文章编号：1003-1421(2026)08-0019-11
引用格式：吴明泽，景云，孙国锋，等. 高速铁路固定和灵活模式列车开行方案鲁棒优化[J]. 铁道运输与经济，2026，48(8)：19-29.
WU Mingze，JING Yun，SUN Guofeng，et al. Robust Optimization of Train Line Planning for High Speed Railway with Fixed and Flexible Modes[J]. Railway Transport and Economy，2026，48(8)：19-29.

高速铁路固定和灵活模式列车开行方案鲁棒优化

吴明泽[1]，景　云[1,2]，孙国锋[3]，王　琪[1]，蒋子文[1]

(1.北京交通大学 交通运输学院，北京　100044；2.北京交通大学 智慧高铁系统前沿科学中心，北京　100044；3.兰州交通大学 交通运输学院，甘肃 兰州　730070)

摘　要：高速铁路客流需求具有显著的长周期波动性与不确定性，传统固定列车开行方案易导致高峰运力不足与低谷资源浪费。为此，提出“固定+灵活”列车开行模式，固定列车规划时段内开行方案保持不变，保障基础客流需求，灵活列车依据每日客流变化情况调整，适应客流需求的波动性。以最小化列车运行成本、乘客旅行时间、席位供需偏差为目标，考虑客流需求约束、列车能力约束、固定列车一致性约束、鲁棒性约束等，构建两阶段分布鲁棒优化模型。引入L_∞范数非精确集，将原模型对偶转化为混合整数线性规划模型，采用GUROBI求解。北京北—呼和浩特东的案例结果表明：当“固定+灵活”开行模式每天固定32个车次时取得全局最优解，较全固定模式与全灵活模式节约综合成本分别为4.475%和1.764%，鲁棒模型的席位资源供需偏差较随机规划模型降低26.414%。为高速铁路长周期动态需求下的列车开行方案优化提供了理论支持。

关键词：铁路运输；列车开行方案；列车开行模式；分布鲁棒优化；需求波动性
中图分类号：U292.8　　**文献标识码**：A　　**DOI**：10.16668/j.cnki.issn.1003-1421.20250501002

Robust Optimization of Train Line Planning for High Speed Railway with Fixed and Flexible Modes

WU Mingze[1]，JING Yun[1,2]，SUN Guofeng[3]，WANG Qi[1]，JIANG Ziwen[1]

(1. School of Traffic and Transportation, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 2. Frontiers Science Center for Smart High Speed Railway Systems, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 3. School of Traffic and Transportation, Lanzhou Jiaotong Universty, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: High speed railway passenger flow demand exhibits significant long-term cyclical fluctuations and uncertainty, and traditional fixed train line planning is prone to cause insufficient peak capacity and wasteful resource allocation during peak periods. To address this issue, a “fixed + flexible” train operation mode was proposed. In this mode, fixed trains maintained consistent train line planning throughout the planning period to guarantee basic passenger demand, while flexible trains were adjusted based on daily passenger flow variations to accommodate demand fluctuations. With the objectives of minimizing train operation costs, passenger travel time, and seat supply-demand deviation, a two-stage distributed robust optimization model was constructed considering basic constraints such as total

收稿日期：2025-05-01
通信作者：景云(1981—)，男，陕西宝鸡人，北京交通大学交通运输学院教授。
基金项目：国家自然科学基金项目(52372300)；国家自然科学基金联合基金项目(U2368212)；兰州市青年科技人才创新项目(2025-QN-070)

passenger demand constraints and train capacity constraints, as well as fixed train consistency constraints and robustness constraints. By introducing the L_∞ norm ambiguity set, the original model was dually transformed into a mixed integer linear programming model and was solved using GUROBI. The case results of Bijingbei-Hohhotdong section show that the optimal global solution is achieved when 32 fixed train services are operated daily under the "fixed + flexible" mode. Compared with the fully fixed mode and the fully flexible mode, the comprehensive costs are reduced by 4.475% and 1.764%, respectively, and the seat supply-demand deviation of the robust model is decreased by 26.414% compared to the stochastic programming model. It provides theoretical support for the optimization of train line planning under long-term dynamic demand of high speed railways.

Keywords: Railway Transportation; Train Line Planning; Train Operation Mode; Distributed Robust Optimization; Demand Volatility

0　引言

高速铁路客流需求在较长时段内(周/月/年)呈现一定波动，每日的客流需求也存在较大不确定性。客流需求的波动性和不确定性导致高速铁路在高峰时期存在运力不足，低谷时期存在运力资源浪费等问题。为增强乘客对高速铁路服务的信任度、提高经济效益和客运服务水平，如何确保列车开行方案稳定性，并在维持服务质量与控制成本之间寻求平衡，是亟待解决的问题。

针对大时间尺度的客流需求波动性，既有研究集中于设计更具客流适应性的列车开行方案。现场工作中采用“一日一图”的组织方式，高速铁路的运力调度按照日常图、周末图和高峰图进行动态调整[1]。龙品秀等[2]针对不同需求日高速铁路出行需求在结构和总量上的差异，提出基于最大包络需求备选列车集的列车开行方案优化方法。周文梁等[3]提出可有效适应多日需求差异的高速铁路列车开行方案优化模型，通过最小化总成本后悔值，提升时变需求适应性。钟林环等[4]引入列车发车时间和区段拼接策略，以最小化时变区间断面客流需求的偏差值为目标优化列车开行方案。Niu 等[5]构建时变需求下以最小化乘客在车站的等待时间为目标的跳站模式列车时刻表规划模型。

针对日间客流需求的不确定性，可通过鲁棒技术优化列车开行方案的稳定性。张春田等[6]将客流需求分为确定性需求和随机性需求，基于轻鲁棒技术构建高速铁路鲁棒列车开行方案优化模型。武晋飞等[7]构建票额分配鲁棒优化模型，通过缓冲票额设计提升列车开行方案适应性。Cacchiani 等[8]构建基于轻鲁棒技术的高速铁路列车时刻表与停站方案联合优化模型，通过设定客流需求不确定性防护准则以应对潜在客流增长。Pu 等[9]提出铁路列车开行方案两阶段鲁棒优化模型，第1阶段基于确定性客流需求决策列车开行方案，第2阶段根据实际需求的变化调整列车开行方案。Liu 等[10]假设真实分布属于以经验分布为中心的 Wasserstein 模糊集合，构建了两阶段分布鲁棒列车时刻表优化模型。

现有研究尚未同时兼顾客流需求的中长期波动性与日需求的不确定性，针对客流需求波动性的研究大多基于传统的固定开行模式，对于“固定+灵活”混合模式下的列车开行方案优化缺乏系统性探索。另外，传统鲁棒优化模型采用的“最坏情况”准则易导致决策保守性过高，难以融合客流数据分布特征。

本研究通过构建周需求典型离散场景以刻画客流的中长期波动性与日需求的不确定性，提出“固定+灵活”列车开行模式，并建立列车开行方案两阶段分布鲁棒优化模型，在第1阶段生成固定列车与灵活列车的候选开行方案，第2阶段针对最不利客流概率分布计算席位供需偏差惩罚，引入 L_∞ 范数非精确集，将原模型对偶化转化为可求解的混合整数线性规划模型，既保持决策鲁棒性又利用数据统计特性降低保守性，最后，以京兰高速铁路(北京北—兰州西)北京北—呼和浩特东区段为案例验证模型的有效性，为高速铁路长周期动态需求下的稳定运营提供理论参考。

1　“固定+灵活”模式列车开行方案鲁棒优化问题分析

1.1　“固定+灵活”模式分析

在中长期运营周期中，客流需求通常具有双重特征：其一，在时间维度呈现波动性，表现为不同

运营日(周内、周末)存在显著差异；其二，具有不确定性，表现为日需求并非单一确定值，日客流总量和空间分布受到外部不可控因素的随机扰动。其中，趋势客流需求是客流需求呈现波动性的主要原因，反映了客流需求由经济增长、节假日效应与季节性因素共同作用的规律性变化。转移客流需求与诱增客流需求是引发客流需求不确定性的主要原因，转移客流需求描述了乘客在交通网络节点因换乘线路、票价或服务水平变化导致的流向调整[11]，诱增客流需求则是由于增开列车、优化时刻或改善服务而由隐性转为实际的额外需求[12]。

在高速铁路列车开行方案优化过程中，采用完全静态化的列车开行方案难以适应具有显著波动性和不确定性的客流需求，频繁调整列车起讫点及停站方案既不利于稳定高速铁路服务粘性，又会显著增加铁路运营调度复杂度。为此，构建“固定+灵活”开行模式，将列车集合划分为具有差异化特征的“固定列车”和“灵活列车”。“固定列车”在规划周期内保持固定的开行数量、起讫点及停站方案，主要承担确定性的趋势客流需求；“灵活列车”的开行数量、起讫点及停站方案则可根据波动客流进行调整优化，主要承担具有不确定性的转移和诱增客流需求，实现剩余运力对客流需求的弹性匹配，固定列车与灵活列车示意如图1所示。“固定+灵活”开行模式既保障了运输系统核心服务的可靠性，又通过边际运力调节提升了资源配置效率。

以高速铁路单方向列车开行方案为研究对象，针对中长期运营周期内兼具波动性与不确定性的客流需求特征，研究列车开行方案鲁棒优化问题，决策固定列车与灵活列车的开行数量、起讫点及停站方案，实现列车运行成本、乘客时间成本与席位供需偏差3个维度的多目标系统最优。

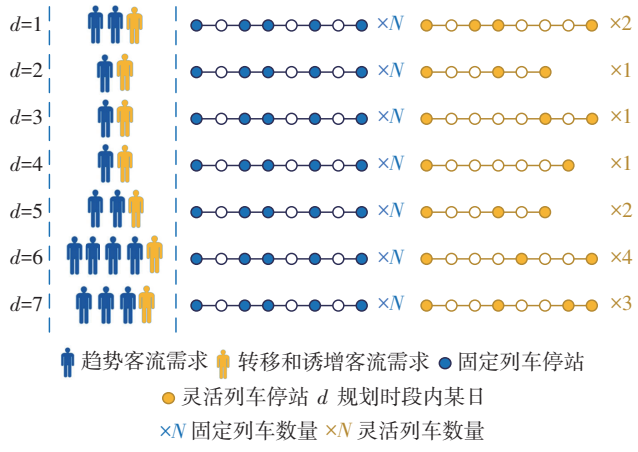


图1　固定列车与灵活列车示意

Fig.1　Schematic diagram of fixed and flexible trains

1.2　问题假设

由于研究的重点是设计“固定+灵活”开行模式和优化列车开行方案，进行下列假设。

（1）客流需求均在直达运输模式下满足，不考虑乘客中转。

（2）假设固定列车与灵活列车均采用固定编组。

（3）日间客流需求不确定性仅来源于常规运营因素，不考虑由极端天气或设备故障等突发事件导致的运营中断及需求剧变。

（4）客流需求离散场景于模型求解前确定并保持不变。

2　两阶段分布鲁棒优化模型构建

基于鲁棒优化理论的min−max准则[13]，构建两阶段分布鲁棒优化模型。第1阶段生成固定列车与灵活列车的候选开行方案，第2阶段针对候选开行方案计算最不利客流情形下的席位供需偏差。构建包含第1阶段成本以及第2阶段惩罚成本的综合成本函数，获得全局最优列车开行方案。

2.1　符号定义

符号定义如表1所示。

2.2　目标函数

第1阶段目标函数为列车运行成本Z_a和乘客旅行时间成本Z_b。列车运行成本Z_a包括运行距离成本和基础开行成本，用于控制列车能源消耗与维护支出；乘客旅行时间成本Z_b为乘客所乘列车在区间的运行时间成本与列车在中间站的停站时间成本之和，旨在降低乘客时间损耗以提升高速铁路运输竞争力。

$$Z_a = \sum_{d\in D}\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k^d}\beta_k w_{k,i}^d\left(\alpha_1 u_{k,i}^d + h_{k,i}^d\right) \tag{1}$$

式中：β_k为第k种列车的成本系数，对于铁路运营企业而言，灵活列车需要频繁调整时刻、调配动车组(相较于固定列车可能产生额外的空驶走行)、配属车组人员等，导致调度与维护成本增加，因此灵活列车的成本系数β_2大于固定列车的成本系数β_1；α_1为列车单位运行距离的成本；$u_{k,i}^d$为第d天第i列类型k列车的运行距离；$h_{k,i}^d$为第d天第i列类型k列

表1　符号定义

Tab.1　Symbol definitions

类别	符号	含义
集合	S	车站集合
	D	按天划分的规划时段集合
	R	客流离散场景集合，场景数量为$\|R\|$
	K	列车种类集合
	I_k^d	第d天第k种列车的备选列车集合
	$S_i^{d,\,k}$	第d天第k种第i个备选列车经过的车站集合
	$O_i^{d,\,k}$	第d天第k种第i个备选列车的始发站集合
	$D_i^{d,\,k}$	第d天第k种第i个备选列车的终到站集合
索引	s	车站索引，$s \in S$
	d	日期索引，$d \in D$
	r	离散客流场景索引，$r \in R$
	k	列车种类索引，$k \in K$ $k=1$，2分别代表固定列车和灵活列车
	i	备选列车索引，$i \in I_k^d$
参数	α_1	成本转换系数，表示列车单位运行距离的成本，元/km
	α_2	成本转换系数，表示乘客对时间的感知价格，元/min
	$u_{k,\,i}^d$	第d天第k种第i个备选列车的运行距离，km
	$h_{k,\,i}^d$	第d天第k种第i个备选列车的基础开行成本，元
	β_k	第k种列车的成本系数
	$Q_{s,\,v}^d(r)$	第r种离散场景第d天s站到v站的客流需求，人
	N	列车允许的最大停站次数，次
	$Cap_{k,\,i}^d$	第d天第k种第i个备选列车的定员，人
	t_s^{dwell}	列车在s站的停站时间，min
	t_s^{run}	列车在s站与$s+1$站之间的运行时间，min
	ε	允许的最大开行列车数量，列
	σ	固定列车对于客流需求的最低承担比例
	p_r	第r种客流场景的样本概率
	$\mathcal{P}$	场景概率波动的非精确集
	Θ	场景集R对应的概率质量函数
	μ	鲁棒模型第2阶段目标惩罚系数
	Φ	不确定扰动的上限
	M	足够大的正整数
中间变量	$q_{s,\,v,\,d}^{+}(r)$	场景r下第d天由车站s出发终到车站v的冗余席位数量，人
	$q_{s,\,v,\,d}^{-}(r)$	场景r下第d天由车站s出发终到车站v的未被满足乘客数量，人
	λ	连续型辅助变量，维度为1
	$\boldsymbol{\nu}$	连续型辅助变量，维度为离散场景集的长度$\|R\|$
	$\boldsymbol{\rho}$	连续型辅助变量，维度为离散场景集的长度$\|R\|$
	$\varphi_{s,\,v,\,s_0}^{d,\,k,\,i}$	连续型辅助变量，用于线性化目标函数
决策变量	$w_{k,\,i}^d$	0-1变量，第d天第k种第i个备选列车开行则为1，否则为0
	$x_{k,\,i,\,s}^d$	0-1变量，第d天第k种第i个备选列车在车站s停站则为1，否则为0
	$q_{s,\,v}^{d,\,k,\,i}$	整数变量，第d天第k种第i个备选列车被分配的由s站到v站的乘客数量，人

车的基础开行成本。

$$Z_b=\alpha_2\times\sum_{d\in D}\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k^d}\sum_{s\in S_i^{d,\,k}\backslash\{D_i^{d,\,k}\}}\sum_{v\in S_i^{d,\,k},\ v>s}\left(\sum_{s'\in S_i^{d,\,k},\ s\leqslant s'<v}t_{s'}^{\mathrm{run}}q_{s,\,v}^{d,\,k,\,i}+\sum_{s_0\in S_i^{d,\,k},\ s<s_0<v}t_{s_0}^{\mathrm{dwell}}q_{s,\,v}^{d,\,k,\,i}x_{k,\,i,\,s_0}^d\right)\tag{2}$$

式中：α_2为旅客时间价值系数；s_0为列车在区间$(s,\ v)$内的中间停站；$t_{s'}^{\mathrm{run}}$为在区间$(s',\ s'+1)$的运行时间；$t_{s_0}^{\mathrm{dwell}}$为列车在车站s_0的停站时间。

第2阶段目标函数Z_c为最不利客流情形下席位供需偏差对应的惩罚成本，用于增强系统对波动客流的抵抗能力并控制极端风险引发的损失。

$$Z_c=\sup_{\Theta\in\mathrm{P}}E\left[Q\left(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r)\right)\right]\tag{3}$$

式中：$\sup_{\Theta\in\mathrm{P}}\{\cdot\}$为所有离散场景可能出现的最差情形；$\Theta$为场景集$R$对应的概率质量函数；$\mathcal{P}$为场景概率波动的非精确集；$E[\cdot]$为场景集$R$的惩罚成本期望值；$\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{x}$分别表示模型中的一阶段决策变量的向量形式；$\boldsymbol{\xi}(r)$表示第$r$个随机场景下的不确定参数向量；$Q\left(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r)\right)$表示给定决策变量$\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{q}$和$\boldsymbol{x}$及不确定场景$\boldsymbol{\xi}(r)$时的二阶段目标函数值。

综上所述，高速铁路企业与乘客的综合成本目标函数为

$$\min Z=Z_a+Z_b+Z_c\tag{4}$$

2.3　约束条件

（1）第1阶段约束条件。

$$x_{k,\,i,\,s}^d=w_{k,\,i}^d$$
$$\forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ s\in\left\{O_i^{d,\,k},\ D_i^{d,\,k}\right\}\tag{5}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k^d:\ s,\,v\in S_i}q_{s,\,v}^{d,\,k,\,i}\geqslant\min_{r\in R}\left\{Q_{s,\,v}^d(r)\right\}$$
$$\forall d\in D,\ s,\ v\in S,\ s<v\tag{6}$$

$$\sum_{v\in S_i^{d,\,k},\ v>s}q_{s,\,v}^{d,\,k,\,i}\leqslant\sum_{v\in S_i^{d,\,k},\ v>s}\max_{r\in R}\left\{Q_{s,\,v}^d(r)\right\}\cdot x_{k,\,i,\,s}^d$$
$$\forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ s\in S_i^{d,\,k}\backslash\left\{D_i^{d,\,k}\right\}\tag{7}$$

$$\sum_{s\in S_i^{d,\,k},\ s<v}q_{s,\,v}^{d,\,k,\,i}\leqslant\sum_{s\in S_i^{d,\,k},\ s<v}\max_{r\in R}\left\{Q_{s,\,v}^d(r)\right\}\cdot x_{k,\,i,\,v}^d$$
$$\forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ v\in S_i^{d,\,k}\backslash\left\{O_i^{d,\,k}\right\}\tag{8}$$

$$q_{s,\,v}^{d,\,k,\,i}\leqslant M\cdot w_{k,\,i}^d\qquad\forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ s,\ v\in S_i^{d,\,k},\ s<v\tag{9}$$

$$x_{k,\,i,\,s}^d\leqslant w_{k,\,i}^d\qquad\forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ s\in S_i^{d,\,k}\tag{10}$$

$$\sum_{s\in S_i^{d,\,k}}x_{k,\,i,\,s}^d\leqslant N\qquad\forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d\tag{11}$$

$$\sum_{s'\in S_i^{d,k},\ s'\leqslant s}\sum_{v\in S_i^{d,k},\ v>s} q_{s',v}^{d,k,i}\leqslant Cap_{k,i}^{d} \tag{12}$$

$$\forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ s\in S_i^{d,k}\backslash\{D_i^{d,k}\}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k^d} w_{k,i}^{d}\leqslant \varepsilon \qquad \forall d\in D \tag{13}$$

$$\sum_{i\in I_k^d;\ s,\ v\in S_i^{d,k}} q_{s,v}^{d,k,i}\geqslant \sigma\cdot\min_{r\in R,\ d'\in D}\{Q_{s,v}^{d'}(r)\} \tag{14}$$

$$\forall d\in D,\ s,\ v\in S,\ s<v,\ k\in\{1\}$$

$$w_{k,i}^{d}=w_{k,j}^{d'} \tag{15}$$

$$\forall d,\ d'\in D,\ k\in\{1\},\ i\in I_k^d,\ j\in I_k^{d'},\ i=j$$

$$x_{k,i,s}^{d}=x_{k,i,s}^{d'} \tag{16}$$

$$\forall d,\ d'\in D,\ k\in\{1\},\ i\in I_k^d,\ j\in I_k^{d'},\ i=j,\ s\in S$$

$$x_{k,i,s}^{d}\in\{0,\ 1\} \tag{17}$$

$$\forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ s\in S_i^{d,k}$$

$$q_{s,v}^{d,k,i}\in Z^{+} \tag{18}$$

$$\forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ s,\ v\in S_i^{d,k},\ s<v$$

$$w_{k,i}^{d}\in\{0,\ 1\} \qquad \forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d \tag{19}$$

式(5)为始发终到站约束，若开行备选列车i则必须在其起讫车站停站。式(6)为客流总需求约束，固定列车与灵活列车需共同承担OD客流的输送，并确保所有OD客流在最低需求场景r下均能被覆盖。式(7)—(8)为OD客流分配约束，若备选列车i在乘客OD未停站，则禁止为其分配相应OD客流；反之，分配的客流量不得超过最大需求场景r下的总需求。式(9)为客流分配变量与列车开行变量耦合约束，仅当备选列车i开行时方可为其分配客流。式(10)为列车开行变量与停站变量耦合约束，备选列车i开行时停站变量不受限制，否则为0。式(11)为列车停站次数约束，考虑到乘客服务质量，需要设置列车最大停站次数。式(12)为列车能力约束，乘坐列车i的乘客数量不超过其定员[14]。式(13)为列车开行数量约束，在保证乘客服务质量的同时，为节约列车运行成本，需要限制列车开行数量。式(14)为固定列车最低需求承担比例约束，对于任意客流OD，固定列车分担的客流量应不低于低峰时段客流量的一定比例，具体根据高速铁路企业对运营稳定性的要求取值。式(15)—(16)为固定列车开行一致性约束，固定列车在规划时段内每天的开行方案保持一致。式(17)—(19)为变量取值约束。

（2）第2阶段约束条件。

$$Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r))=$$

$$\min\sum_{d\in D}\sum_{s\in S_i^{d,k}\backslash\{D_i^{d,k}\}}\sum_{v\in S_i^{d,k},\ v>s}\mu\left[q_{s,v,d}^{-}(r)+q_{s,v,d}^{+}(r)\right] \tag{20}$$

$$q_{s,v,d}^{+}(r)\geqslant\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k^d} q_{s,v}^{d,k,i}-Q_{s,v}^{d}(r) \tag{21}$$

$$\forall d\in D,\ s,\ v\in S,\ s<v$$

$$q_{s,v,d}^{-}(r)\geqslant Q_{s,v}^{d}(r)-\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k^d} q_{s,v}^{d,k,i} \tag{22}$$

$$\forall d\in D,\ s,\ v\in S,\ s<v$$

$$q_{s,v,d}^{+}(r)\geqslant 0 \qquad \forall d\in D,\ s,\ v\in S,\ s<v \tag{23}$$

$$q_{s,v,d}^{-}(r)\geqslant 0 \qquad \forall d\in D,\ s,\ v\in S,\ s<v \tag{24}$$

式(20)定义$Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r))$为列车在各个场景下的席位供需偏差，$Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r))$是第1阶段决策变量及场景变量$\boldsymbol{\xi}(r)$的函数。式(21)—(24)通过对变量$q_{s,v,d}^{+}(r)$和$q_{s,v,d}^{-}(r)$的约束条件得出列车座席空余量与未被服务的乘客数量。

采用有限的离散场景集$R=\{1,\ 2,\ \cdots,\ |R|\}$来简化第2阶段的期望值计算，离散场景出现概率$\boldsymbol{p}=\left(p_1,\ p_2\cdots p_{|R|}\right)^{\mathrm{T}}$，$p_r>0$且$\sum_{r\in R}p_r=1$，此时$\sup_{\Theta\in \mathrm{P}}\{\cdot\}$转化为$\sup_{P\in \mathrm{P}}\{\cdot\}$。

$$E_P\left[Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r))\right]=Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r))^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{p} \tag{25}$$

综上所述，构建的两阶段分布鲁棒优化模型(TS-DRO)为

$$(\mathrm{TS-DRO})\begin{cases}\min Z_a+Z_b+Z_c\\ \text{s.t.}\ \ 式(5)—(25)\end{cases}$$

3　算法设计

3.1　模型等价转换

设置规划时段内客流骤增和骤减的典型离散场景，利用非精确场景概率集$\mathcal{P}$刻画不同场景发生概率的波动特性，由此实现客流需求不确定性下的分布鲁棒优化。为了便于将两阶段鲁棒模型转化为求解器能够求解的混合整数线性规划模型，选择L_∞范数非精确集作为描述客流需求不确定性的场景概率非精确集[15]。

$$\mathcal{P}=\left\{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_r+\boldsymbol{\pi}\,|\,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}=0,\ \|\boldsymbol{\pi}\|_\infty\leqslant\Phi\right\},\quad \Phi\in[0,\ 1] \tag{26}$$

式中：$\boldsymbol{p}_r$为从工作实践中统计的客流样本分布；$\boldsymbol{\pi}$为客流场景概率受到的不确定扰动；$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}$为单位向量；$\Phi$为不确定扰动$\boldsymbol{\pi}$的上限，可以通过调整$\Phi$模拟不同强度的不确定性扰动。

将L_∞范数非精确集代入第2阶段目标函数Z_c中可得

$$\sup_{P\in \mathrm{P}} E_P\left[Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r))\right]=\max_{P\in \mathrm{P}} Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r))^{\mathrm{T}}\cdot \boldsymbol{p}=Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r))^{\mathrm{T}}\cdot \boldsymbol{p}_r+\max_{\boldsymbol{\pi}}\ \{Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r))^{\mathrm{T}}\cdot \boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}=0,\ \|\boldsymbol{\pi}\|_\infty\leqslant \boldsymbol{\Phi}\} \tag{27}$$

由于$\|\boldsymbol{\pi}\|_\infty=\max_{r\in R}|\pi_r|$，式(27)中关于$\boldsymbol{\pi}$的部分可以写为

$$\max_{\boldsymbol{\pi}} Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}\quad \text{s.t. } \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}=0,\ \boldsymbol{\pi}\leqslant \boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{\pi}\geqslant -\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{e} \tag{28}$$

由于原模型(TS-DRO)的目标函数为综合成本函数最小化，所以需要对式(28)所表达的模型进行对偶化处理，保证优化方向一致。记$\boldsymbol{\Phi}'=\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{e}$，对偶后的模型如下所示。

$$\min_{\lambda,\ \boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{\rho}} 0\cdot\lambda+\boldsymbol{\Phi}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\Phi}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}\quad \text{s.t. } \boldsymbol{e}\lambda+\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\rho}=Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi}(r))\boldsymbol{\nu}\geqslant\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\rho}\geqslant\boldsymbol{0} \tag{29}$$

式中：λ，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\rho}$为辅助决策变量，λ的维度为1，$\boldsymbol{\nu}$，$\boldsymbol{\rho}$的维度为离散场景集R的场景数量$|R|$。等价转换后的两阶段分布鲁棒模型(TS-DDRO)为

$$(\mathrm{TS-DDRO})\begin{cases}\min Z_a+Z_b+Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\\ \quad \boldsymbol{\xi}(r))^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{p}_r+\boldsymbol{\Phi}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\Phi}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}\\ \text{s.t. 式(5)—(25)，(29)}\end{cases}$$

3.2　模型线性化

第1阶段目标函数Z_b中存在二次项求解难点，为降低模型求解难度，令$\varphi_{s,\ v,\ s_0}^{d,\ k,\ i}=t_{s_0}^{\mathrm{dwell}}q_{s,\ v}^{d,\ k,\ i}x_{k,\ i,\ s_0}^{d}$，其中$\varphi_{s,\ v,\ s_0}^{d,\ k,\ i}$是辅助变量，代表第$d$天第$k$种第$i$列备选列车分担的从$s$到$v$的乘客在第$s_0$个站点的停站等待时间。$U$是整数变量$q_{s,\ v}^{d,\ k,\ i}$的上界[16]，取值为备选列车$i$的定员。

$$\varphi_{s,\ v,\ s_0}^{d,\ k,\ i}\leqslant U\cdot t_{s_0}^{\mathrm{dwell}}x_{k,\ i,\ s_0}^{d}\quad \forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ s\in S_i^{d,\ k}\backslash\{D_i^{d,\ k}\},\ s_0,\ v\in S_i^{d,\ k},\ s<s_0<v \tag{30}$$

$$\varphi_{s,\ v,\ s_0}^{d,\ k,\ i}\geqslant t_{s_0}^{\mathrm{dwell}}\left(q_{s,\ v}^{d,\ k,\ i}-U\cdot\left(1-x_{k,\ i,\ s_0}^{d}\right)\right)\quad \forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ s\in S_i^{d,\ k}\backslash\{D_i^{d,\ k}\},\ s_0,\ v\in S_i^{d,\ k},\ s<s_0<v \tag{31}$$

$$\varphi_{s,\ v,\ s_0}^{d,\ k,\ i}\leqslant t_{s_0}^{\mathrm{dwell}}q_{s,\ v}^{d,\ k,\ i}\quad \forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ s\in S_i^{d,\ k}\backslash\{D_i^{d,\ k}\},\ s_0,\ v\in S_i^{d,\ k},\ s<s_0<v \tag{32}$$

$$\varphi_{s,\ v,\ s_0}^{d,\ k,\ i}\geqslant 0\quad \forall d\in D,\ k\in K,\ i\in I_k^d,\ s\in S_i^{d,\ k}\backslash\{D_i^{d,\ k}\},\ s_0,\ v\in S_i^{d,\ k},\ s<s_0<v \tag{33}$$

此时，目标函数Z_b可以简化为如下形式。

$$Z_b'=\alpha_2\times\sum_{d\in D}\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k^d}\sum_{s\in S_i^{d,\ k}\backslash\{D_i^{d,\ k}\}}\sum_{v\in S_i^{d,\ k},\ v>s}\left(\sum_{s'\in S_i^{d,\ k},\ s\leqslant s'<v}t_{s'}^{\mathrm{run}}q_{s,\ v}^{d,\ k,\ i}+\sum_{s_0\in S_i^{d,\ k},\ s<s_0<v}\varphi_{s,\ v,\ s_0}^{d,\ k,\ i}\right) \tag{34}$$

最终的两阶段分布鲁棒模型(TS-DDRO-LP)为

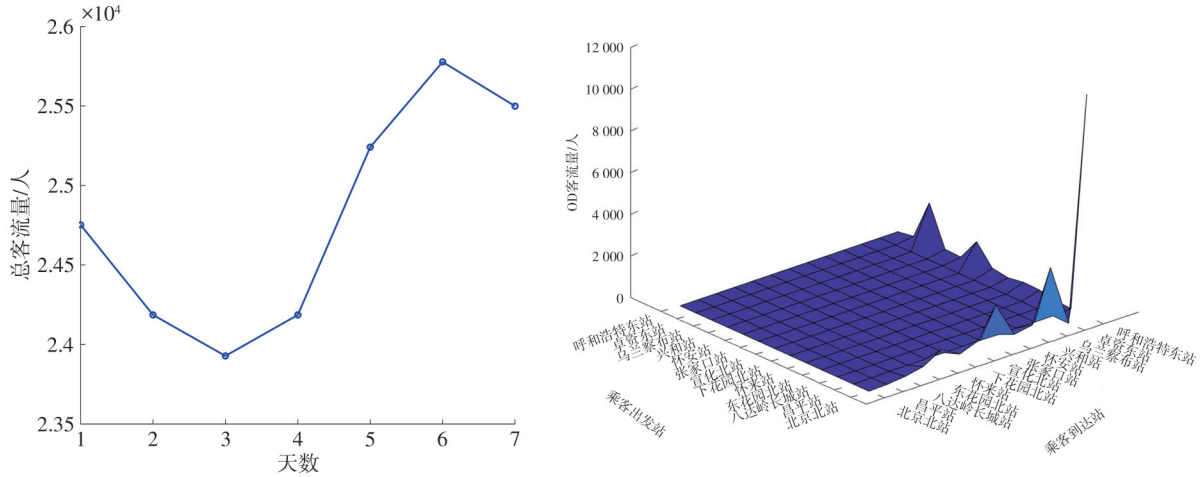
$$(\mathrm{TS-DDRO-LP})\begin{cases}\min Z_a+Z_b'+Q(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{x},\\ \quad \boldsymbol{\xi}(r))^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{p}_r+\boldsymbol{\Phi}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\Phi}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}\\ \text{s.t. 式(5)—(25)，(29)，}\\ \quad \text{(30)—(33)}\end{cases}$$

4　案例分析

4.1　基础数据

以京兰高速铁路北京北—呼和浩特东间线路为背景进行案例分析，线路总里程为459 km，共13个车站，其中北京北站、张家口站、乌兰察布站和呼和浩特东站具备始发终到能力，其他车站为中间站。第s个站点到第$s+1$个站点的区间运行时分t_s^{run}=13，10，9，9，11，11，8，16，20，21，16，28，单位min，$s\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ 12\}$。规划周期设定为7个运营日，客流需求数据如图2所示，日客流总量变化情况如图2a所示，鉴于篇幅限制，以首日数据为例展示OD客流空间分布特征，首日OD客流量如图2b所示。基于京兰高速铁路北京北—呼和浩特东区段2021年非节假日时段的日度OD数据，采用多指标分层聚类方法设置10个不确定场景：按自然周划分样本，计算周总流量、周内波动方差及OD分布熵变方差，加权标准化后综合排序；等分为10组，选取组内多维指标中位数欧氏距离最近的周需求矩阵作为典型离散场景，场景客流总量波动幅度约为均值的15%，每种场景出现的基础概率$p_r=0.1$。

备选列车的定员$Cap_{k,\ i}^{d}$设定为576人/列，参考文献[17]，列车开行的基础成本$h_{k,\ i}^{d}$为5 000元/列，列车单位运行距离的成本α_1为13.629元/km。参考文献[14]，乘客时间感知成本α_2取值为0.62元/min。固定列车与灵活列车的成本系数分别取值为$\beta_1=0.95$，$\beta_2=1$，即假设固定列车可以减少运营过程中的调度费用，固定列车对客流需求最低承担比例σ



a　日客流总量变化情况
a　Changes in daily passenger flow

b　首日OD客流量
b　First day OD passenger flow

图2　客流需求数据

Fig.2　Passenger flow demand data

取值为0.8。

实验设备为Intel(R) Core(TM) i5-10200H CPU (16GB RAM)的计算机，基于Python环境调用GUROBI优化器执行模型求解，终止条件为：求解器采用的分支定界法的最优间隙(MIP Gap)降至2%以下，或求解计算时间大于60 min。

4.2　优化结果

经过1 521.893 s计算，求解TS-DDRO-LP模型得到Gap为1.697 8%的解，鲁棒优化模型求解结果如表2所示。运营周期内列车开行233列，停站761次。固定车次占比96.1%(224列)，灵活车次占比3.9%(9列)，其中固定列车日均开行32列，灵活列车集中分布于周一(1列)、周二(1列)、周五(2列)、周六(3列)及周日(2列)等客流高峰时段。

为展示列车开行方案在规划时段内的动态演化特征，选取3列灵活类型的备选列车与3列固定类型的备选列车进行对比分析，固定列车与灵活列车优化结果如图3所示。其中，固定类型的备选列车在时间维度上保持开行方案稳定；灵活类型的备选列车的开行方案则依据客流波动动态调整，在需求高峰时段增开列车，低谷时段缩减运行班次。所选的6列示例列车每天的上座率如图4所示，运营周期内开行的233列列车的平均上座率为66.023%，所有列车的平均客座率较文献[14]的京张高速铁路开行方案规划结果提高了29.102%。

以周六为例展示当天的列车开行方案，当日共开行35列列车，其中含32列固定列车与3列灵活列车，周六的列车开行方案图如图5所示。通过灵活列车的合理配置，实现了与客流需求的精准匹配与供需平衡，OD需求在规划时段内的平均满足率

表2　鲁棒优化模型求解结果

Tab.2　Solution results of robust optimization model

参数名称	数值
最优目标值/元	5.798×10^6
固定列车成本/元	2.415×10^6
灵活列车成本/元	9.443×10^4
区间运行时间/min	2.065×10^7
车站停站时间/min	5.034×10^5
列车总成本/元	2.389×10^6
乘客时间成本/元	3.131×10^6
席位供需偏差/人	4 636

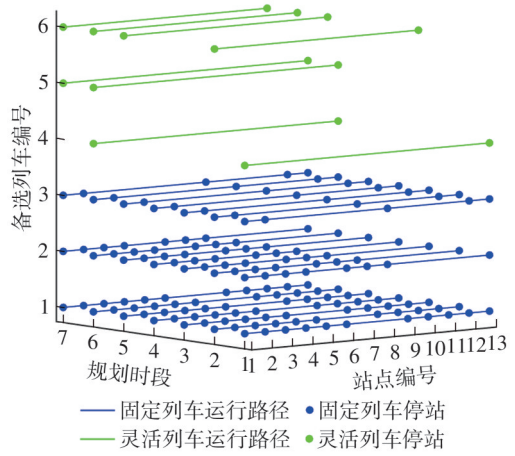


图3　固定列车与灵活列车优化结果

Fig.3　Optimization results of fixed and flexible trains

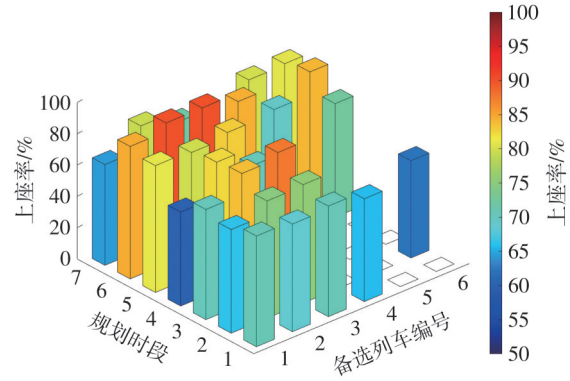


图4　示例列车每天的上座率

Fig.4　Daily occupancy rate of sample trains

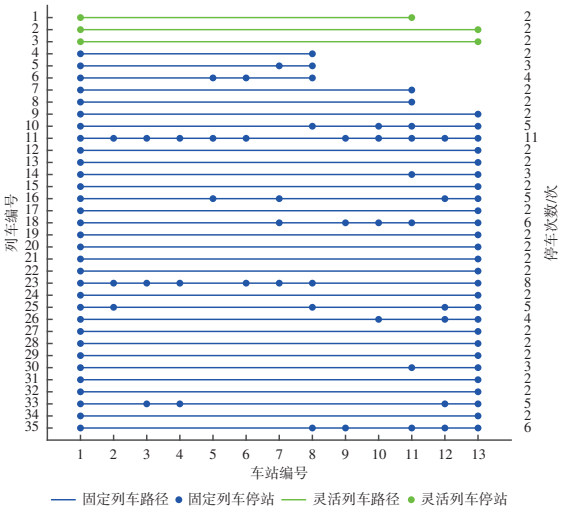


图5　周六的列车开行方案图

Fig.5　Train line planning diagram for Saturday

如图6所示，客流需求的总满足率为97.094%，开行方案能够满足绝大部分客流需求，优化结果较好。

4.3　参数分析与性能评估

4.3.1　开行模式的参数分析

保持列车开行方案的稳定性可显著降低运营调度成本，固定列车成本系数β_1的设定对目标函数具有关键性影响。在TS-DDRO-LP模型中，当固定

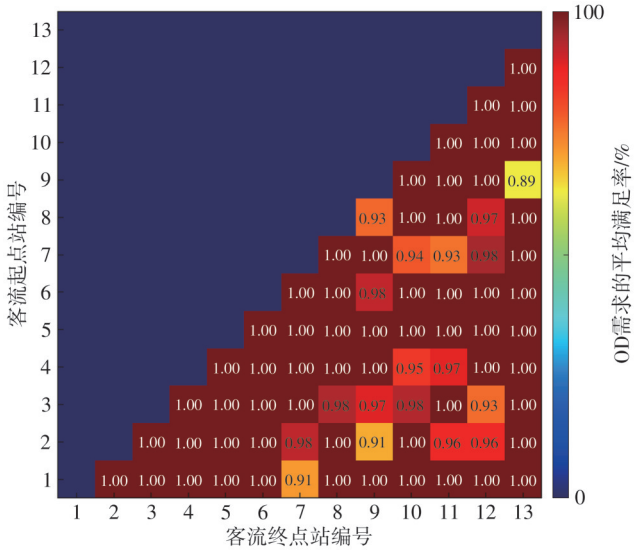


图6　OD需求在规划时段内的平均满足率

Fig.6　Average satisfaction rate of OD demand within planning period

列车成本系数β_1逐渐递减，即固定列车的成本优势逐步增强时，目标函数值呈现递减趋势，固定列车的成本系数灵敏度分析如表3所示。其中，$\beta_1 = 0.95$时，固定列车的单位成本优势开始影响资源配置，触发固定列车数量的正向增长；$\beta_1 = 0.75$时，固定列车的成本优势抵消了客流需求波动的影响，使灵活列车完全退出，此时规划模型无需再考虑客流需求的长时段波动性。后续案例研究中，以$\beta_1 = 0.95$为基准参数展开分析。

固定列车对客流需求的最低承担比σ反映了高速铁路企业对运营稳定性的要求，为验证模型中σ取值的合理性，对σ进行敏感性分析，固定列车承担比σ对目标函数及列车数量的影响如图7所示。结果表明，当σ<0.8时，灵活列车比例过高导致总体成本上升；当σ>0.8时，固定列车无法满足短期波动，需额外增派列车完成运输任务，致使列车总

表3　固定列车的成本系数灵敏度分析

Tab.3　Sensitivity analysis of cost coefficients for fixed trains

对比参数\固定车次的成本系数β_1	1	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75
目标函数值/元	5.911×10^6	5.798×10^6	5.689×10^6	5.540×10^6	5.437×10^6	5.335×10^6
列车开行成本/元	2.526×10^6	2.389×10^6	2.300×10^6	2.153×10^6	2.053×10^6	1.961×10^6
固定列车总数/列	31×7	32×7	32×7	32×7	33×7	34×7
灵活列车总数/列	17	9	9	9	4	0
列车总数量/列	234	233	233	233	235	238

注：规划周期内每天的固定列车数量相同，用一天的固定列车数量×7表示一周的固定列车总数。

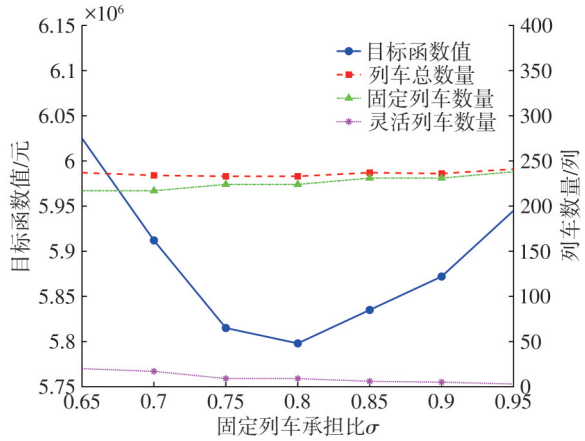


图7　固定列车承担比σ对目标函数及列车数量的影响

Fig.7　Influence of fixed train undertaking ratio σ on objective function and number of trains

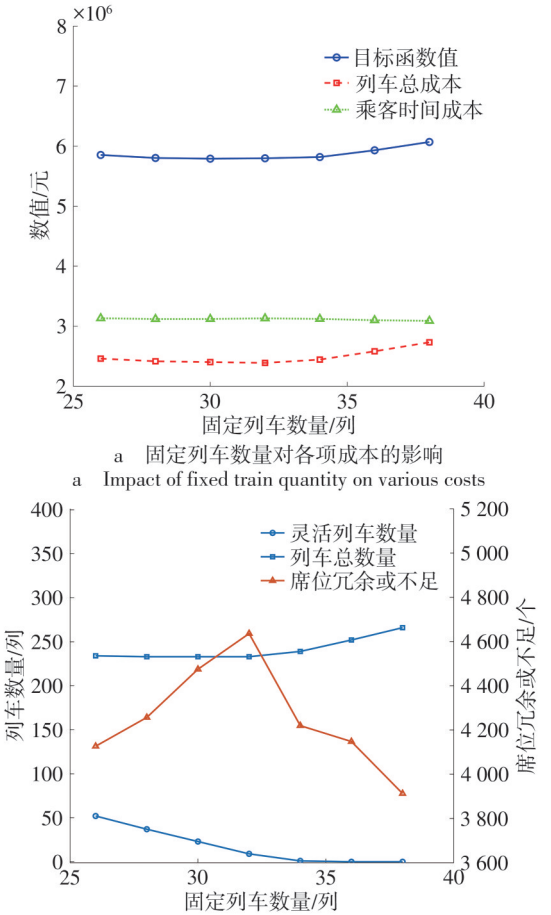
量增加，总成本随之明显上升。因此，σ取值为0.8时，总成本达到最小值，是兼顾运营效率与经济性的最优选择。

为探究固定列车数量对目标函数值的影响，针对TS−DDRO−LP模型进行固定列车数量的灵敏度分析。固定列车数量灵敏度分析如图8所示。当固定列车成本系数为β_1 = 0.95时，目标函数值随固定列车数量增加呈现先降后升趋势，每日固定32个车次时达到最小值。此时相较于全固定列车模式目标函数节省为4.475%，相较于全灵活列车模式节省1.764%，固定列车数量对各项成本的影响如图8a所示。目标函数初期下降源于低成本固定列车对灵活列车的替代效应，但固定列车超过32列/d后，列车开行方案应对客流需求长周期波动的能力下降，导致开行列车数量增加及目标函数上升。

当固定列车数量低于32列/d时，提升灵活列车比例会显著降低席位冗余或不足，表明灵活列车模式能更精准地响应不确定客流需求；当固定列车超过32列/d时，开行列车数量的增加同样有助于减少席位冗余或不足，反映运力规模扩张对不确定性需求的覆盖作用，固定列车数量对席位冗余或不足的影响如图8b所示。然而，灵活列车模式占比提升或列车总量增加均会导致运营成本上升，需结合铁路企业对不确定性客流需求的保障要求，在运营经济性与服务可靠性间寻求动态平衡。

4.3.2　鲁棒模块的性能评估

为验证鲁棒模型的优化效果，比较TS−DDRO−LP鲁棒模型与随机规划模型的最优列车开行方案。



a　固定列车数量对各项成本的影响

a　Impact of fixed train quantity on various costs

b　固定列车数量对席位冗余或不足的影响

b　Impact of fixed train quantity on seat redundancy or insufficiency

图8　固定列车数量灵敏度分析

Fig.8　Sensitivity analysis of fixed train quantity

当鲁棒模型中表征客流需求不确定程度的参数Φ趋近于零时，鲁棒模型退化为基于确定场景概率的随机规划模型；随着Φ逐渐增大，鲁棒模型需通过增强对极端客流场景的鲁棒性来确保解的可靠性，因此目标函数值呈现递增特性，鲁棒模型与随机规划模型结果对比如表4所示。特别地，Φ = 0.10时的鲁棒模型与Φ = 0对应的随机规划模型在目标函数值上差距仅为4.000%，表明TS−DDRO−LP模型通过较小的代价即可实现对不确定客流需求的有效适应。

为了进一步验证鲁棒模型对于不确定客流需求的适应能力，随机设置300组样本外客流情形，观察鲁棒性模型与随机规划模型在面对差异化不确定扰动时的性能。样本外实验直方图如图9所示，鲁棒模型的席位冗余或不足平均值为16 771.476个，相比随机规划模型降低26.414%，席位冗余或不足

表4　鲁棒模型与随机规划模型结果对比

Tab.4　Result comparison between robust model and stochastic programming model

实验\模型	目标函数值/元	列车总成本/元	乘客时间成本/元	固定列车数量/列	灵活列车数量/列	目标函数值相对差距/%
Φ=0.00	5.575×10^6	2.435×10^6	3.140×10^6	224	14	0.000
Φ=0.02	5.772×10^6	2.411×10^6	3.118×10^6	231	4	3.534
Φ=0.04	5.786×10^6	2.404×10^6	3.132×10^6	224	10	3.785
Φ=0.06	5.797×10^6	2.417×10^6	3.126×10^6	217	17	3.982
Φ=0.08	5.807×10^6	2.417×10^6	3.134×10^6	217	17	4.161
Φ=0.10	5.798×10^6	2.389×10^6	3.131×10^6	224	9	4.000

注：目标函数值相对差距=(Z(Φ)−Z(0))/Z(0)×100%。

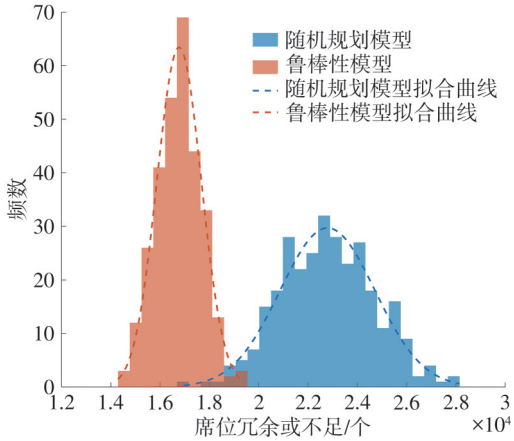


图9　样本外实验直方图

Fig.9　Histogram of out-of-sample experiments

分布整体小于随机规划模型，表明在不确定性客流需求条件下鲁棒模型在抑制极端偏差与维持供需平衡方面优于随机规划模型。

5　结论

针对长周期客流需求的波动性与不确定性，提出“固定+灵活”的列车开行模式，建立以最小化高速铁路列车运行成本、乘客旅行时间、席位供需偏差为目标的两阶段分布鲁棒优化模型，并利用L_∞范数非精确集和对偶理论将模型等价转化为混合整数线性规划模型，采用GUROBI求解器进行求解，最后，通过北京北—呼和浩特东的实证案例验证模型的有效性。

（1）实际运营中应以固定列车为主导，灵活列车仅在高峰期作为补充。规划最优解中，总开行量233列次中固定列车占比96.1%(224列)，灵活列车集中于周一、周二及周末(周五至周日)等客流高峰期，对应分别配置1/1/2/3/2列。

（2）固定列车成本系数β_1低于特定阈值时，固定列车相较于灵活列车在运营调度上的成本节约抵消了客流需求波动性的影响。当β_1为0.75时，规划时段内238列车均采用固定模式开行，固定列车在运营调度上的成本节约大于灵活列车对波动性客流需求的吸收作用带来的收益。

（3）灵活列车有助于应对客流需求的波动性与不确定性。随着灵活列车比例的增加，综合成本先减小后增大，最优成本对应固定列车数量为32列/d，此时相较于全固定模式综合成本降低4.475%，相较于全灵活模式节约1.764%。

（4）鲁棒模型能以较低代价抑制需求分布不确定性对系统的影响，且分布鲁棒优化方法对于不确定客流需求的吸收效果优于传统随机规划模型。分布鲁棒优化模型(TS−DDRO−LP)相较于随机规划模型，最优成本仅增加4.000%，而在样本外实验中，席位供需偏差的均值降低26.414%。

未来可从以下方面深入研究：一是考虑固定列车持续时间对开行方案规划结果的影响；二是在模型中增设节假日高峰情景，以进一步提升鲁棒列车开行方案的普适性与适用范围；三是研究“固定+灵活”模式下的列车时刻表与动车组交路优化问题。

参考文献：

[1] 尹　东. 高速铁路复兴号品牌战略实施对策研究[J]. 铁道运输与经济，2019，41(12)：53−57.
YIN Dong. A Study on the Implementation of Fuxing Brand Strategy of High Speed Railway[J]. Railway Transport and Economy，2019，41(12)：53−57.

[2] 龙品秀，史　峰，胡心磊，等. 不同需求日高速铁路列车开行方案协同优化方法[J]. 铁道科学与工程学报，2019，16(2)：310−318.

LONG Pinxiu，SHI Feng，HU Xinlei，et al. The Collaborative Optimization of Multi-Day Line Plannings for High Speed Railway[J]. Journal of Railway Science and Engineering，2019，16(2)：310-318.

[3] 周文梁，康　静，李　莎，等. 基于多日需求情景的高速铁路列车开行方案鲁棒优化[J]. 铁道科学与工程学报，2022，19(7)：1810-1819.
ZHOU Wenliang，KANG Jing，LI Sha，et al. Robust Optimization of High Speed Railway Train Plan Based on Multiple Demand Scenarios[J]. Journal of Railway Science and Engineering，2022，19(7)：1810-1819.

[4] 钟林环，徐光明，武润发，等. 基于时变区间断面需求的高速铁路网络列车开行方案优化[J]. 铁道科学与工程学报，2023，20(12)：4461-4472.
ZHONG Linhuan，XU Guangming，WU Runfa，et al. Optimization of Line Planning for High Speed Rail Network Based on Time-Varying Section Demand[J]. Journal of Railway Science and Engineering，2023，20(12)：4461-4472.

[5] NIU H M，ZHOU X S，GAO R H. Train Scheduling for Minimizing Passenger Waiting Time with Time-Dependent Demand and Skip-Stop Patterns：Nonlinear Integer Programming Models with Linear Constraints[J]. Transportation Research Part B：Methodological，2015，76：117-135.

[6] 张春田，戚建国，杨立兴，等. 基于不确定旅客需求的高速铁路鲁棒列车开行方案研究[J]. 交通运输系统工程与信息，2022，22(1)：115-123.
ZHANG Chuntian，QI Jianguo，YANG Lixing，et al. Robust Train Operation Plan Based on Uncertain Passenger Demands for High Speed Railway Corridors[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology，2022，22(1)：115-123.

[7] 武晋飞，游雪松，薛　冰. 考虑客流波动条件下高速铁路票额分配鲁棒性模型研究[J]. 铁道运输与经济，2021，43(5)：17-23.
WU Jinfei，YOU Xuesong，XUE Bing. Research on Ticket Allocation Robustness Model for High Speed Railway with Passenger Flow Fluctuation[J]. Railway Transport and Economy，2021，43(5)：17-23.

[8] CACCHIANI V，QI J G，YANG L X. Robust Optimization Models for Integrated Train Stop Planning and Timetabling with Passenger Demand Uncertainty[J]. Transportation Research Part B：Methodological，2020，136：1-29.

[9] PU S，ZHAN S G. Two-Stage Robust Railway Line Planning Approach with Passenger Demand Uncertainty[J]. Transportation Research Part E：Logistics and Transportation Review，2021，152：102372.

[10] LIU L Y，SONG S J，WANG Z L，et al. Data-Driven Distributionally Robust Optimization for Railway Timetabling Problem[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering，2024，21(1)：810-826.

[11] 崔艳萍，于　潇. 胶济客运专线年度客运量预测研究[J]. 铁道运输与经济，2014，36(5)：44-48.
CUI Yanping，YU Xiao. Study on Forecast of Annual Passenger Transport Volume of Qingdao-Ji'nan DPL[J]. Railway Transport and Economy，2014，36(5)：44-48.

[12] 王炜炜. 高速铁路影响下铁路客流量预测研究[J]. 铁道运输与经济，2016，38(4)：42-46，51.
WANG Weiwei. Study on Forecast of Railway Passenger Flow Volume under Influence of High Speed Railways[J]. Railway Transport and Economy，2016，38(4)：42-46，51.

[13] MA X X，XU Y D. Robust Multi-Criteria Traffic Network Equilibrium Problems with Path Capacity Constraints[J]. Axioms，2023，12(7)：662.

[14] 孙国锋，景　云，马亚雯. 考虑旅客多维出行需求的动态列车开行方案优化[J]. 铁道学报，2022，44(11)：10-18.
SUN Guofeng，JING Yun，MA Yawen，et al. Optimization of Dynamic Train Line Planning Considering Multi-Dimensional Travel Demand of Passengers[J]. Journal of the China Railway Society，2022，44(11)：10-18.

[15] WANG W Q，YANG K，YANG L X，et al. Two-Stage Distributionally Robust Programming Based on Worst-Case Mean-CVaR Criterion and Application to Disaster Relief Management[J]. Transportation Research Part E：Logistics and Transportation Review，2021，149：102332.

[16] SHERALI H D，SMITH J C. Improving Discrete Model Representations via Symmetry Considerations[J]. Management Science，2001，47(10)：1396-1407.

[17] LIU D，DURÁN Micco J，LU G Y，et al. A Matheuristic Iterative Approach for Profit-Oriented Line Planning Applied to the Chinese High Speed Railway Network[J]. Journal of Advanced Transportation，2020，2020：4294195.

(责任编辑　汪沁萱)