(2,\infty)$ 充分大，使得 f 的支集包含在球 $B(x_0,l)$ 中，且 $\mu(B(x_0,l))\in(0,\infty)$，再由定义 4 有 $\omega(B(x_0,2l))<\infty$，因此

$$\sup_{0<t<R}t^p\omega(\{x\in B(x_0,2l):\ T_\alpha(f)(x)>t\})\leqslant R^p\omega(B(x_0,2l))<\infty;$$

另一方面，对于任意 $x\in\mathcal{X}\setminus B(x_0,2l)$，$y\in B(x_0,l)$，$d(x,x_0)\sim d(x,y)$，结合式(3)、Minkowski 不等式和式(2)可知，对 $\alpha\in(0,1)$，有

$$T_\alpha(f)(x)\lesssim\int_{\mathcal{X}}\frac{|f(y)|}{[\lambda(x,d(x,y))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(y)\lesssim\frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{[\lambda(x,d(x,x_0))]^{1-\alpha}}\lesssim\frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{\lambda(x_0,d(x,x_0))}.\tag{20}$$

由 $\mu(\mathcal{X})=\infty$ 知，对于 $x_0\in\mathcal{X}$，有

$$\lim_{r\to\infty}\lambda(x_0,r)\geqslant\lim_{r\to\infty}\mu(B(x_0,r))=\infty,$$

从而对于任意的 $t\in(0,\infty)$，存在 $r_t\in(0,\infty)$，使得

$$\lambda(x_0,r_t)\gtrsim\frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{t}.$$

若存在 $\hat{t}\in(0,\infty)$，使得存在 $r\in(0,\infty)$，有 $\lambda(x_0,r)\gtrsim\|f\|_{L^1(\mu)}/\hat{t}$，则对于任意 $t\in(\hat{t},\infty)$ 和 $r\in(0,\infty)$，有

$$\lambda(x_0,r)\gtrsim\frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{t}.$$

此时，令

$$t_*=\inf\{\hat{t}\in(0,\infty):\lambda(x_0,r)\gtrsim\|f\|_{L^1(\mu)}/\hat{t},\ \forall\, r\in(0,\infty)\},$$

反之，令 $t_*=\infty$.

若 $t_*=0$，由于 $\lambda(x_0,r)<\infty$，$r\in(0,\infty)$，有 $\|f\|_{L^1(\mu)}=0$，由此及式(20)表明不存在 $x\in\mathcal{X}\setminus B(x_0,2l)$ 满足 $T_\alpha>t$，其中 $t\in(0,\infty)$，因此

$$\sup_{t>0}t^p\omega(\{x\in\mathcal{X}\setminus B(x_0,2l):\ T_\alpha(f)(x)>t\})=\sup_{t>0}t^p\omega(\varnothing)<\infty.$$

若 $t_*\in(0,\infty]$，则对于任意 $t\in(0,t_*)$，存在 $r_t\in(0,\infty)$，使得

$$\lambda(x_0,r_t)\gtrsim\frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{t},\qquad\lambda\left(x_0,\frac{r_t}{2}\right)<\frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{t},\tag{21}$$

所以

$$\frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{\lambda(x_0,d(x,x_0))}>t,\qquad d(x,x_0)<r_t.\tag{22}$$

若 $t_*\in(0,\infty)$，则对任意 $t\in[t_*,\infty)$和满足式(22)的任意 $x\in\mathscr{X}$，可得 $d(x,x_0)=0$，即 $x=x_0$. 另一方面，对于任意 $x\in\mathscr{X}\setminus B(x_0,2l)$，有

$$\frac{1}{\lambda(x_0,d(x,x_0))}\leqslant\frac{1}{\lambda(x_0,l)},$$

从而对任意 $t>\dfrac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{\lambda(x_0,l)}$，不存在点 $x\in\mathscr{X}\setminus B(x_0,2l)$满足 $T_a>t$.

结合式(20),(1)、引理3和式(21)可知，若 $t_*\in\left(0,\dfrac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{\lambda(x_0,l)}\right]$，则

$$\begin{aligned}
&\sup_{t>0}t^p\omega(\{x\in\mathscr{X}\setminus B(x_0,2l):\ T_a(f)(x)>t\})\leqslant\\
&\quad\sup_{t\in(0,\|f\|_{L^1(\mu)}/(\lambda(x_0,l))]}t^p\omega\left(\left\{x\in\mathscr{X}:\ \frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{\lambda(x_0,d(x,x_0))}>t\right\}\right)\leqslant\\
&\quad\sup_{t\in(0,t_*)}t^p\omega(B(x_0,r_t))+\sup_{t\in[t_*,\|f\|_{L^1(\mu)}/(\lambda(x_0,l))]}t^p\omega(\{x_0\})\lesssim\\
&\quad1+\sup_{t\in(0,t_*),\,r_t\in(0,l]}t^p\omega(B(x_0,r_t))+\sup_{t\in(0,t_*),\,r_t\in(l,\infty)}t^p\omega(B(x_0,r_t))\lesssim\\
&\quad1+\sup_{t\in(0,t_*),\,r_t\in(l,\infty)}t^p\omega(B(x_0,l))\left[\frac{\mu(B(x_0,5\rho\,r_t))}{\mu(B(x_0,l))}\right]^p\lesssim\\
&\quad1+\omega(B(x_0,l))\left[\frac{1}{\mu(B(x_0,l))}\right]^p\sup_{t\in(0,t_*),\,r_t\in(l,\infty)}t^p\left[\lambda\left(x_0,\frac{r_t}{2}\right)\right]^p\lesssim\\
&\quad1+\omega(B(x_0,l))\frac{1}{[\mu(B(x_0,l))]^p}<\infty;
\end{aligned}$$

若 $t_*\in\left(\dfrac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{\lambda(x_0,l)},\infty\right)$，则

$$\begin{aligned}
&\sup_{t>0}t^p\omega(\{x\in\mathscr{X}\setminus B(x_0,2l):\ T_a(f)(x)>t\})\leqslant\\
&\quad\sup_{t\in(0,\|f\|_{L^1(\mu)}/(\lambda(x_0,l))]}t^p\omega\left(\left\{x\in\mathscr{X}:\ \frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{\lambda(x_0,d(x,x_0))}>t\right\}\right)\lesssim\\
&\quad\sup_{t\in(0,\|f\|_{L^1(\mu)}/(\lambda(x_0,l))],\,r_t\in(0,l]}t^p\omega(B(x_0,r_t))+\sup_{t\in(0,\|f\|_{L^1(\mu)}/(\lambda(x_0,l))],\,r_t\in(l,\infty)}t^p\omega(B(x_0,r_t))\lesssim\\
&\quad1+\sup_{t\in(0,\|f\|_{L^1(\mu)}/(\lambda(x_0,l))],\,r_t\in(l,\infty)}t^p\omega(B(x_0,l))\left[\frac{\mu(B(x_0,5\rho\,r_t))}{\mu(B(x_0,l))}\right]^p\lesssim\\
&\quad1+\omega(B(x_0,l))\left[\frac{1}{\mu(B(x_0,l))}\right]^p\sup_{t\in(0,\|f\|_{L^1(\mu)}/(\lambda(x_0,l))],\,r_t\in(l,\infty)}t^p\left[\lambda\left(x_0,\frac{r_t}{2}\right)\right]^p\lesssim\\
&\quad1+\omega(B(x_0,l))\frac{1}{[\mu(B(x_0,l))]^p}<\infty.
\end{aligned}$$

因此式(19)成立.

下证式(18)成立. 设 $\sigma\in[25,30]$，根据引理4中1)、引理2中1)(其中 $s_1=\beta_{30\rho}^{-1}/4$，$p_0=1$)、式(11)和引理9，有

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0}t[\omega(\{x\in\mathscr{X}:\ T_a(f)(x)>t\})]^{1/p}&\lesssim\sup_{t>0}t[\omega(\{x\in\mathscr{X}:\ M_{0,s_1}^{\sigma,\rho}(T_a(f))(x)>t\})]^{1/p}\lesssim\\
&\sup_{t>0}t[\omega(\{x\in\mathscr{X}:\ M_{0,s_2}^{\sigma,\rho;\,\sharp}(T_a(f))(x)>t\})]^{1/p}\lesssim\\
&\sup_{t>0}t[\omega(\{x\in\mathscr{X}:\ M_{r}^{\sigma,\rho;\,\sharp}(T_a(f))(x)>t\})]^{1/p}\lesssim\\
&\sup_{t>0}t[\omega(\{x\in\mathscr{X}:\ M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x)>t\})]^{1/p}.
\end{aligned}\tag{23}$$

从而情形1)得证.

情形2) $\mu(\mathscr{X})<\infty$. 设 $\sigma\in[25,30]$，根据引理4中1)、引理2中2)(其中 $s_1=\beta_{30\rho}^{-1}/4$，$p_0=1$)和引理9，有

$$\sup_{t>0}t[\omega(\{x\in\mathscr{X}:\ T_a(f)(x)>t\})]^{1/p}\lesssim\sup_{t>0}t[\omega(\{x\in\mathscr{X}:\ M_{0,s}^{\sigma,\rho}(T_a(f))(x)>t\})]^{1/p}\lesssim$$

$$\sup_{t>0} t[\omega(\{x\in\mathscr{X}: M_{0,s_1}^{\sigma,\rho;\sharp}(T_\alpha(f))(x)>t\})]^{1/p}+$$
$$[\omega(\mathscr{X})]^{1/p}[\mu(\mathscr{X})]^{-1}\|T_\alpha(f)\|_{L^{1,\infty}(\mu)}:=B_1+B_2.$$

类似式(23)，得

$$B_1\lesssim\sup_{t>0} t[\omega(\{x\in\mathscr{X}: M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x)>t\})]^{1/p}.$$

对于 B_2，首先有

$$\frac{1}{\mu(\mathscr{X})}\int_{\mathscr{X}}|f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)=\lim_{r_B\to\infty}\frac{1}{\mu[(\sigma/5)\rho B]}\int_B|f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\leqslant\inf_{x\in\mathscr{X}}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x),$$

再由引理 8 可得

$$[\omega(\mathscr{X})]^{1/p}[\mu(\mathscr{X})]^{-1}\|T_\alpha(f)\|_{L^{1,\infty}(\mu)}\lesssim[\omega(\mathscr{X})]^{1/p}[\mu(\mathscr{X})]^{-1}\|f\|_{L^1(\mu)}\lesssim$$
$$[\omega(\mathscr{X})]^{1/p}\inf_{x\in\mathscr{X}}M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x)\lesssim\sup_{t>0} t[\omega(\{x\in\mathscr{X}: M_{(\sigma/5)\rho}(f)(x)>t\})]^{1/p}.$$

因此，情形 2)成立. 证毕.

定理 2　在定理 1 的条件下，并假设 ω 满足加权积分条件，则 $T_\alpha(f)$ 从 $L^{p,\kappa,\eta}(\omega)$ 到 $WL^{p,\kappa,\eta}(\omega)$ 上有界，即

$$\sup_B\sup_{t>0}\frac{1}{[\omega(\eta B)^{\kappa/p}]}t[\omega(\{x\in\mathscr{X}: |T_\alpha(f)(x)|>t\})]^{1/p}\lesssim\|f\|_{L^{p,\kappa,\eta}(\omega)},$$

其中 $\kappa\in(0,1)$，$\eta\in(1,\infty)$.

证明：若 $p\in(1,\infty)$，则对于一个固定的球 $B\subset\mathscr{X}$，令 $f=f_1+f_2$，其中 $f_1:=f_{\chi_{2B}}$. 根据引理 7，只需证明 $\eta=6$ 的情形. 对于任意 $t\in(0,\infty)$，有

$$\frac{1}{[\omega(6B)]^\kappa}t^p\omega(\{x\in B: |T_\alpha(f)(x)|>t\})\leqslant\frac{1}{[\omega(6B)]^\kappa}t^p\omega\left(\left\{x\in B: |T_\alpha(f_1)(x)|>\frac{t}{2}\right\}\right)+$$
$$\frac{1}{[\omega(6B)]^\kappa}t^p\omega\left(\left\{x\in B: |T_\alpha(f_2)(x)|>\frac{t}{2}\right\}\right):=J_1+J_2.$$

对于 J_1，由定理 1 得

$$J_1\leqslant\frac{1}{[\omega(6B)]^\kappa}t^p\omega\left(\left\{x\in\mathscr{X}: |T_\alpha(f_1)(x)|>\frac{t}{2}\right\}\right)\lesssim$$
$$\frac{1}{[\omega(6B)]^\kappa}\int_{2B}|f(x)|^p\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\lesssim\|f\|^p_{L^{p,\kappa,\eta}(\omega)}.$$

下证 J_2 成立. 对任意 $x\in B$，$y\in(2B)^c$，$d(c_B,y)\sim d(x,y)$，结合式(5)、Minkowski 不等式、式(3)、式(2)、Hölder 不等式，式(8)，(6)，(1)，(7)，有

$$J_2\leqslant\frac{1}{[\omega(6B)]^\kappa}\int_B|T_\alpha(f_2)(x)|^p\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\frac{1}{[\omega(6B)]^\kappa}\int_B\left|\int_{\mathscr{X}}K_\alpha(x,y)f_2(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right|^p\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\lesssim$$
$$\frac{1}{[\omega(6B)]^\kappa}\int_B\left[\int_{\mathscr{X}}\frac{|f_2(y)|}{[\lambda(x,d(x,y))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(y)\right]^p\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\lesssim$$
$$\frac{1}{[\omega(6B)]^\kappa}\int_B\left[\int_{d(c_B,y)\geqslant 2r_B}\frac{|f(y)|}{[\lambda(c_B,d(c_B,y))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(y)\right]^p\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\lesssim$$
$$\left[\int_{d(c_B,y)\geqslant 2r_B}\frac{|f(y)|}{[\lambda(c_B,d(c_B,y))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(y)\right]^p[\omega(6B)]^{1-\kappa}\lesssim$$
$$\left[\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^jr_B\leqslant d(c_B,y)\leqslant 2^{j+1}r_B}\frac{|f(y)|}{[\lambda(c_B,d(c_B,y))]^{1-\alpha}}\mathrm{d}\mu(y)\right]^p[\omega(6B)]^{1-\kappa}\lesssim$$
$$\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{[\lambda(c_B,2^jr_B)]^{1-\alpha}}\int_{2^{j+1}B}|f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right]^p[\omega(6B)]^{1-\kappa}\lesssim$$
$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{[\lambda(c_B,2^jr_B)]^{1-\alpha}}\left[\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right]^{1/p}\times\right.$$
$$\left.\left[\int_{2^{j+1}B}[\omega(y)]^{1-p'}\,\mathrm{d}\mu(y)\right]^{(p-1)/p}\right\}^p[\omega(6B)]^{1-\kappa}\lesssim$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{[\omega(2^{j+1}6B)]^{\kappa/p}}{[\lambda(c_B,2^jr_B)]^{1-\alpha}}\left[\frac{1}{[\omega(2^{j+1}6B)]^{\kappa}}\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}\mu(y)\right]^{1/p}\times\right.$$
$$\left.\left[\int_{2^{j+1}6B}[\omega(y)]^{1-p'}\mathrm{d}\mu(y)\right]^{(p-1)/p}\right\}^p[\omega(6B)]^{1-\kappa}\lesssim$$
$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{[\omega(2^{j+1}6B)]^{\kappa/p}}{[\lambda(c_B,2^jr_B)]^{1-\alpha}}\|f\|_{L^{p,\kappa,\eta_{(\omega)}}}\frac{\mu(2^{j+1}\rho6B)}{[\omega(2^{j+1}6B)]^{1/p}}\right\}^p[\omega(6B)]^{1-\kappa}\lesssim$$
$$\|f\|^p_{L^{p,\kappa,\eta_{(\omega)}}}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{[\omega(2^{j+1}6B)]^{\kappa/p}}{\lambda(c_B,2^jr_B)}\frac{\mu(2^{j+1}\rho6B)}{[\omega(2^{j+1}6B)]^{1/p}}\right]^p[\omega(6B)]^{1-\kappa}\lesssim$$
$$\|f\|^p_{L^{p,\kappa,\eta_{(\omega)}}}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{[\omega(6B)]^{(1-\kappa)/p}}{[\omega(2^{j+1}6B)]^{(1-\kappa)/p}}\right]^p\lesssim\|f\|^p_{L^{p,\kappa,\eta_{(\omega)}}}.$$

从而当 $p\in(1,\infty)$时，结论成立.

当 $p=1$ 时，证明过程类似，需用到 $\omega\in A_1(\mu)$的性质，这里略. 证毕.

参 考 文 献

[1] TOLSA X. Painlevé's Problem and the Semiadditivity of Analytic Capacity [J]. Acta Mathematica, 2003, 190(1): 105-149.

[2] TOLSA X. The Semiadditivity of Continuous Analytic Capacity and the Inner Boundary Conjecture [J]. American Journal of Mathematics, 2004, 126(3): 523-567.

[3] COIFMAN R R, WEISS G. Extensions of Hardy Spaces and Their Use in Analysis [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1977, 83(4): 569-645.

[4] HYTÖNEN T. A Framework for Non-homogeneous Analysis on Metric Spaces, and the RBMO Space of Tolsa [J]. Publicacions Matemàtiques, 2010, 54(2): 485-504.

[5] HYTÖNEN T, YANG D C, YANG D Y. The Hardy Space H^1 on Non-homogeneous Metric Spaces [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 2012, 153(1): 9-31.

[6] FU X, YANG D C, YUAN W. Generalized Fractional Integrals and Their Commutators over Non-homogeneous Metric Measure Spaces [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2014, 18(2): 509-557.

[7] LU G H, TAO S P. Two Classes of Bilinear Fractional Integral Operators and Their Commutators on Generalized Fractional Morrey Spaces [J]. Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, 2021, 12(4): 52-75.

[8] GONG H J, XIE R L, XU C. Multilinear Fractional Integral Operators on Non-homogeneous Metric Measure Spaces [J/OL]. Journal of Inequalities and Applications, (2016-11-04)[2023-05-20]. https://doi.org/10.1186/s13660-016-1218-6.

[9] GARCÍA-CUERVA J, GATTO A E. Boundedness Properties of Fractional Integral Operators Associated to Non-doubling Measures [J]. Studia Mathematica, 2004, 162(3): 245-261.

[10] LU G H. Compactness for Commutator of Fractional Integral on Non-homogeneous Morrey Spaces [J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2022, 42(1): 73-88.

[11] 宋福杰，赵凯. 非齐度量测度 Morrey-Herz 空间上的 Marcinkiewicz 积分算子及其交换子 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2020, 58(2): 219-224. (SONG F J, ZHAO K. Marcinkiewicz Integral Operator and Its Commutator on Morrey-Herz Spaces with Non-homogeneous Metric Measure [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2020, 58(2): 219-224.)

[12] LU G H, RUI L. θ-Type Generalized Fractional Integral and Its Commutator on Some Non-homogeneous Variable Exponent Spaces [J]. AIMS Mathematics, 2021, 6(9): 9619-9632.

[13] SIHWANINGRUM I, MARYANI S, GUNAWAN H. Weak Type Inequalities for Fractional Integral Operators on Generalized Non-homogeneous Morrey Spaces [J]. Analysis in Theory and Applications, 2012, 28(1): 65-72.

[14] AMAGAI K, NAKAI E, SADASUE G. Generalized Fractional Integral Operators Based on Symmetric Markovian Semigroups with Application to the Heisenberg Group [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2023, 27(1): 113-139.

[15] AVSAR C, MUSAYEV A M, SAFAROV Z V. Two-Weighted Inequalities for Generalized Fractional Integral Operator and Its Commutators in Generalized Weighted Morrey Spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis, 2022, 13(4): 1-14.

[16] 陶双平，王萍. Calderón-Zygmund 算子与交换子在非齐度量测度空间上 Morrey 空间中的有界性 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2015，53(6)：1073-1080.（TAO S P, WANG P. Boundedness of Calderón-Zygmund Operators and Commutators on Morrey Spaces Associated with Non-homogeneous Metric Measure Spaces [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2015, 53(6): 1073-1080.）

[17] TAO X X, WANG J H. Commutators of Multilinear θ-Type Generalized Fractional Integrals on Non-homogeneous Metric Measure Spaces [J]. AIMS Mathematics, 2022, 7(6): 9627-9647.

[18] HU G E, MENG Y, YANG D C. Weighted Norm Inequalities for Multilinear Calderón-Zygmund Operators on Non-homogeneous Metric Measure Spaces [J]. Forum Mathematicum, 2014, 26(5): 1289-1322.

[19] OROBITG J, PÉREZ C. A_p Weights for Nondoubling Measures in $\mathbb{R}^n$ and Applications [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2002, 354(5): 2013-2033.

[20] YAN Y, CHEN J, LIN H B. Weighted Morrey Spaces on Non-homogeneous Metric Measure Spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 452(1): 335-350.

[21] BUI T A, DUONG X T. Hardy Spaces, Regularized BMO Spaces and the Boundedness of Calderón-Zygmund Operators on Non-homogeneous Spaces [J]. Journal of Geometric Analysis, 2013, 23(2): 895-932.

[22] FU X, LIN H B, YANG D C, et al. Hardy Spaces H^p over Non-homogeneous Metric Measure Spaces and Their Applications [J]. Science China: Mathematics, 2015, 58(2): 309-388.

[23] JOURNÉ J L. Calderón-Zygmund Operators, Pseudo Differential Operators and the Cauthy Integral of Calderón [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983: 1-128.

[24] JOHN F. Quasi-isometric Mappings, Seminari 1962-1963 di Analisi, Algebra, Geometria e Topologia. Vol. 2 [M]. Rome: Edizioni Cremonese, 1965: 462-473.

[25] STRÖMBERG J O. Bounded Mean Oscillation with Orlicz Norms and Duality of Hardy Spaces [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1979, 28(3): 511-544.

[26] LERNER A K. Weighted Norm Inequalities for the Local Sharp Maximal Function [J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2004, 10(5): 465-474.

[27] HU G E, YANG D C. Weighted Norm Inequalities for Maximal Singular Integrals with Nondoubling Measures [J]. Studia Mathematica, 2008, 187(2): 101-123.

（责任编辑：赵立芹）