

一个网络参数估计的增量式 RLS 算法

王忠禹, 冶继民

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710126)

摘要: 针对现有增量式最小均方算法仅利用各节点的局部数据进行局部估计, 在信息交互受限条件下估计精度较低的问题, 提出一种循环网络估计的增量式递归最小二乘算法. 该算法在循环网络中逐节点对局部损失函数进行指数加权求和, 仅利用前一节点参数的局部估计值和中间过程矩阵的估计值, 递归求解每个节点处的局部估计, 具有信息交互需求低、估计精度高的特点. 通过对该估计方法的均值和均方误差理论分析可知, 仿真实验结果与理论分析高度吻合. 在不同应用场景下, 该算法估计精度均优于目前对比增量式最小均方算法, 为分布式循环网络中的参数估计提供了一种高效可行的解决方案.

关键词: 自适应算法; 增量形式; 递归最小二乘

中图分类号: TP301.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)03-0643-07

An Incremental RLS Algorithm for Network Parameter Estimation

WANG Zhongyu, YE Jimin

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, China)

Abstract: Aiming at the problem that existing incremental least mean square algorithms, which relied solely on the local data at each node to perform local estimation, suffered from low estimation accuracy under limited information exchange, we proposed an incremental recursive least squares algorithm based on cyclic network estimation. The algorithm performed exponentially weighted summation of local loss functions node by node in the cyclic network, and recursively solved the local estimate at each node by using only the local estimate of parameter and intermediate process matrix estimate from the immediately preceding node. It featured low demand for information exchange and high estimation accuracy. Through theoretical analysis of the mean and mean-square error of proposed estimation method, the simulation experimental results are highly consistent with the theoretical analysis. In different application scenarios, the estimation accuracy of proposed algorithm is superior to the current comparative incremental least mean square algorithms, providing an efficient and practical solution for parameter estimation in distributed cyclic networks.

Keywords: adaptive algorithm; incremental form; recursive least squares

近年来, 随着无线自适应网络信号估计需求的增加, 大量研究致力于开发适用于分布式网络的新型自适应算法^[1]. 这些算法主要分为增量型^[2]和扩散型^[3]两类. 增量型算法将网络转化为 Hamilton

收稿日期: 2025-01-10.

第一作者简介: 王忠禹(2001—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事统计信号处理及其应用的研究, E-mail: 23071213312@stu.xidian.edu.cn. **通信作者简介:** 冶继民(1967—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事统计学习算法和盲信号与信息处理中数学方法的研究, E-mail: jmye@mail.xidian.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12571329).

环, 每个节点根据观测数据与前一节点的局部估计值给出局部估计, 并将更新结果传递至下一个节点. 该模式通过节点间的循环协作, 降低信息需求和能耗^[4]. 扩散型算法中每个节点与其邻近节点相连, 形成多个相互连接的小型分布式子网络. 每个节点独立执行处理任务, 并通过组合策略将邻近数据与自身数据融合. 已证明在不同的应用场景下增量型算法性能优于扩散型算法^[4-7]. 目前, 增量型算法的研究主要集中在最小均方 (least mean square, LMS) 算法的多种变体上, 例如固定步长^[2]、可变步长^[8-9]、噪声约束^[10]等类别. 由于 LMS 算法自身结构的限制, 其收敛速度和性能仍有改进空间.

递归最小二乘 (recursive least squares, RLS) 算法在自适应滤波中应用广泛^[11], 它以递归的形式直接求取理论上的全局最优解, 具有较快的收敛速度和较高的稳态精度, 并避免了 LMS 算法中的步长选择问题. RLS 算法在自适应网络中的应用主要为扩散形式^[12-14]. 文献[12]提出了基于增量更新的扩散 RLS 算法, 使用网络中收集的所有数据并为每个节点提供一个全局最小二乘解; 文献[14]通过要求节点与其最近的节点通信, 无需传输矩阵或矩阵求逆, 降低了信息需求和计算复杂性. 在增量形式下对循环网络未知参数估计的自适应 RLS 类算法研究目前尚未见文献报道. 本文提出一种增量形式下对循环网络的 RLS 算法, 不同应用场景下的对比实验结果表明: 该增量型的 RLS 算法性能优于现有较新的 LMS 类算法. 通过算法的均值与均方分析可知, 仿真结果与理论分析吻合较好.

1 增量情形下的自适应算法

图 1 为一个通过 Hamilton 环连接的具有 N 个节点的网络, 每个节点 k 通过标量 $y_k(i)$ 估计未知系数向量 $\mathbf{w}^0 \in \mathbb{R}^{M \times 1}$, 其与 $\mathbf{w}^0$ 联系如下:

$$y_k(i) = \mathbf{x}_k^T(i) \mathbf{w}^0 + n_k(i), \tag{1}$$

其中: $\mathbf{x}_k(i) \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ 为节点 k 第 i 次迭代的输入向量, M 为未知向量的长度; $n_k(i)$ 表示一个均值为 0、方差为 σ_k^2 的正态分布的加性噪声.

1.1 增量式最小均方类算法

常规的增量式 LMS 算法通过对损失函数

$$J_{\text{ILMS}}(\mathbf{w}_k(i)) = \frac{1}{2} \mathbb{E}[|y_k(i) - \mathbf{x}_k^T(i) \mathbf{w}_k(i)|^2] \tag{2}$$

关于估计向量 $\mathbf{w}_k(i)$ 求梯度并在 $\mathbf{w}_{k-1}(i)$ 做梯度下降, 引入步长因子 μ 得到未知系数向量的迭代公式为

$$\mathbf{w}_k(i) = \mathbf{w}_{k-1}(i) + \mu \mathbf{x}_k(i) (y_k(i) - \mathbf{w}_{k-1}(i) \mathbf{x}_k(i)). \tag{3}$$

目前较新的 LMS 类算法为变步长的增量式最小均方 (variable step size incremental LMS, VSSILMS) 算法^[8] 和噪声约束的增量式最小均方 (noise constrained incremental LMS, NCILMS) 算法^[10].

对于 VSSILMS 算法, 其中 $\mu_k(i)$ 为第 k 个节点第 i 次迭代的步长值, α, γ 分别为控制参数, 满足 $0 < \alpha < 1, \gamma > 0$.

算法 1 VSSILMS 算法.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0(i) &= \mathbf{w}_{i-1}, \\ e_k(i) &= (y_k(i) - \mathbf{w}_{k-1}^T(i) \mathbf{x}_k(i)), \\ \mathbf{w}_k(i) &= \mathbf{w}_{k-1}(i) + \mu_k(i) \mathbf{x}_k(i) e_k(i), \quad k=1, 2, \dots, N, \\ \mu_k(i+1) &= \alpha \mu_k(i) + \gamma e_k^2(i), \\ \mathbf{w}_i &= \mathbf{w}_N(i). \end{aligned}$$

对于 NCILMS 算法, 将其噪声方差作为约束添加到式(2)中, 得到新的损失函数:

$$J_{\text{NCILMS}}(\mathbf{w}_k(i)) = J_{\text{ILMS}}(\mathbf{w}_k(i)) + \gamma_k \lambda_k(i) [J_{\text{ILMS}}(\mathbf{w}_k(i)) - \sigma_k^2] - \gamma_k \lambda_k^2(i), \tag{4}$$

其中 $\lambda_k(i)$ 为 Lagrangian 乘子, γ_k 为大于 0 的控制参数. 同理, 通过对式(4)关于 $\mathbf{w}_k(i)$ 求梯度并引入

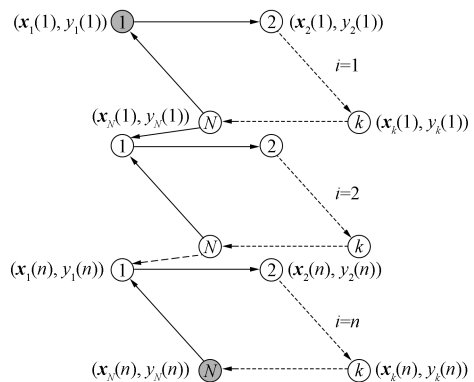


图 1 增量情形的 N 个节点网络及参数更新过程
Fig. 1 N node network and parameter updating process in incremental case

步长因子 $a_k(i)$ 和 β_k 可得 $w_k(i)$ 和 $\lambda_k(i)$ 的迭代公式. NCILMS 算法如下.

算法 2 NCILMS 算法.

$$\begin{aligned} w_0(i) &= w_{i-1}, \\ e_k(i) &= (y_k(i) - w_{k-1}^T(i) x_k(i)), \\ a_k(i) &= \mu_k [1 + \gamma_k \lambda_k(i)], \\ w_k(i) &= w_{k-1}(i) + a_k(i) x_k(i) e_k(i), \quad k=1, 2, \dots, N, \\ \lambda_k(i+1) &= (1 - \beta_k) \lambda_k(i) + \frac{\beta_k}{2} (e_k^2(i) - \sigma_k^2), \\ w_i &= w_N(i). \end{aligned}$$

1.2 增量式递归最小二乘算法

已有 LMS 类增量式算法在每个节点的局部估计仅使用局部数据, 对增量情形的 N 节点网络, 为在循环估计中综合使用每个节点数据, 将已历经的节点损失函数指数加权相加, 则第 k 个节点处第 i 次迭代的损失函数为

$$\min J(w_k(i)) = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} [y_j(i) - x_j^T(i) w_k(i)]^2. \quad (5)$$

记输入向量的确定性相关矩阵 $R_k(i) = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} x_j(i) x_j^T(i)$, 输入向量与 $y_k(i)$ 之间的确定性互相关向量

$$P_k(i) = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} x_j(i) y_j(i). \text{ 对式(5)关于 } w_k(i) \text{ 求梯度并令其为零, 可得}$$

$$w_k(i) = R_k^{-1}(i) P_k(i). \quad (6)$$

直接计算 $R_k^{-1}(i)$ 复杂度较大, 在传统的 RLS 算法中, 通过用矩阵求逆引理避免 $R_k(i)$ 的求逆运算^[11]. 记 $S_{D,k}(i) = R_k^{-1}(i)$, 其计算过程如下:

$$S_{D,k}(i) = R_k^{-1}(i) = \frac{1}{\lambda} \left[S_{D,k-1}(i) - \frac{S_{D,k-1}(i) x_k(i) x_k^T(i) S_{D,k-1}(i)}{\lambda + x_k^T(i) S_{D,k-1}(i) x_k(i)} \right], \quad (7)$$

又 $R_{k-1}(i) w_{k-1}(i) = P_{k-1}(i)$, $P_k(i) = \lambda P_{k-1}(i) + x_k(i) y_k(i)$. 与式(6)联立可得

$$w_k(i) = w_{k-1}(i) + e_k(i) S_{D,k}(i) x_k(i), \quad (8)$$

其中 $w_k(i)$ 表示 w^0 在第 k 个节点第 i 次迭代时的估计向量. 为降低算法计算复杂度, 记中间向量 $h_k(i) = S_{D,k}(i) x_k(i)$. 本文增量式递归最小二乘(incremental RLS, IRLS)算法描述如下:

$$\text{初始化: } S_{D,1}(0) = \delta I, \quad (9)$$

$$w_0(i) = w_{i-1}, \quad (10)$$

$$S_{D,0}(i+1) = S_{D,N}(i), \quad (11)$$

$$e_k(i) = y_k(i) - w_{k-1}^T(i) x_k(i), \quad (12)$$

$$h_k(i) = \frac{S_{D,k-1}(i) x_k(i)}{\lambda + x_k^T(i) S_{D,k-1}(i) x_k(i)}, \quad (13)$$

$$S_{D,k}(i) = \frac{1}{\lambda} [S_{D,k-1}(i) - h_k(i) x_k^T(i) S_{D,k-1}(i)], \quad (14)$$

$$w_k(i) = w_{k-1}(i) + e_k(i) S_{D,k}(i) x_k(i), \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

$$w_i = w_N(i). \quad (16)$$

2 理论分析

定义系数误差向量为

$$\Delta w_k(i) = w^0 - w_k(i). \quad (17)$$

将式(1)代入式(12), 并联立式(15)和式(17)可得系数误差向量迭代公式为

$$\Delta w_k(i) = (I_M - S_{D,k}(i) x_k(i) x_k^T(i)) \Delta w_{k-1}(i) - n_k(i) S_{D,k}(i) x_k(i). \quad (18)$$

参考文献[15]做如下假设:

- (H₁) $\mathbf{S}_{D,k}(i), \mathbf{x}_k(i)$ 相互独立;
- (H₂) $\mathbf{x}_k(i), n_k(i), \mathbf{w}_k(i)$ 相互独立.

2.1 均值分析

联立式(1)和式(6), 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_k(i) &= \mathbf{R}_k^{-1}(i) \mathbf{P}_k(i) = \mathbf{S}_{D,k}(i) \left[\sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} \mathbf{x}_j(i) y_j(i) \right] = \\ &\mathbf{S}_{D,k}(i) \left[\sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} \mathbf{x}_j(i) (\mathbf{x}_j^T(i) \mathbf{w}^0 + n_j(i)) \right] = \\ &\mathbf{w}^0 + \mathbf{S}_{D,k}(i) \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} \mathbf{x}_j(i) n_j(i).\end{aligned}\tag{19}$$

对式(20)两边同时取期望, 满足

$$E(\mathbf{w}_k(i)) = \mathbf{w}^0.\tag{20}$$

式(20)表明, 在理想状态下, 式(6)给出的未知系数向量的估计是无偏的. 但在实验过程中 IRLS 算法的推导由于应用了矩阵求逆引理, 从而导致得到的迭代式(14)给出的估计具有估计偏差. 为深入了解系数误差向量 $\Delta \mathbf{w}_k(i)$ 在迭代实验中的具体表现, 做如下分析.

对式(18)两边同时左乘矩阵 $\mathbf{R}_k(i)$, 可得

$$\mathbf{R}_k(i) \Delta \mathbf{w}_k(i) = \lambda \mathbf{R}_{k-1}(i) \Delta \mathbf{w}_{k-1}(i) - n_k(i) \mathbf{x}_k(i).\tag{21}$$

将式(21)按 k 递推, 有

$$\mathbf{R}_k(i) \Delta \mathbf{w}_k(i) = \lambda^k \mathbf{R}_0(i) \Delta \mathbf{w}_0(i) - \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j n_{k-j}(i) \mathbf{x}_{k-j}(i).\tag{22}$$

对式(22)两边同时左乘矩阵 $\mathbf{S}_{D,k}(i)$, 并在两边同时取期望且 $E(n_k(i))=0$, 可得

$$E(\Delta \mathbf{w}_k(i)) = \lambda^k E(\mathbf{S}_{D,k}(i) \mathbf{R}_0(i)) E(\Delta \mathbf{w}_0(i)).\tag{23}$$

联立式(9)和式(11)可得

$$E(\Delta \mathbf{w}_k(i)) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{\delta} E(\mathbf{S}_{D,k}(1)) E(\mathbf{w}^0), & i=1, \\ \lambda^k E(\mathbf{S}_{D,k}(i) \mathbf{R}_N(i-1)) E(\Delta \mathbf{w}_N(i-1)), & i=2, 3, \cdots n. \end{cases}\tag{24}$$

分析等式(24)右侧的两种表达形式, 由于 $\mathbf{R}_k(i) = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} \mathbf{x}_j(i) \mathbf{x}_j^T(i)$, 其矩阵元素大小取决于过去的所有输入向量 $\mathbf{x}_k(i)$, 又当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\lambda^k \rightarrow 0$, 从而随着 k 的增加, 距目前节点较远的输入向量对 $\mathbf{R}_k(i)$ 的影响可忽略不计, $\mathbf{R}_k(i)$ 在 $k \rightarrow \infty$ 时趋于稳定. 因此, $\mathbf{R}_k(i)$ 和 $\mathbf{S}_{D,k}(i)$ 均为有界量, 从而可得 $\lambda^k E(\mathbf{S}_{D,k}(i) \mathbf{R}_k(i)) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 故 $E(\Delta \mathbf{w}_k(i)) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 即 $\mathbf{w}_k(i)$ 依均值收敛到 $\mathbf{w}^0$.

2.2 均方分析

2.2.1 超额均方误差

超额均方误差(excess mean square error, EMSE)是衡量自适应算法稳态性能的一个重要指标, 量化的是算法在稳态时输出误差的期望值与理论最优误差之间的差异. 定义 EMSE 为 $\sigma_{\text{ex},k}^2(i)$, 且 $\sigma_{\text{ex},k}^2(i) = E(n_k(i) - e_k(i))^2$, 将式(11)代入 $\sigma_{\text{ex},k}^2(i)$ 并联立式(1)和式(17)可得

$$\sigma_{\text{ex},k}^2(i) = \text{tr}(\Delta \mathbf{w}_{k-1}(i) \Delta \mathbf{w}_{k-1}^T(i) \mathbf{x}_k(i) \mathbf{x}_k^T(i)).\tag{25}$$

2.2.2 均方差

均方差(mean squared deviation, MSD)是衡量算法在迭代过程中得到的系数估计向量与真实向量之间偏差的重要指标, 即 $\text{MSD} = E(\|\Delta \mathbf{w}_k(i)\|^2)$. 记

$$E(\Delta \mathbf{w}_k(i) \Delta \mathbf{w}_k^T(i)) = \mathbf{U}_k(i), \quad \mathbf{X}_k(i) = E(\mathbf{x}_k(i) \mathbf{x}_k^T(i)),$$

此时 MSD 可表示为

$$E(\|\Delta \mathbf{w}_k(i)\|^2) = \text{tr}(E(\Delta \mathbf{w}_k(i) \Delta \mathbf{w}_k^T(i))) = \text{tr}(\mathbf{U}_k(i)).\tag{26}$$

将式(18)乘以自身转置并取期望, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k(i) = & \mathbf{U}_{k-1}(i) - E(\mathbf{S}_{D,k}(i))\mathbf{X}_k(i)\mathbf{U}_{k-1}(i) - \mathbf{U}_{k-1}(i)\mathbf{X}_k(i)E(\mathbf{S}_{D,k}(i)) + \\ & E(\mathbf{S}_{D,k}(i))(\mathbf{X}_k(i)\text{tr}(\mathbf{X}_k(i)\mathbf{U}_{k-1}(i)) + 2\mathbf{X}_k(i)\mathbf{U}_{k-1}(i)\mathbf{X}_k(i))E(\mathbf{S}_{D,k}(i)) + \\ & \sigma_k^2 E(\mathbf{S}_{D,k}(i))\mathbf{X}_k(i)E(\mathbf{S}_{D,k}(i)). \end{aligned}$$

(27)

式(27)即为 $\mathbf{U}_k(i)$ 的递归等式.

2.3 复杂度分析

在输入向量长度为 M 时, 对比 VSSILMS 算法^[8]、NCILMS 算法^[10] 和本文 IRLS 算法在每个节点进行一次迭代时的计算复杂度, 结果列于表 1. 由表 1 可见, 本文算法计算复杂度大于两种较新的增量式 LMS 算法, 这是由于 IRLS 算法基于 RLS 框架, 需维护并更新 M^2 维协方差矩阵, 因此复杂度上升至 $O(M^2)$, 单次迭代运算量显著增大.

表 1 不同算法在每个节点每次迭代时的计算复杂度

Table 1 Computational complexity of different algorithms at each iteration of each node		
算法	乘法次数	加法次数
VSSILMS	$2M+3$	$2M+3$
NCILMS	$2M+5$	$2M+3$
IRLS	$3M^2+4M$	$2M^2+3M+1$

3 模拟结果

下面考察 IRLS 算法在不同场景下的性能. 设未知向量 $\mathbf{w}^0 = (1, 1, \dots, 1)^T / \sqrt{M}$, 向量长度 $M=5$, 节点个数 $N=20$, $n_k(i)$ 是零均值方差为 σ_k^2 的高斯随机变量. 在实际应用中, 遗忘参数 λ 的选取范围通常为 $0.99 < \lambda < 1$. λ 越接近 1 算法稳态误差越小, 滤波结果更平滑; λ 越小, 算法对近期数据赋予更高权重, 稳态误差会增大, 对噪声也更敏感, 但对环境变化的追踪能力更强. 本文实验中选取 $\lambda=0.999$. 两种实验场景分别为: 1) 输入节点数据为白噪声; 2) 输入节点数据之间相关系数为 0.5. 图 2 为两种场景下的输入节点数据方差分布.

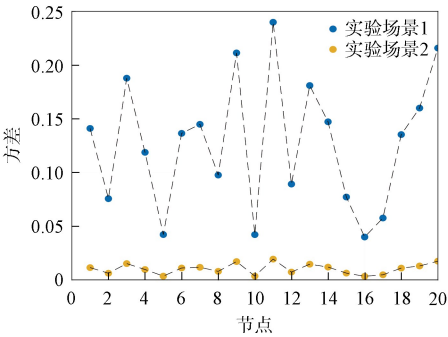


图 2 不同实验场景下不同节点的方差

Fig. 2 Variance of different nodes in different experimental scenarios

进行 100 次独立实验取均值, 对比 IRLS, VSSILMS^[8] 和 NCILMS^[10] 算法在两种应用场景、不同信噪比下节点 N 的 MSD, 结果如图 3~图 5 所示. 由图 3~图 5 可见, IRLS 算法较其他两种 LMS 类算法有较小的 MSD 误差范数. 对比两种实验场景, 在输入节点数据有一定相关性的背景下, IRLS 较 NCILMS 算法收敛性有更大程度的提高.

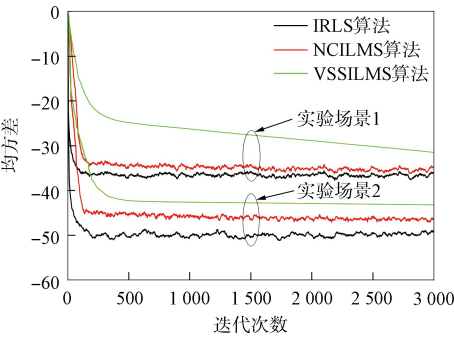


图 3 信噪比为 10 dB 时不同算法的均方差对比结果

Fig. 3 Comparison results of mean square errors of different algorithms when signal-to-noise ratio is 10 dB

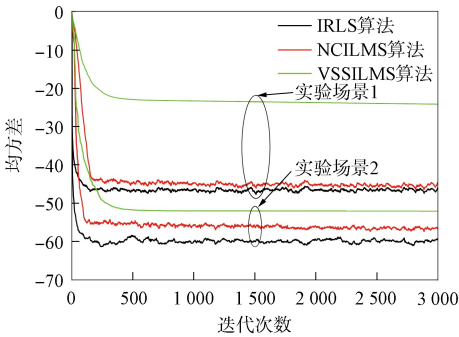


图 4 信噪比为 20 dB 时不同算法的均方差对比结果

Fig. 4 Comparison results of mean square errors of different algorithms when signal-to-noise ratio is 20 dB

图 6 为 3 种算法在实验场景 1 和 20 dB 信噪比背景下各算法的 EMSE 迭代曲线. 由图 6 可见, IRLS 算法相较于其他两种算法有较小的 EMSE, 表明该算法在达到稳态后系数向量估计值接近实际值, 有较好的收敛性能.

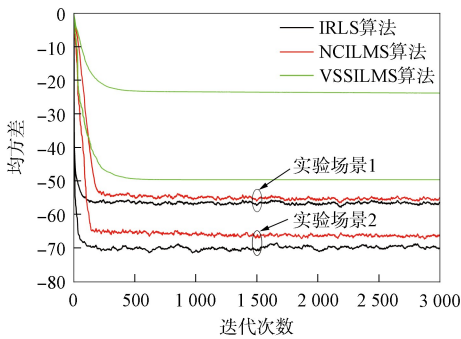


图 5 信噪比为 30 dB 时不同算法的均方差对比结果

Fig. 5 Comparison results of mean square errors of different algorithms when signal-to-noise ratio is 30 dB

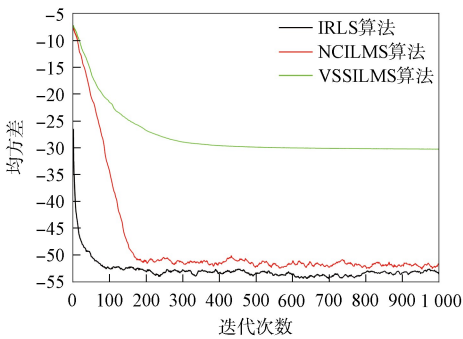


图 6 超额均方误差理论值与实验值对比

Fig. 6 Comparison between theoretical values and experimental values of excess mean square error

将式(23)的实验结果作为理论值, 节点迭代形成的均方差(MSD)作为实验值, 进行 200 次独立实验取均值. 实验结果如图 7 和表 2 所示. 由图 7 和表 2 可见, 两种类型数据值的偏差均较小, 体现了本文算法的稳定性及实验结果的可靠性. 随着信噪比的增加, MSD 减小且理论值与实验值的拟合精度提高, 但在迭代初期两者的拟合速度有一定程度的降低.

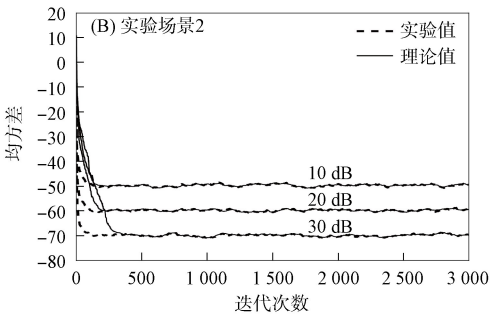
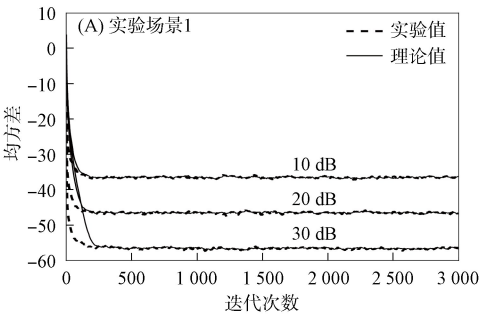


图 7 两种实验场景下不同信噪比时均方差的理论值与实验值对比

Fig. 7 Comparison between theoretical values and experimental values of mean square error under different signal-to-noise ratios in two experimental scenarios

表 2 两种实验场景下均方差的理论值与实验值对比结果

Table 2 Comparison results between theoretical values and experimental values of mean square error in two experimental scenarios									
实验场景	信噪比/dB	迭代次数	理论值	实验值	实验场景	信噪比/dB	迭代次数	理论值	实验值
1	10	500	-36.407 4	-36.677 2	2			-60.484 2	-60.595 4
2			-49.346 5	-49.568 2	1	20	3 000	-46.722 8	-46.726 2
1	10	1 500	-36.663 1	-36.445 4	2			-59.414 3	-59.102 6
2			-48.855 3	-49.212 4	1	30	500	-56.593 7	-56.594 3
1	10	3 000	-36.262 1	-36.339 2	2			-70.040 0	-69.971 9
2			-49.441 4	-49.319 9	1	30	1 500	-56.879 4	-56.839 4
1	20	500	-46.520 6	-46.334 5	2			-69.772 8	-69.854 2
2			-59.226 2	-59.664 3	1	30	3 000	-56.760 8	-56.428 4
1	20	1 500	-46.591 7	-47.125 2	2			-69.419 1	-69.744 2

综上所述, 针对现有增量式最小均方算法仅利用各节点的局部数据进行局部估计, 在信息交互受限条件下估计精度较低的问题, 本文提出了一种增量式的 RLS 算法. 相比于目前较新的增量式 LMS 类算法, 在不同的应用场景下提高了参数估计精度. 同时, 给出 IRLS 算法的理论分析并与实验结果

作对比,证明了本文算法的可靠性.

参 考 文 献

- [1] SAYED A H. Adaptive Networks [J]. Proceedings of the IEEE, 2014, 102(4): 460-497.
- [2] LOPES C G, SAYED A H. Incremental Adaptive Strategies over Distributed Networks [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(8): 4064-4077.
- [3] LOPES C G, SAYED A H. Diffusion Least-Mean Squares over Adaptive Networks: Formulation and Performance Analysis [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(7): 3122-3136.
- [4] LOPES C G, SAYED A H. Distributed Adaptive Incremental Strategies: Formulation and Performance Analysis [C]//International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Piscataway, NJ: IEEE, 2006: 584-587.
- [5] SCHIZAS I D, MATEOS G, GIANNAKIS G B. Distributed LMS for Consensus-Based in-Network Adaptive Processing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(6): 2365-2382.
- [6] YU Y, ZHAO H. Robust Incremental Normalized Least Mean Square Algorithm with Variable Step Sizes over Distributed Networks [J]. Signal Processing, 2018, 144: 1-6.
- [7] ALIABADI A, CHEHEL A M, GHOBADI C. Theoretical Performance Analysis of Sparse System Identification Using Incremental and Diffusion Strategies over Adaptive Networks [J]. Wireless Personal Communications, 2019, 109(2): 1181-1193.
- [8] SAEED M O B, ZERGUINE A. An Incremental Variable Step-Size LMS Algorithm for Adaptive Networks [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2019, 67(10): 2264-2268.
- [9] SAEED M O B, PASHA S A, ZERGUINE A. A Variable Step-Size Incremental LMS Solution for Low SNR Applications [J]. Signal Processing, 2021, 178: 107730-1-107730-8.
- [10] SAEED M O B, ZERGUINE A, HAMEED U, et al. An Incremental Noise Constrained LMS Algorithm [J]. Signal Processing, 2023, 213: 109187-1-109187-9.
- [11] DINIZ P S R. Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation [M]. 5th ed. New York: Springer, 2020: 156-187.
- [12] SAYED A H, LOPES C G. Distributed Recursive Least-Squares Strategies over Adaptive Networks [C]//Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Piscataway, NJ: IEEE, 2006: 233-237.
- [13] CATTIVELLI F S, LOPES C G, SAYED A H. A Diffusion RLS Scheme for Distributed Estimation over Adaptive Networks [C]//Signal Processing Advances in Wireless Communications. Piscataway, NJ: IEEE, 2007: 1-5.
- [14] CATTIVELLI F S, LOPES C G, SAYED A H. Diffusion Recursive Least-Squares for Distributed Estimation over Adaptive Networks [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(5): 1865-1877.
- [15] LEUNG S H, SO C F. Gradient-Based Variable Forgetting Factor RLS Algorithm in Time-Varying Environments [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8): 3141-3150.

(责任编辑:韩 啸)