doi：10. 12068/j. issn. 1005－3026. 2026. 20269019

可调网格涡卷Hamilton保守混沌系统的设计及其FPGA实现

余 飞[1]，应志杰[1]，张冯媛[1]，王春华[2]
（1. 长沙理工大学 物理与电子科学学院，湖南 长沙 410114；2. 湖南大学 计算机学院，湖南 长沙 410082）

摘 要：本文基于广义Hamilton系统理论，构建了1个新型五维Hamilton保守混沌系统，通过Hamilton能量守恒以及相空间体积不变验证了其保守特性．动力学分析表明，该系统具有对称Lyapunov指数谱、遍历性相轨迹等典型保守混沌特性，并展现出极端多稳定性．为实现多向网格涡卷的可控生成，提出了1种参数独立可调的分段函数，通过调节参数可灵活扩展系统平衡点分布．基于此，分别构建了单向、双向以及三向分布的可调网格多涡卷保守混沌系统，实现了网格涡卷的生成．此外，还观察到了系统具有初值驱动的初始偏移升压行为．最后，基于FPGA（field-programmable gate array）平台完成了系统的硬件实现，验证了其工程可行性．

关 键 词：保守混沌系统；多涡卷；初始偏移升压行为；FPGA
中图分类号：TP 271^{+}.62 **文献标志码**：A **文章编号**：1005-3026(2026)07-0139-13

Design and FPGA Implementation of a Hamiltonian Conservative Chaotic System with Adjustable Grid Scrolls

YU Fei[1], *YING Zhi-jie*[1], *ZHANG Feng-yuan*[1], *WANG Chun-hua*[2]
(1. School of Physics & Electronic Science, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China; 2. College of Computer Science and Electronic Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China. Corresponding author: WANG Chun-hua, E-mail: wch1227164@hnu.edu.cn)

Abstract: In this paper, a novel five-dimensional Hamiltonian conservative chaotic system was constructed based on the generalized Hamiltonian system theory. Its conservative property was verified by means of Hamiltonian energy conservation and the invariance of phase space volume. Dynamic analysis demonstrates that the system has typical conservative chaotic characteristics, including a symmetric Lyapunov exponent spectrum and ergodic phase trajectories and exhibits extreme multistability. To achieve the controllable generation of multi-directional grid scrolls, a piecewise function with independently adjustable parameters was proposed. By tuning the parameters, the distribution of system equilibrium points can be flexibly extended. On this basis, adjustable grid multi-scroll conservative chaotic systems with unidirectional, bidirectional, and three-directional distributions were constructed respectively, realizing the generation of grid scrolls. In addition, the initial offset boosting behavior driven by initial values was observed in the system. Finally, the hardware implementation of the system was completed on a field-programmable gate array (FPGA) platform, which verified its engineering feasibility.

Key words: conservative chaotic system; multi-scroll; initial offset boosting behavior; FPGA

混沌系统由于其不可预测性、类噪声性和初值敏感性等特点，多用于保密通信、图像加密等安全领域[1-2]．在过去对于混沌系统的研究中，设计与分析具有复杂动力学行为的混沌系统一直是研究人员关注的热点．后来，学术界在混沌研究领域确立了2种主要分类：耗散混沌系统

收稿日期：2026-03-17
基金项目：国家自然科学基金资助项目（62571183）；湖南省自然科学基金资助项目（2025JJ50368）；湖南省教育厅科学研究基金资助项目（24A0248）；长沙市指导性科技计划资助项目（kzd2501129）．
作者简介：余 飞（1984—），男，安徽安庆人，长沙理工大学副教授．
通信作者：王春华，E-mail：wch1227164@hnu.edu.cn.

(dissipative chaotic system,DCS)和保守混沌系统(conservative chaotic system,CCS).研究表明,由于CCS相较于DCS在相空间轨迹上具有更强的优势,其无吸引子的非收敛相空间轨迹更适合于在图像密码处理与安全通信方面的应用[3-4].

多涡卷混沌系统(multi-scroll chaotic system,MSCS)作为非线性混沌领域的核心分支,因其能够产生更为复杂的拓扑结构而备受关注,MSCS比单涡卷混沌系统表现出更好的复杂性,这表明其在混沌应用中的潜力更大[5-6].现阶段大多数研究成果均围绕多涡卷耗散混沌系统(multi-scroll dissipative chaotic system,MSDCS)展开.例如,Wang等[7]通过级联奇偶型非线性电阻单元构建多段分段线性Chua二极管,实现了多涡卷混沌吸引子;Zhang等[8]则利用具有多段分段线性忆导函数的忆阻器直接耦合到蔡氏系统,实现了任意数量双卷吸引子的生成.尽管这些研究在多涡卷生成方面取得了重要进展,但它们局限于DCS,存在DCS的固有缺陷:一方面,由于MSDCS具有吸引子,其相空间轨迹具有收敛性,动力学遍历性存在上限;另一方面,现有方案大多聚焦单方向涡卷拓展.例如,陈杰等[9]基于分数阶忆阻Hopfield神经网络实现涡卷沿单一维度线性排布,多涡卷的调控难度大、参数耦合性强,且耗散特性导致混沌序列难以满足其在高级加密应用中的需求.

相较于DCS,CCS因其具有能量守恒、相体积不变、遍历性强以及无吸引子等独特优势,更适用于高安全性的混沌应用.因此,结合CCS和MSCS的多涡卷保守混沌系统(multi-scroll conservative chaotic system,MSCCS)成为混沌安全领域的新型研究方向.近年来,研究者开始探索CCS中的网格涡卷设计.Ji'e等[10]通过引入分段线性约束的正弦函数,在四维哈密顿保守混沌系统(Hamiltonian conservative chaotic system,HCCS)中扩展了驻点分布,实现了单向、双向以及三向网格涡卷混沌流的生成,但其仅能通过单一参数调控涡卷数量,无其他独立调控维度;Kong等[11]基于最简$2n$+1维HCCS构造方式,通过初值调控Hamilton能量大小,使系统轨迹包裹不同数量的中心平衡点,间接实现奇数多涡卷生成,但该系统的多涡卷生成仅依赖Hamilton能量,无独立可调的非线性函数参数,不能形成非对称网格涡卷.上述方法在涡卷数量、间距以及幅度调节方面缺乏独立的控制参数,难以实现灵活的多维可调性.相比之下,本文所提出的分段函数可独立调控涡卷数量、零点距离以及幅度,实现了多维控制,可以灵活生成非对称网格涡卷.

基于此,本文基于Hamilton系统理论,构建了1个新型五维HCCS,并通过验证其能量守恒以及相体积不变性证明了其保守性.在此基础上,提出了1个参数可独立调控的分段函数,通过调节零点个数m、间距L和幅度A,实现了对系统平衡点分布的灵活扩展,进而构建了单向、双向、三向网格多涡卷保守混沌系统,可生成n涡卷、$n\times m$网格涡卷以及$n\times m\times p$立体网格涡卷.该系统在固定参数下表现出极端稳定性,即初值变化可引发无数条共存轨迹,并且观察到初始偏移升压行为,即初值驱动的阶梯式共存混沌流与拟周期窗口.最后,基于FPGA平台完成了系统的硬件实现,验证了理论模型的实际可行性.

1 HCCS的构建

1.1 广义Hamilton系统

混沌系统可由广义Hamilton系统来表示,其动态系统Σ_0如式(1)所示:

$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})]\nabla\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u},\\ \dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}).\end{cases}\tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$是状态向量,即$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^{n\times n}$是满足$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$的斜对称矩阵,表示系统的能量守恒分量;$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^{n\times n}$是满足$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$的正定矩阵,表示系统的能量耗散部分;$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$表示状态空间$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$中的Hamilton能量函数;$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^{n\times m}$为输入增益向量;$\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^{m\times 1}$为作用于系统的广义力输入;$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{m\times 1}$为系统输出.Hamilton能量函数$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$的变化与系统的内部耗散及外部能量交换相关,可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}u-\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\nabla\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}).\tag{2}$$

保守系统和耗散系统的主要区别在于Hamilton能量和相体积的守恒,因此除去外部输入项和能量耗散项,系统能量守恒($\mathrm{d}\boldsymbol{H}/\mathrm{d}t=0$),可由此构造出一类保守系统.所构造的保守Hamilton系统的微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\nabla\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}).\tag{3}$$

Hamilton能量的梯度可以表示为$\nabla\boldsymbol{H}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,Hamilton能量对应的时间导数为

$$\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x})=\nabla\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\nabla\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}).\tag{4}$$

由于$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$的斜对称性，在没有外部能量输入与耗散的情况下，系统不与外界进行能量交换，能量仅在系统内部进行交换，因此可以保证总能量的守恒.对于系统(3)，其Hamilton能量也保持不变.对于HCCS来说，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$上的非零元素可以用$n(n-1)/2$个方程来表示，并用$f_1,f_2,\cdots,f_{\frac{n(n-1)}{2}}$来表示这些方程，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$即为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} 0 & f_1 & \cdots & f_{n-2} & f_{n-1} \\ -f_1 & 0 & \cdots & f_{2n-4} & f_{2n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -f_{n-2} & -f_{2n-4} & \cdots & 0 & f_{\frac{n(n-1)}{2}} \\ -f_{n-1} & -f_{2n-3} & \cdots & -f_{\frac{n(n-1)}{2}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Hamilton梯度向量不仅可以用单一的状态变量来表示，还可以用n个与状态变量有关的函数q来表示，Hamilton能量的梯度可表示为

$$\nabla\boldsymbol{H}=[q_1(x_1),q_2(x_2),\cdots,q_n(x_n)]^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

因此，根据式(3)，(5)，(6)可得，n维HCCS可以表示为

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1=f_1q_2(x_2)+\cdots+f_{n-2}q_{n-1}(x_{n-1})+f_{n-1}q_n(x_n),\\ &\dot{x}_2=-f_1q_1(x_1)+\cdots+f_{2n-4}q_{n-1}(x_{n-1})+f_{2n-3}q_n(x_n),\\ &\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\ &\dot{x}_{n-1}=-f_{n-2}q_1(x_1)-f_{2n-4}q_2(x_2)-\cdots-f_{\frac{n(n-1)}{2}}q_n(x_n),\\ &\dot{x}_n=-f_{n-1}q_1(x_1)-f_{2n-3}q_2(x_2)-\cdots-f_{\frac{n(n-1)}{2}}q_{n-1}(x_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

1.2　5D HCCS的构建

根据式(7)，以1个5D HCCS为例，结构矩阵$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$可以由10个方程来表示，不妨令$f_1=a,f_5=d$，$f_6=bx_3,f_9=cx_1,f_2=f_3=f_4=f_7=f_8=f_{10}=0$，且$\nabla\boldsymbol{H}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，其中$a,b,c,d$为系统参数，则可以得到新的5D HCCS：

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1=ax_2,\\ &\dot{x}_2=-ax_1+dx_3+bx_3x_4,\\ &\dot{x}_3=-dx_2+cx_1x_5,\\ &\dot{x}_4=-bx_2x_3,\\ &\dot{x}_5=-cx_1x_3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

若系统是1个CCS，则该系统应当具备CCS的所有优良特性.接下来将通过数值分析来证明该系统的能量和体积在相空间中是否守恒，并对其混沌性能进行分析，以证明它具备优良的保守混沌特性.

1.3　5D HCCS的保守性分析

本节将对5D HCCS的Hamilton能量、相体积空间进行分析.

1.3.1　Hamilton能量分析

根据Hamilton能量的梯度$\nabla\boldsymbol{H}$，可以得到Hamilton能量的表达式为

$$\boldsymbol{H}=\int\nabla\boldsymbol{H}(\cdot)\mathrm{d}H=\sum_{i=1}^{5}\int x_i\mathrm{d}x_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}x_i^2+c. \tag{9}$$

Hamilton功率是指Hamilton能量随时间的变化率，即$\mathrm{d}\boldsymbol{H}/\mathrm{d}t$，可用于判断系统Hamilton能量的保守性.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{5}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial x_i}\dot{x}_i=0. \tag{10}$$

Hamilton功率为零，由此可以得出结论：系统(8)为Hamilton能量守恒的混沌系统.

1.3.2　相空间体积分析

对于1个系统来说，相空间体积随时间的变化率$\dot{V}$与散度$\nabla\cdot G$的关系可由等式(11)表示.若在相空间内，向量场的散度恒为0，即$\nabla\cdot G\equiv0$，则对任意时刻t，有$\dot{V}(t)=0$，即相体积不随时间变化，系统为保守系统；若在相空间内，向量场的散度满足$\nabla\cdot G<0$，则$\dot{V}(t)<0$，即相体积随时间逐渐收缩，系统为耗散系统.

$$\dot{V}(t)=\int_{V(t)}(\nabla\cdot G)\mathrm{d}V. \tag{11}$$

对于系统(8)而言，其散度为

$$\nabla\cdot G=\sum_{i=1}^{5}\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_i}=\frac{\partial(ax_2)}{\partial x_1}+\frac{\partial(-ax_1+dx_3+bx_3x_4)}{\partial x_2}+\frac{\partial(-dx_2+cx_1x_5)}{\partial x_3}+\frac{\partial(-bx_2x_3)}{\partial x_4}+\frac{\partial(-cx_1x_3)}{\partial x_5}=0. \tag{12}$$

因此可以得出系统(8)为CCS，基于上述分析可得该系统为5D HCCS.

1.4　动力学分析

本节使用相图、Lyapunov指数(Lyapunov exponent，LE)、分岔图、Poincaré映射图、平衡点对系统(8)进行分析.

1.4.1　相　　图

在CCS中，由于没有耗散，不存在吸引子，其动力学完全由平衡点控制.混沌系统的相图可以最直观地将系统状态转化为图像描述，设计系统参数$(a,b,c,d)=(8,2,9,5)$，初值设置为$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,1,1,1,1)$得到相图，如图1所示，可以看出混沌轨迹布满整个相平面，并且没有任何可识别的吸引子，这是保守系统固有的特征.为了研究该系统的遍历性，截取$x_2=0$的截面构造了Poincaré截面，得到了在x_1-x_3平面上的离散映射，如图1d所示，可以清晰地看出Poincaré截面上的点随机分布，点集无孤立离散点或连续闭合曲线，为堆

叠的点集,表明该系统的混沌性.

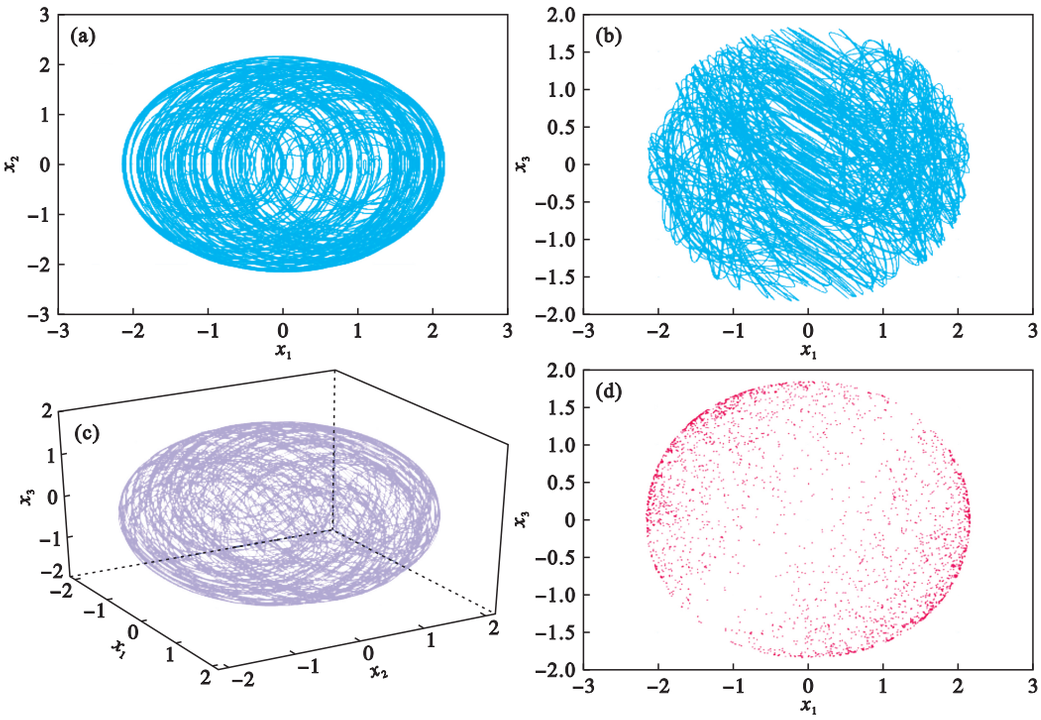


图 1 系统相图和 Poincaré 截面

Fig. 1 System phase diagram and Poincaré section

(a)—x_1-x_2二维相图;(b)—x_1-x_3二维相图;(c)—$x_1-x_2-x_3$三维相图;(d)—Poincaré 截面.

1.4.2 Lyapunov指数

为了分析该系统的混沌状态,首先针对其系统参数对系统动力学的影响进行分析.本文给出了系统在不同参数下对应的Lyapunov指数谱,如图2所示.为了控制单一变量,在测量每个参数对应的Lyapunov指数谱时,其他参数固定为$(a,b,c,d)=(8,2,9,5)$,初始条件设为(1, 1, 1, 1, 1).在1个非线性系统中,可以用Lyapunov指数谱来判断系统所处状态,如果至少存在1个正的Lyapunov指数,则系统是混沌的.由图2可以看出,在系统参数为[0, 10]时,均至少有1个正的Lyapunov指数,在该范围内没有出现准周期窗口,因此可以得出混沌区域约占绝大部分的参数空间.可以观察到所有谱图均有明显的对称性,这表明系统参数的变化对系统动态影响具有对称性,并且Lyapunov指数之和均为0,这些均满足CCS的典型特征.

1.4.3 极端多稳定性行为

极端多稳定性行为表现为在相同系统参数条件下,系统呈现出不同的动态行为,在CCS中可以表现为无限个不同轨道共存.Hamilton能量是CCS的核心,作为守恒量其会在相空间内定义出超球面能量流形,系统的每条演化轨迹都会严格约束在该流形的表面.由式(9)可知,在无外力且无能量耗损的情况下,Hamilton能量由初值唯一确定,其值在0到无穷大范围内连续变化,Hamilton能量的每个数值都对应着1个独特的能量流形,这些流形共同构成了系统动力学行为的不变超曲面.与DCS中轨道会沿着能量流形向吸引子逐步演化的过程不同,CCS能保持相空间体积的守恒,将每条轨道始终限制在其初始对应的能量流形内.CCS这种固有的约束特性,使得其可以实现无数条轨道共存,并且这些轨道各自对应着单一的能量流形.

在图3中,呈现了初始条件为$(x_1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$时的Lyapunov指数谱、分岔图以及谱熵(spectral entropy, SE)复杂性图.当x_1初值($x_1(0)$)的取值在[–0.95, 0.95]范围内时,系统的Hamilton能量较低,5条Lyapunov指数谱线趋近于0,这表明此时系统表现为准周期行为.由式(9),当仅改变x_1且其余初值固定为0.1时,$\boldsymbol{H}=1/2x_1^2+0.02+c$,故Hamilton能量会随着$|x_1(0)|$的增大单调上升.图3b的纵坐标为系统演化过程中状态变量x_1的局部极大值$x_{1\max}$,该指标可直观反映不同初值下轨道在相空间的运动幅值范围,间接表征系统Hamilton能量的高低.当Hamilton能量突破某个临界阈值后,系统会从准周期状态转变为混沌状态,其典型特征是出现了正值的Lyapunov指数.由图3c的SE复杂性图可见,用于衡量频率分量分

布均匀性的谱熵会随着Hamilton能量的增大而升高，并在混沌状态下达到更高的数值.这一现象表明系统在高能量状态下其遍历性和伪随机性均有所增强.

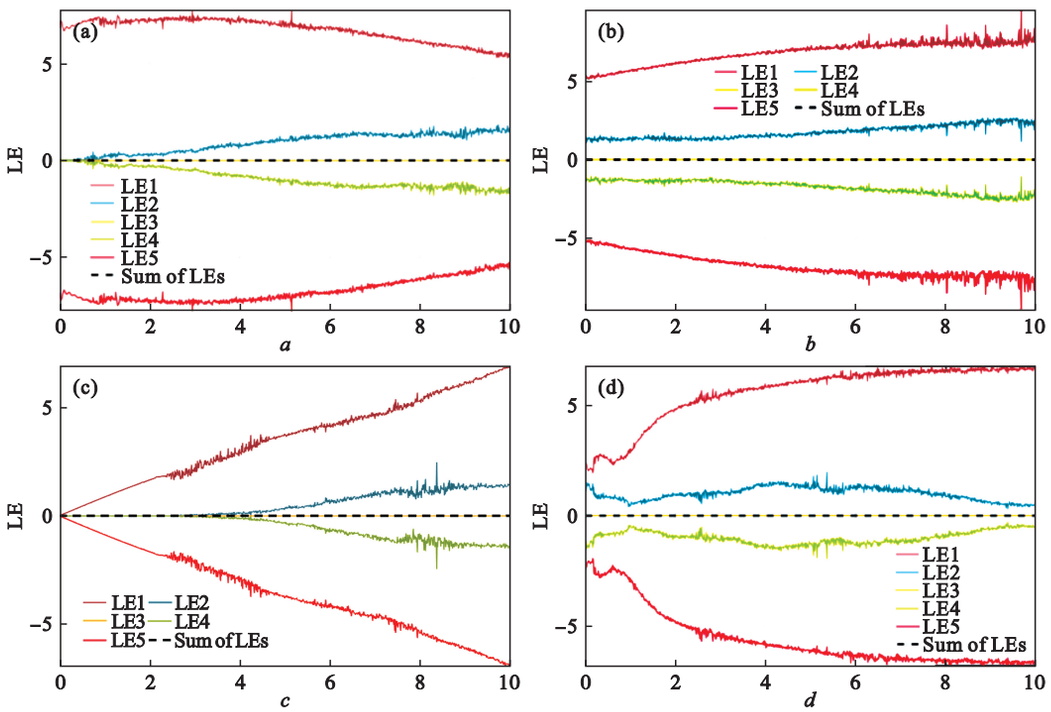
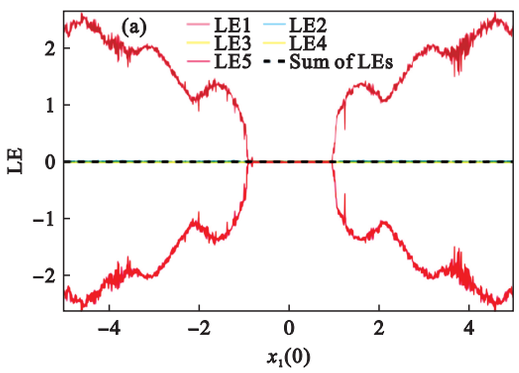


图2　不同系统参数对应的Lyapunov指数谱

Fig. 2　Lyapunov exponent spectrum corresponding to different system parameters

(a)—a对应的LE；(b)—b对应的LE；(c)—c对应的LE；(d)—d对应的LE.

为了进一步分析，设置系统参数为$(a,b,c,d)=(8,2,9,5)$，选取4组具有不同Hamilton能量的初始条件，得到多条共存的运动轨迹(如图4所示).其中，初始条件分别为(0.1，0.1，0.1，0.1，0.1)，(0.4，0.1，0.1，0.1，0.1)，(0.8，0.1，0.1，0.1，0.1)和(1.0，0.1，0.1，0.1，0.1)，对应的Hamilton能量分别为0.025，0.1，0.34和0.58.由图4可以看出，前3个选取的初值对应准周期轨迹，最后1个选取的初值对应混沌轨迹.同时可以观察到随着Hamilton能量的增加，对应的轨迹在相空间中覆盖的范围同样会扩大.在无限的初始条件范围下，该系统可以支持无限条共存轨迹，且每条轨迹严格限制在其对应的能量流形上，这一特征充分体现了CCS的极端多稳定性.



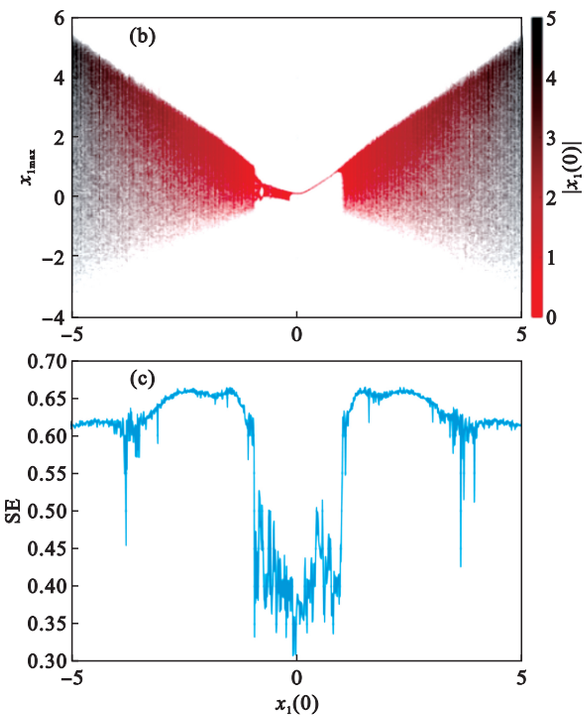


图3　当$x_1\in[-5,5]$时的Lyapunov指数谱、分岔图和SE复杂性图

Fig. 3　Lyapunov exponent spectrum, bifurcation diagram, and SE complexity diagram for $x_1\in[-5,5]$

(a)—Lyapunov指数谱；(b)—分岔图；(c)—SE复杂性图.

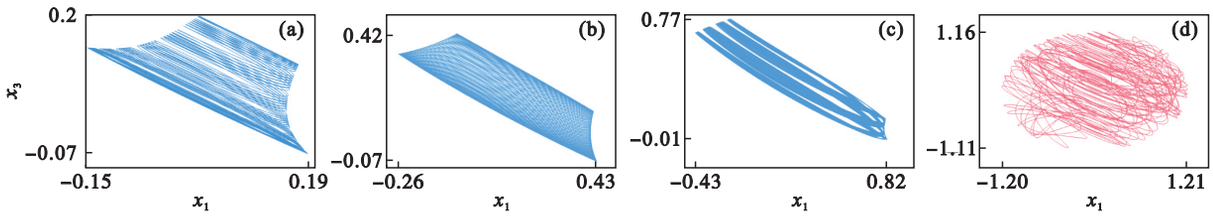


图 4 在不同初值和 Hamilton 能量下的极端多稳定性的相图

Fig. 4 Phase diagrams of extreme multistability under different initial values and Hamiltonian energies

(a)—(0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1); (b)—(0.4, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1); (c)—(0.8, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1); (d)—(1.0, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1).

1.4.4 平衡点分析

CCS 不同于 DCS，其不具备吸引子，不具有渐近到达平衡点的特点；CCS 只有中心点和鞍点，因此为了找到系统(8)的平衡点，这里令系统(8)等号左侧均为 0，可得到方程(13).

$$\left.\begin{aligned} 0&=ax_2,\\ 0&=-ax_1+dx_3+bx_3x_4,\\ 0&=-dx_2+cx_1x_5,\\ 0&=-bx_2x_3,\\ 0&=-cx_1x_3. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

由式(13)可知，如等式成立则必有 $x_1=x_2=0$，此时 x_5 可以取任意实数，当 $x_3=0$ 时，可以得出 x_4 的取值范围为全体实数，当 $x_3\neq 0$ 时，则有 $x_4=-d/b$. 综上所述系统(8)的平衡点为 $(0,0,0,k_1,k_2)$ 和 $(0,0,k_3,-d/b,k_4)$，其中 $k_1,k_2,k_4\in\mathbf{R}$，$k_3\in\mathbf{R}^*$，这里取平衡点分别为 $(0,0,0,-d/b,0)$ 和 $(0,0,-1,-d/b,0)$，对该系统在平衡点处进行线性化处理，其 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{ac}}=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0\\ -a & 0 & d+bx_4 & bx_3 & 0\\ cx_5 & -d & 0 & 0 & cx_1\\ 0 & -bx_3 & -bx_2 & 0 & 0\\ cx_3 & 0 & cx_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

令其特征方程为 0，可得

$$\begin{vmatrix} \lambda & -a & 0 & 0 & 0\\ a & \lambda & -(d+bx_4) & -bx_3 & 0\\ -cx_5 & d & \lambda & 0 & -cx_1\\ 0 & bx_3 & bx_2 & \lambda & 0\\ -cx_3 & 0 & -cx_1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

其中 λ 表示特征值，将第一类平衡点 $(0,0,0,-d/b,0)$ 代入式(15)可得

$$\lambda^3(\lambda^2+a^2)=0. \tag{16}$$

求解方程(16)可得特征值为三重特征值 $\lambda_{1,2,3}=0$ 和一对共轭复特征值 $\lambda_{4,5}=\pm ia$，因此其平衡点类型为中心点；将第二类平衡点 $(0,0,-1,-d/b,0)$ 代入式(15)可得

$$-\lambda^3(\lambda^2+a^2+b^2)=0. \tag{17}$$

求解方程(17)可得特征值为三重特征值 $\lambda_{1,2,3}=0$ 和一对共轭复特征值 $\lambda_{4,5}=\pm i\sqrt{a^2+b^2}$，因此该平衡点类型也为中心点，这符合 CCS 的平衡点类型.

2 MSCCS 的构建

系统平衡点的拓扑结构与多涡卷吸引子具有严格的映射关系. 针对现有的平衡点，若将 1 个或多个系统变量替换为 1 个分段函数，则可以获得更多平衡点，这无疑增加了多涡卷系统的复杂性.

2.1 分段函数的构建

本节提出 1 个可以实现生成可调零点个数、距离和幅度可变的分段函数：

$$g(x)=\left\{\begin{aligned} &kx, m=0,\\ &\frac{A\pi m}{L}(x+L), x<-L,\\ &A(-1)^m\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right), -L\leqslant x\leqslant L,\\ &\frac{A\pi m}{L}(x-L), x>L, \end{aligned}\right\} m=1,2,3,\cdots \tag{18}$$

为了保证函数的连贯性，函数首先分为两段，分别为 $m=0$ 和 $m=1,2,3,\cdots$. 其中斜率系数 $k\in\mathbf{R}^*$ 用于控制当 $m=0$ 时函数的斜率，此时只存在 1 个零点；当 $m=1,2,3,\cdots$ 时，m 控制零点个数，幅值系数 A 控制中段函数的幅度，区间半宽度 L 用于控制零点间距，为了函数的连续性，分段函数两端斜率由 (m,A,L) 共同控制，固定 $A=1$，$L=3$，函数零点分布如图 5 所示. 由于 m 取值不同，此时分段函数出现多个零点，分析可得函数有 $(m+1)$ 个零点；固定 $m=1$，$A=1$，函数由图 6 所示. 由于 L 取值的不同，此时分段函数零点间距出现差异，两侧零点之间距离为 $2L$，分析可得零点间距为 $2L/m$；固定 $m=1$，$L=1$，函数如图 6b 所示，由于 A 取值的不同，此时函数中段幅度出现差异. 综上所述，可以通过控制参数 m，A 和 L 来扩大系统的平衡点，通过参数 m，L 来确定零点的个数和位置，引入参数 A，共同影响函数直线部分的斜

率.由于系统的极端多稳定性可得，当改变斜率时可以完成周期和混沌状态的转变，最后实现多向可控的多涡卷吸引子，此部分只考虑多涡卷状况，因此暂不考虑$m=0$的情况.

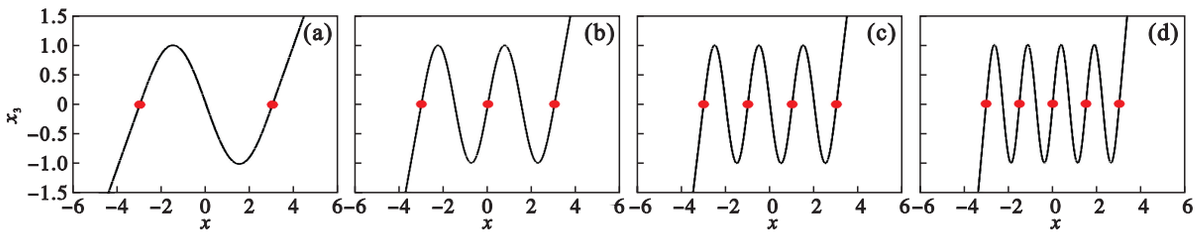


图5　不同m值下零点分布情况

Fig. 5　Distribution of zero points under different m

(a)—m=1；(b)—m=2；(c)—m=3；(d)—m=4.

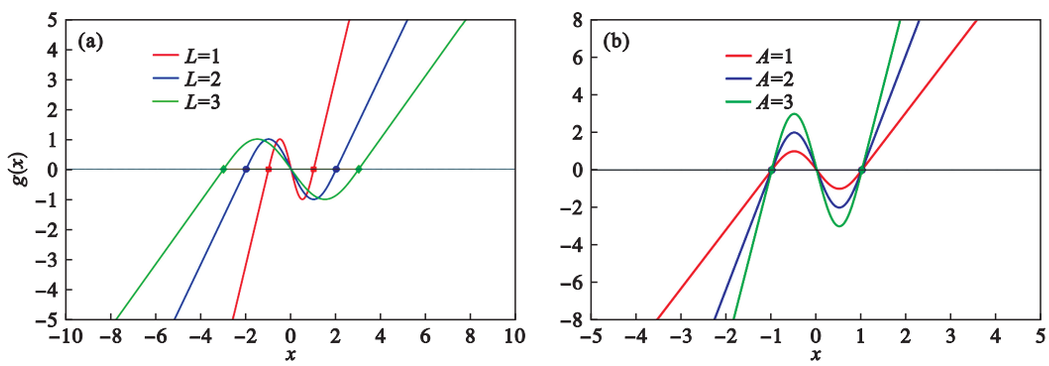


图6　不同参数对函数的影响

Fig. 6　Effect of different parameters on function

(a)—$m=A$=1，L=1，2，3；(b)—$m=L$=1，A=1，2，3.

2.2　单向分布的MSCCS

这里通过引入1个分段函数对多向可控的MSCCS进行建模，选择$f_1=a$，$f_5=d$，$f_6=bx_3$，$f_9=cg(x_1)$，$f_2=f_3=f_4=f_7=f_8=f_{10}=0$，并且Hamilton能量的梯度设置为$\nabla \boldsymbol{H}=[g(x_1),x_2,x_3,x_4,x_5]^{\mathrm{T}}$，其结构矩阵$\boldsymbol{J}_1$如式(19)所示，由此得到新的单向可控的MSCCS，即为系统(20).

$$\boldsymbol{J}_1=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & \mathrm{d} & bx_3 & 0 \\ 0 & -\mathrm{d} & 0 & 0 & cg(x_1) \\ 0 & -bx_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -cg(x_1) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

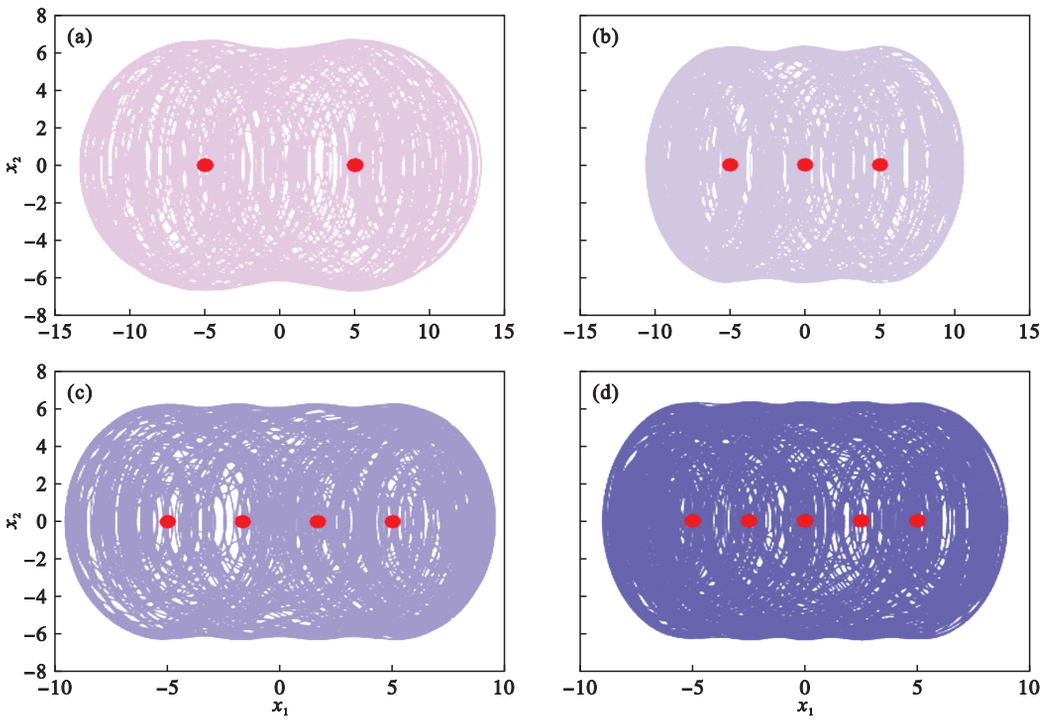
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1&=ax_2, \\ \dot{x}_2&=-ag(x_1)+dx_3+bx_3x_4, \\ \dot{x}_3&=-dx_2+cg(x_1)x_5, \\ \dot{x}_4&=-bx_2x_3, \\ \dot{x}_5&=-cg(x_1)x_3. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

这里固定系统参数为$(a,b,c,d)=(8,2,9,5)$，函数参数为$A=1$，$L=4$，初值为$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,6,1,1,1)$，当在函数$g(x_1)$中选取参数$m=1,2,3,4$时可以得到沿$x$轴方向上分布的双涡卷、三涡卷、四涡卷和五涡卷的混沌吸引子，如图7所示.本文还探究了当其他参数不变时，涡卷数选取的不同对系统(20)产生的影响，如表1所示，当涡卷数量增加时，系统最大Lyapunov指数同步增大，这说明系统复杂性随涡卷数量增加而增强.

在其他条件不变的情况下，固定参数$m=L=1$，通过改变参数$A=(0.500,0.250,0.125,0.002)$计算了其对系统(20)最大Lyapunov指数的影响，结果如表2所示.当A的值为0.500时，最大Lyapunov指数为1.598 2，此时系统处于混沌状态.由表2可得，随着A的取值逐渐变小，系统最大Lyapunov指数逐渐减小，当A取值为0.002时，最大Lyapunov指数为0.010 3(<0.1)，系统处于准周期状态，因此可得调节函数参数A，系统可以在混沌和准周期状态之间转换.

在其他条件不变的情况下，固定参数$m=A=1$，改变L的取值并计算改变后系统(20)的最大Lyapunov指数，如表3所示.可以看到随着L值的增大，最大Lyapunov指数逐渐减小，当$L=2$时最大Lyapunov指数为1.616 6，此时系统处于混沌状态；而当L取值升至120时，最大Lyapunov指数为0.053 6，系统处于准周期状态.

因此,调节函数参数 L 时,系统也可以在混沌和准周期状态间切换.



注:●表示涡卷的数量和涡卷的位置.

图7 参数 m 取值不同时单向涡卷分布情况

Fig. 7 Distribution of unidirectional scrolls at different values of parameter m

(a)—m=1;(b)—m=2;(c)—m=3;(d)—m=4.

表1 不同 m 值下系统最大Lyapunov指数

Table 1 Lyapunov exponents for systems with different m

m	LE_1	LE_2	LE_3	LE_4	LE_5
1	2.278 9	0.009 3	−0.002 0	−0.010 4	−2.275 6
2	2.429 8	0.015 8	−0.001 9	−0.014 5	−2.429 2
3	2.849 6	0.016 4	−0.001 9	−0.014 9	−2.849 1
4	3.441 0	0.012 0	−0.002 1	−0.012 7	−3.438 1

表2 不同 A 取值下系统最大Lyapunov指数

Table 2 Lyapunov exponents of system under different values of A

A	LE_1	LE_2	LE_3	LE_4	LE_5
0.500	1.598 2	0.013 5	−0.001 5	−0.011 2	−1.599 0
0.250	1.148 3	0.005 3	0.002 6	−0.009 0	−1.147 2
0.125	0.769 2	0.011 8	−0.001 8	−0.011 1	−0.768 0
0.002	0.010 3	0.007 4	0.000 1	−0.009 8	−0.007 9

表3 不同 L 取值下系统最大Lyapunov指数

Table 3 Lyapunov exponents of system under different values of L

L	LE_1	LE_2	LE_3	LE_4	LE_5
2	1.616 6	0.009 2	−0.001 3	−0.011 1	−1.613 5
8	1.393 2	0.011 8	−0.001 8	−0.012 6	−1.390 6
32	0.558 6	0.003 1	0.002 9	−0.008 0	−0.556 7
120	0.053 6	0.008 3	0.001 0	−0.009 0	−0.053 8

为了探究系统的多重稳定性,将系统参数固定为 $(a,b,c,d)=(8,2,9,5)$,函数参数设置为 $(m,A,L)=(3,3,2)$,绘制了在不同初值下的混沌吸引子,其中初值为 $(1,x_2,1,1,1)$,选取 $x_2(0)$ 分别为 2,4,6,8,如图8a所示;并绘制了在 $x_3=0$ 平面上对应的Poincaré截面,如图8b所示,可以观察到多个混沌轨迹共存,验证了系统的多重稳定性.对于HCCS来说,随着初值的变化Hamilton能量也会随之变化,由图8可以清晰观察到,随着初值的增大,相轨迹覆盖范围增大,Poincaré截面上的点密度也增加了,这表明随着Hamilton能量的增加,混沌流的范围变宽.

2.3 双向分布的MSCCS

本文同样利用单向分布的MSCCS的构造方式,在不改变结构矩阵(19)的基础上,将Hamilton能量的梯度设置为 $\nabla \boldsymbol{H}=[g(x_1),g(x_2),x_3,x_4,x_5]^{\mathrm{T}}$,可以得到新的在 x 方向和 y 方向上的双向可控的MSCCS:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=ag(x_2),\\ \dot{x}_2&=-ag(x_1)+dx_3+bx_3x_4,\\ \dot{x}_3&=-dg(x_2)+cg(x_1)x_5,\\ \dot{x}_4&=-bg(x_2)x_3,\\ \dot{x}_5&=-cg(x_1)x_3.\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

其中，设置系统参数 $(a,b,c,d)=(8,2,9,5)$，固定初值为 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,15,1,1,1)$. 通过改变 $g(x_1)$ 和 $g(x_2)$ 中的参数 m，可以产生沿 x 方向和 y 方向分布的 $(m+1)\times(m+1)$ 涡卷数的吸引子；此外单独控制 $g(x_1)$ 和 $g(x_2)$ 中的参数 m_1 和 m_2 可以产生沿着 x 方向和 y 方向分布的 $(m_1+1)\times(m_2+1)$ 涡卷数的吸引子. 固定 $g(x_1)$ 和 $g(x_2)$ 中的参数 $A=1$，$L=10$，通过改变 m_1 和 m_2 得到不同组合的沿 x 方向和 y 方向上的多涡卷吸引子，结果如图 9 所示.

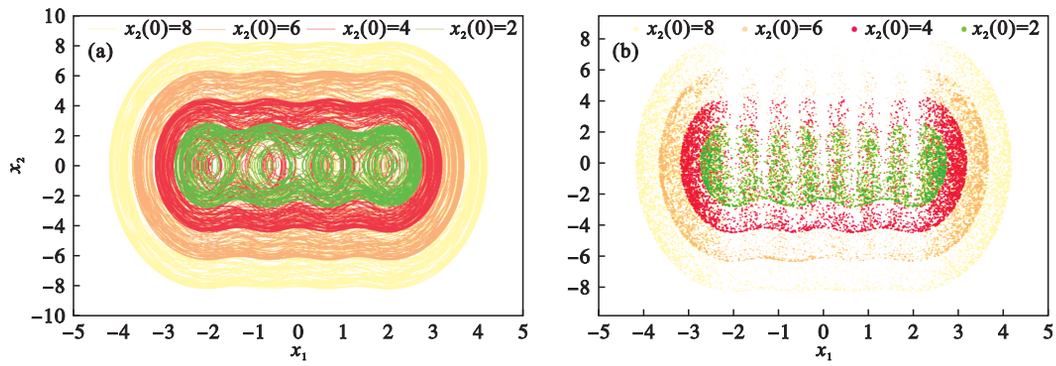


图 8　不同初值时的相图和 Poincaré 截面

Fig. 8　Phase diagrams and Poincaré sections under different initial values

(a)—相图；(b)—Poincaré 截面.

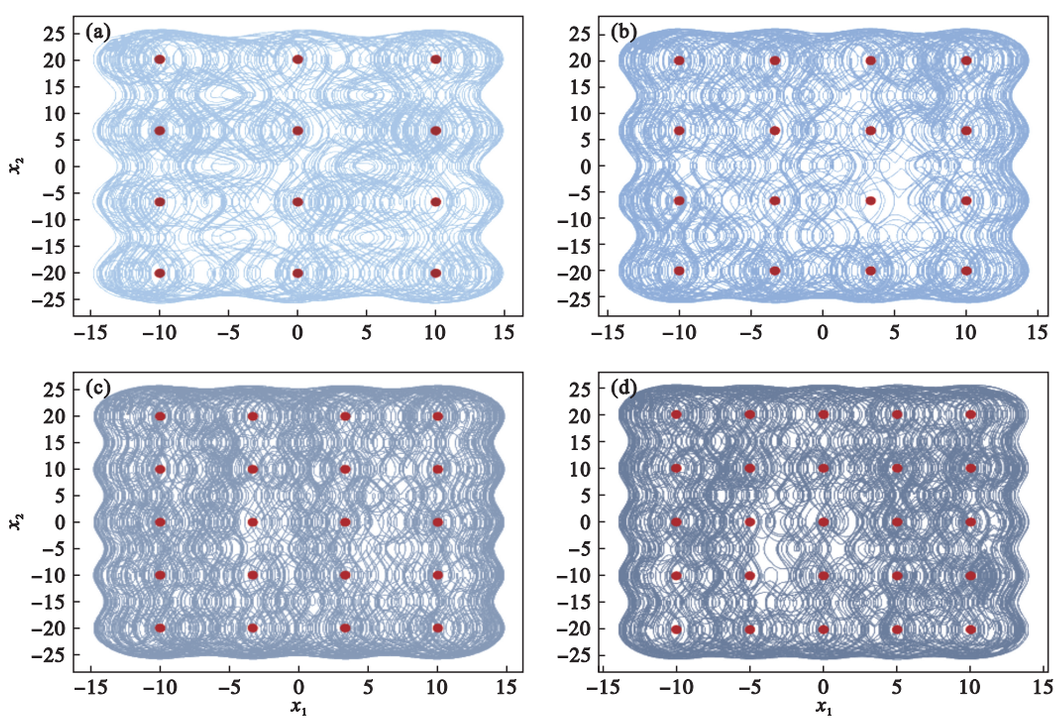


图 9　不同取值下涡卷的分布

Fig. 9　Distribution of scrolls under different values

(a)—3×4 涡卷，$m_1=2$, $m_2=3$；(b)—4×4 涡卷，$m_1=3$, $m_2=3$；(c)—4×5 涡卷，$m_1=3$, $m_2=4$；(d)—5×5 涡卷，$m_1=4$, $m_2=4$.

为了保证研究的完整性，同样对该双向分布的 MCCS 进行 Poincaré 截面的分析，选取了 $x_3=0$ 的截面，其对应的 Poincaré 截面如图 10 所示，可以看出点集无孤立离散点或连续闭合曲线，而是堆叠的点集，这表明运动表现出混沌行为.

2.4　三向分布的 MSCCS

将结构矩阵(19)进行修改，将其中的 x_3 替换为 $g(x_3)$，可得新的结构矩阵为

$$\boldsymbol{J}_3=\begin{pmatrix}0 & a & 0 & 0 & 0\\ -a & 0 & d & bg(x_3) & 0\\ 0 & -d & 0 & 0 & cg(x_1)\\ 0 & -bg(x_3) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -cg(x_1) & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{22}$$

将 Hamilton 能量的梯度设置为 $\nabla \boldsymbol{H}=[g(x_1),g(x_2),g(x_3),x_4,x_5]^{\mathrm{T}}$，可以得到新的在 $x-y-$

z方向上的多向可控的MSCCS：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=ag(x_2),\\ \dot{x}_2&=-ag(x_1)+dg(x_3)+bg(x_3)x_4,\\ \dot{x}_3&=-dg(x_2)+cg(x_1)x_5,\\ \dot{x}_4&=-bg(x_2)g(x_3),\\ \dot{x}_5&=-cg(x_1)g(x_3).\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

设置参数为$(a,b,c,d)=(8,2,9,5)$，函数参数设为$(A,L)=(1,10)$，初值设为$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,15,1,1,1)$，通过选取不同的$(m_1,m_2,m_3)$组合来构成3个方向上不同涡卷数量组合的混沌吸引子.如图11所示，选取了$(m_1,m_2,m_3)=(2,2,2)$的组合构成了三向分布为$3\times3\times3$的多涡卷吸引子，选取$(m_1,m_2,m_3)=(2,3,4)$的组合构成了三向分布为$3\times4\times5$的多涡卷吸引子.

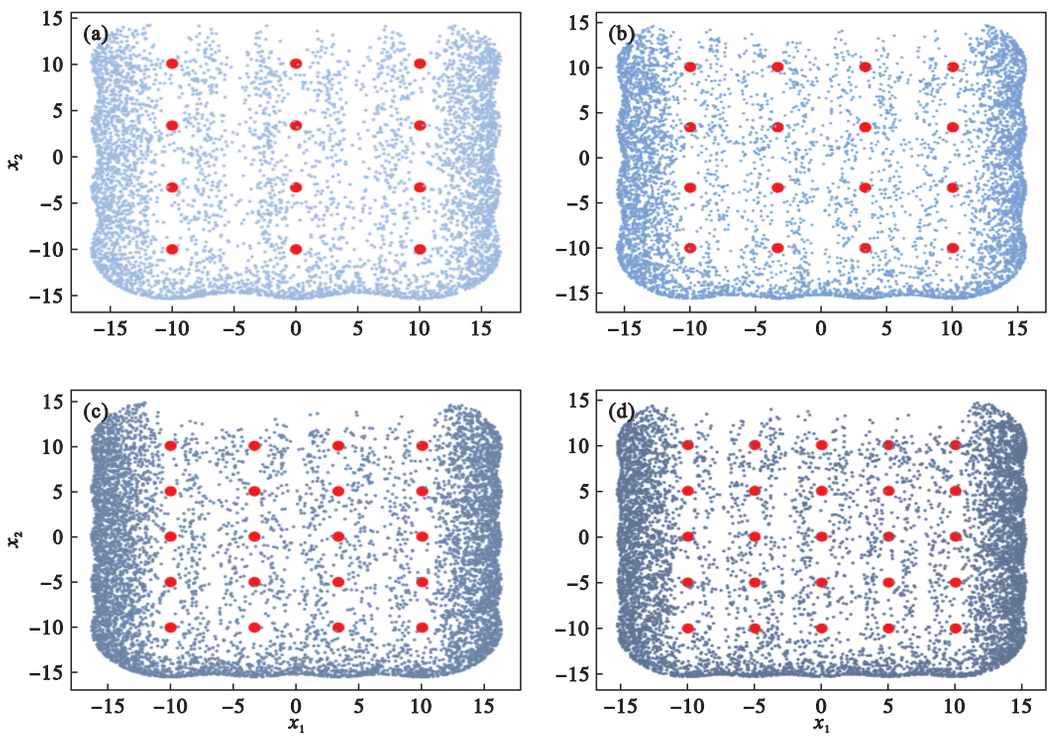


图10 双向分布的MSCCS在不同涡卷组合下的Poincaré截面

Fig. 10 Poincaré sections of bidirectionally distributed MSCCS under different scroll combinations

(a)—3×4涡卷；(b)—4×4涡卷；(c)—4×5涡卷；(d)—5×5涡卷.

2.5 初始偏移升压

由于在系统(8)中引入分段函数(18)，构造出了系统(20)，进而拓展了Hamilton能量的驻点，因此引入后的系统能够产生共存的混沌或者周期流.选定初值为$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-8,8,0.5,0.5,0.5)$，系统参数为$(a,b,c,d)=(8,2,1,5)$，并将函数$g(x)$的参数选为$(m,A,L)=(5,1,5)$，分岔图和LE图如图12a所示.可以观察到除了零和LE的混沌流之外，还存在准周期窗口，这些准周期窗口呈现阶梯状，且步数与参数m有关，为$m+1$.该现象表明存在由初值增强的共存环面，即系统(20)存在初始偏移升压的动力学行为；将参数c改为9后，其Lyapunov指数谱及其对应的分岔图如图12b所示，可以观察到准周期窗口逐渐缩短，零和LE的混沌流范围增大.当参数c增至20后，其Lyapunov指数谱及其对应的分岔图如图12c所示，除了产生六涡卷的混沌流外，还具有可以产生单涡卷混沌流的窗口，可以看出最大LE值偏小时对应生成单涡卷，最大LE值偏大时对应生成六涡卷，此外也可以观察到单涡卷轨道呈现阶梯式，这也表明系统存在初始偏移升压的动力学行为.

由图12c可得其有关单涡卷的初始偏移升压现象，此时选取参数为$(a,b,c,d,m,A,L)=(8,2,20,5,5,1,5)$.图13a绘制了在$x_1$选取6个不同初值$(-5,-3,-1,1,3,5)$条件下产生的6个共存的单涡卷混沌流，图13b对应图13a在$x_3=0$的Poincaré映射，可以观察到有许多离散的点，表明这些均为混沌流，以上可以验证系统(20)具有明显的初始偏移升压行为.

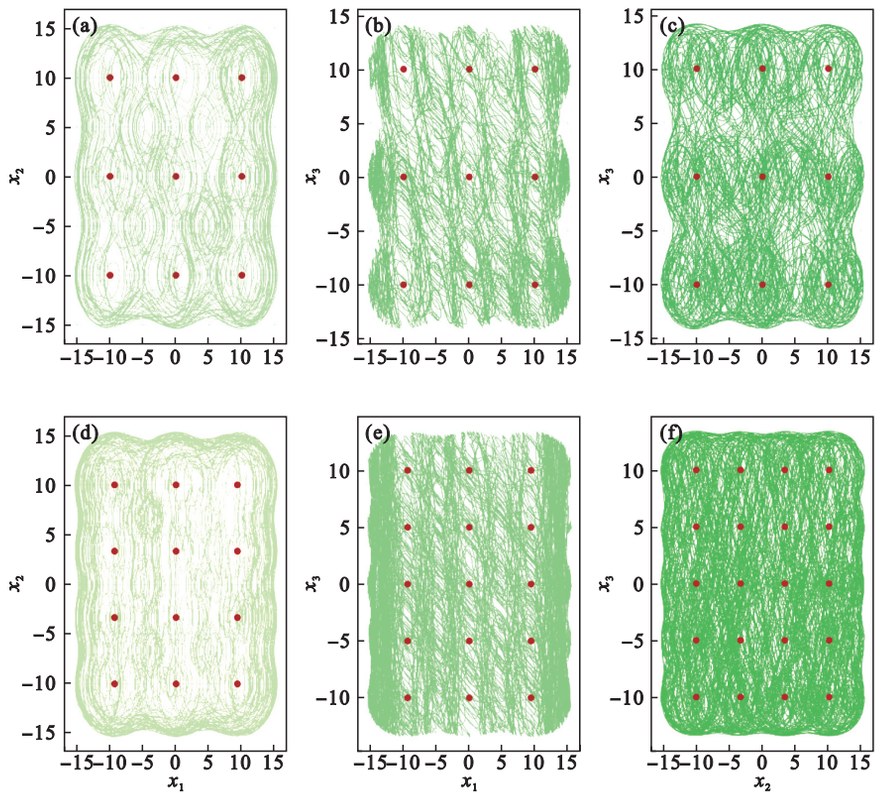


图 11　3×3×3 涡卷和 3×4×5 涡卷的相图

Fig. 11　Phase diagram of 3×3×3 scroll and 3×4×5 scroll

(a)~(c)—3×3×3涡卷；(d)~(f)—3×4×5涡卷.

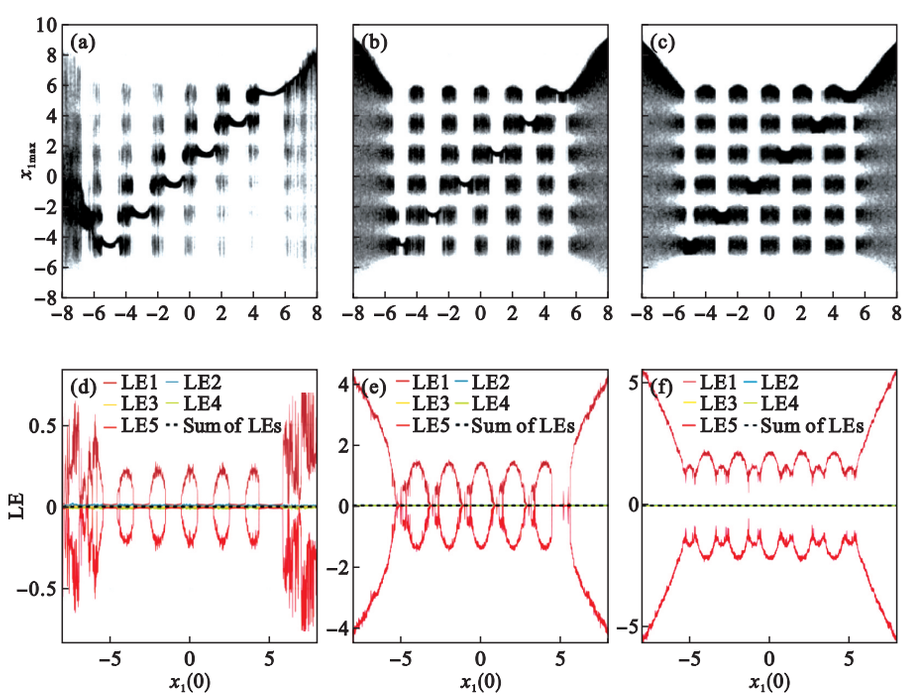


图 12　当初值为 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-8,8,0.5,0.5,0.5)$，参数选取为 $(a,b,d,m,A,L)=(8,2,5,5,1,5)$ 时，参数 c 不同取值下对应的 Lyapunov 指数谱和分岔图：

Fig. 12　Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagram corresponding to different values of parameter c when initial values are $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-8,8,0.5,0.5,0.5)$ and parameter selection is $(a,b,d,m,A,L)=(8,2,5,5,1,5)$

(a)—c=1时对应的分岔图；(b)—c=9时对应的分岔图；(c)—c=20时对应的分岔图；(d)—c=1时对应的Lyapunov指数谱；(e)—c=9时对应的Lyapunov指数谱；(f)—c=20时对应的Lyapunov指数谱.

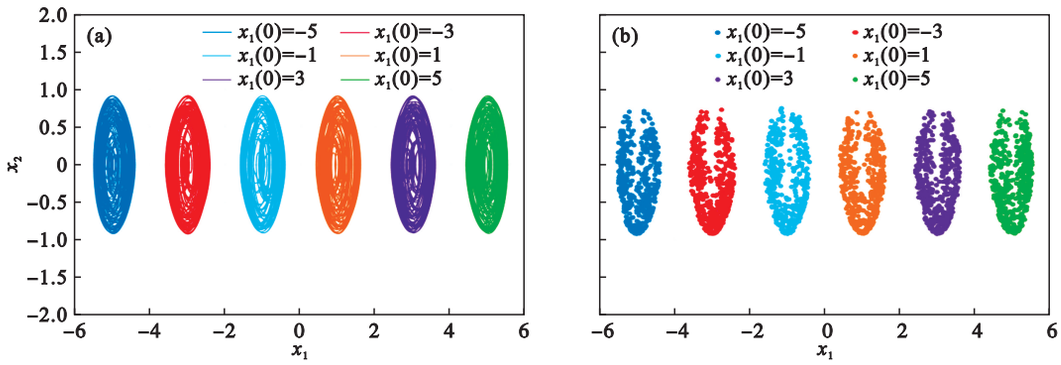


图 13 当初值为 $(x_2,x_3,x_4,x_5)=(0.5,0.5,0.5,0.5)$，参数选取为 $(a,b,c,d,m,A,L)=(8,2,20,5,5,1,5)$ 时，由 x_1 增强的共存单涡卷混沌流和在截面 $x_3=0$ 上相应的 Poincaré 截面

Fig. 13 Coexisting single-scroll chaotic flows enhanced by x_1 and corresponding Poincaré sections on cross-section $x_3=0$ when initial values are $(x_2,x_3,x_4,x_5)=(0.5,0.5,0.5,0.5)$ and parameter selection is $(a,b,c,d,m,A,L)=(8,2,20,5,5,1,5)$

(a)—共存的单涡卷混沌流；(b)—$x_3=0$ 截面上的 Poincaré 映射.

3 FPGA

本文实验部分采用 Vivado 2018.3 作为集成开发环境，硬件平台为 ALINX 公司生产的 AX7020 FPGA 开发板. 在开发过程中，本研究调用 7.1 版本浮点 IP(intellectual property)核，实现了浮点加法、除法、乘法、指数运算、数值比较以及浮点数与定点数之间的格式转换等功能. 综合考虑开发板可用输出引脚数量及系统最大输出幅值，本文选定 14 位定点数精度，经双排针接口输出至示波器，实现网格 4×4 涡卷混沌流的硬件资源利用，具体情况如表 4 所示，其中 LUT(查找表)、FF(触发器)、DSP(数字信号处理单元)、IO(输入输出引脚)、MMCM(混合模式时钟管理器)均为 FPGA 标准资源.

图 14 为示波器显示的相图. 系统仿真所用参数与 Matlab 数值仿真所用参数相同，时序约束下的最大运行效率为 126.7 MHz，实际工作频率设定为 100 MHz，系统长时间运行稳定. 通过比较可得，示波器显示结果与仿真结果吻合较好，验证了 2 种方法的一致性，表明其在实际工程应用中具有潜在价值.

表 4 实现网格 4×4 涡卷混沌流的硬件资源利用情况

Table 4 Hardware resource utilization for implementing 4×4 grid scroll chaotic flows

资源	使用情况	共有	利用率/%
LUT	8 647	53 200	16. 25
FF	9 050	106 400	8. 51
DSP	15	220	6. 82
IO	6	106	5. 66
MMCM	1	5	20. 00

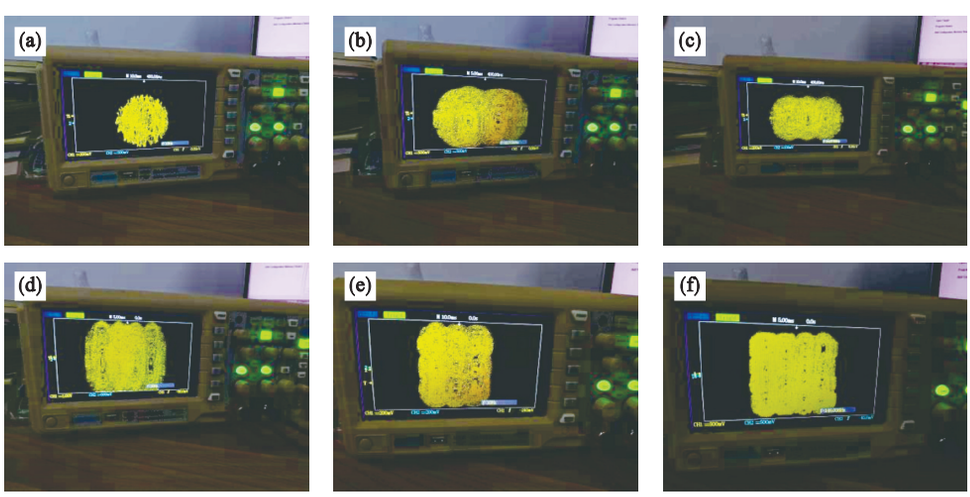


图 14 FPGA 硬件实测结果相图

Fig. 14 FPGA hardware test results

(a)—单涡卷；(b)—两涡卷；(c)—三涡卷；(d)—四涡卷；(e)—3×3×3 涡卷；(f)—4×4 涡卷.

4 结　　语

本文基于广义Hamilton系统理论，成功构建了1个新型五维Hamilton保守混沌系统.保守性分析证实该系统满足能量守恒与相体积不变，动力学分析表明其具有对称Lyapunov指数谱、遍历性相轨迹等典型保守混沌特征，并揭示了系统的极端多稳定性行为.在参数固定条件下，通过改变初始条件可实现从准周期到混沌的无限条轨迹共存，且系统复杂度随Hamilton能量升高而增大；提出了1种参数独立可调的分段函数构造方法，通过引入该函数实现对系统平衡点的灵活调控，成功构建了单向、双向及三向分布的网格多涡卷保守混沌系统.研究表明，分段函数参数可独立控制涡卷数量、间距及系统动力学行为.此外，系统表现出显著的初始偏移升压行为——初值变化可诱发共存混沌流与准周期窗口的阶梯式分布，进一步丰富了系统的动力学特性.最后，在FPGA开发平台完成了系统的硬件实现，验证了理论模型的正确性与硬件方案的可行性.

参考文献：

[1] Bao H, Ding R Y, Chen B, et al. Two-dimensional non-autonomous neuron model with parameter-controlled multi-scroll chaotic attractors[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 169: 113228.

[2] Erkan U, Toktas A, Memis S, et al. OSMRD-IE: octal-based shuffling and multilayer rotational diffusing image encryption using 2-D hybrid michalewicz-ackley map[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2024, 11(21): 35113-35123.

[3] Yu F, Tan B H, He T, et al. Modeling methods and characteristic analysis of novel 5D Hamiltonian conservative chaotic system with adjustable-width multi-directional multi-scroll attractors[J]. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2025, 32(1): 82.

[4] 贾红艳，王合进，李伟. 一个广义哈密顿混沌系统及其在图像加密中的应用[J]. 天津科技大学学报，2026，41(1)：51-60.
(Jia Hong-yan, Wang He-jin, Li Wei. A generalized Hamiltonian chaotic system and its application to image encryption[J]. *Journal of Tianjin University of Science and Technology*, 2026, 41(1): 51-60.)

[5] Soliman N S, Tolba M F, Said L A, et al. Fractional X-shape controllable multi-scroll attractor with parameter effect and FPGA automatic design tool software[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2019, 126: 292-307.

[6] 安新磊，李治甫，薛睿，等. 多涡卷保守混沌系统的构建及在图像加密中的应用[J]. 电子与信息学报，2025，47(11)：4470-4481.
(An Xin-lei, Li Zhi-fu, Xue Rui, et al. Construction of multi-scroll conservative chaotic system and its application in image encryption [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2025, 47(11): 4470-4481.)

[7] Wang N, Li C Q, Bao H, et al. Generating multi-scroll Chua's attractors via simplified piecewise-linear Chua's diode[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2019, 66(12): 4767-4779.

[8] Zhang S, Li C B, Zheng J H, et al. Generating any number of initial offset-boosted coexisting chua's double-scroll attractors via piecewise-nonlinear memristor [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(7): 7202-7212.

[9] 陈杰，贾美美. 分数阶忆阻多涡卷系统的构造及动力学行为分析[J]. 湘潭大学学报(自然科学版)，2025，47(4)：65-75.
(Chen Jie, Jia Mei-mei. Construction and dynamic behavior analysis of fractional-order memristive multi-scroll system [J]. *Journal of Xiangtan University* (*Natural Science Edition*), 2025, 47(4): 65-75.)

[10] Ji'e M, Peng H X, Duan S K, et al. Design and FPGA implementation of grid-scroll Hamiltonian conservative chaotic flows with a line equilibrium[J]. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration* (*VLSI*) *Systems*, 2024, 32(4): 658-668.

[11] Kong X X, Yu F, Yao W, et al. A class of $2n$+1 dimensional simplest Hamiltonian conservative chaotic systems and fast image encryption schemes [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2024, 125: 351-374.

(上接第123页)

[24] Zhou Z Y, Zhang X Q, Ran L Y, et al. DSC-GraspNet: a lightweight convolutional neural network for robotic grasp detection[C]//2023 9th International Conference on Virtual Reality. Xianyang: IEEE, 2023: 226-232.

[25] Wen H T, Yan J H, Peng W L, et al. TransGrasp: grasp pose estimation of a category of objects by transferring grasps from only one labeled instance[C]//Computer Vision-ECCV 2022. Cham: Springer, 2022: 445-461.

[26] Ma H X, Huang D. Towards scale balanced 6-DoF grasp detection in cluttered scenes[C]//Proceedings of the 6th Conference on Robot Learning. London: PMLR, 2023: 2004-2013.

[27] Chen S A, Tang W, Xie P W, et al. Efficient heatmap-guided 6-DoF grasp detection in cluttered scenes[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2023, 8(8): 4895-4902.

[28] Wang C X, Fang H S, Gou M H, et al. Graspness discovery in clutters for fast and accurate grasp detection [C]//Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. Montreal: IEEE, 2021: 15352-15361.

[29] Wu X M, Cai J F, Jiang J J, et al. An economic framework for 6-DoF grasp detection[C]//Proceedings of the European Conference on Computer Vision. Milan: Springer, 2024: 357-375.

[30] Yang K Q, Dai Y X, Wang G J, et al. Efficient end-to-end 6-DoF grasp detection framework for edge devices with hierarchical heat maps and feature propagation [C/OL]// 2025 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. London, 2025: 1-5. https://ieeexplore.ieee.org/document/11044282/.