doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024119

闭型离散更新截断 δ 冲击模型的寿命分布

马 明，黄 媛
（西北民族大学 数学与计算机科学学院，兰州 730030）

摘要：采用取条件法、概率法研究闭型离散更新截断 δ 冲击模型的寿命问题，得到了该模型的可靠度、寿命的矩等寿命性质的显式表达式，并将该模型的寿命分布和平均寿命应用在具体分布中进行数值模拟.

关键词：离散更新；闭型截断；δ 冲击模型；系统寿命
中图分类号：O213.2 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)06-1334-11

Lifetime Distribution of Closed Discrete Renewal Censored δ Shock Model

MA Ming, HUANG Ai
(*School of Mathematics and Computer Science, Northwest Minzu University, Lanzhou* 730030, *China*)

Abstract: The lifetime problem of a closed discrete renewal censored δ shock model was studied by using condition method and probability method. The explicit expressions of the lifetime properties such as reliability and moment of lifetime of the model were obtained, the lifetime distribution and the mean lifetime of the model were applied to specific distributions and performed numerical simulations.

Keywords: discrete renewal; closed censored; δ shock model; system lifetime

冲击模型广泛应用于金融、货币政策、维修等领域，冲击模型研究的中心问题是系统失效时间(称为系统寿命). 冲击模型主要有传统冲击模型和 δ 冲击模型等，其中 δ 冲击模型可分为经典 δ 冲击模型和截断 δ 冲击模型两类. 经典 δ 冲击模型是李泽慧[1]在研究城市交通拥挤问题中抽象出来的一种模型，其以冲击时间间隔小于一个阈值 δ 时系统失效为失效机制. 在此基础上，Ma 等[2]在研究客户关系管理时提出了截断 δ 冲击模型，其以冲击时间间隔大于一个阈值 δ 时系统失效为失效机制. 目前，关于开型离散截断 δ 冲击模型的研究已取得了丰富的结果. 例如：张攀等[3]考虑一种冲击仅可能发生在整数时刻点上，并且在整数时刻点上冲击是否到达服从 0-1 分布的截断 δ 冲击模型，得到了系统寿命的分布和系统寿命的期望；冶建华等[4]定义了一般开型离散截断 δ 冲击模型，并讨论了冲击间隔服从格点分布的开型离散截断 δ 冲击模型的寿命性质，得到了系统寿命的概率分布列及平均寿命；马明等[5]在开型离散截断 δ 冲击模型的基础上，得到了格点更新开型离散截断 δ 冲击模型系统的可靠度、失效率、平均寿命、平均剩余寿命等指标；Bian 等[6]研究了格点更新二项截断 δ 冲击模型和 Markov 截断 δ 冲击模型的可靠度，并通过使用概率生成函数的方法得到了系统寿命的期望和方差；姜伟欣

收稿日期：2024-03-26.

第一作者简介：马 明(1971—)，男，回族，博士，教授，从事可靠性理论的研究，E-mail：mm9252@qq.com. **通信作者简介**：黄 媛(1999—)，女，土家族，硕士研究生，从事可靠性理论的研究，E-mail：2024610153@qq.com.

基金项目：中央高校基本科研业务费专项基金(批准号：31920210019)和甘肃省高等教育教学成果培育项目(批准号：2021GSJXCGPY-03).

等[7]研究了非负几何开型离散截断 δ 冲击模型的寿命性质，得到了系统的寿命分布、平均寿命、可靠度与失效率等指标；Ma 等[8]研究了一种冲击时间间隔按照离散时间 Markov 链到达的截断 δ 冲击模型，给出了系统的寿命分布和期望；Chadjiconstantinidis 等[9]研究了冲击时间间隔具有离散和连续分布时的截断 δ 冲击模型的可靠性指标，并给出了系统寿命的分布和矩；彭博等[10]利用 Bayes 估计方法，在最小均方误差原则下，基于寿命终止时总冲击次数及冲击到达时间这两类样本数据，得到了 Poisson 截断 δ 冲击模型冲击参数 λ 的 Bayes 估计量；马明等[11]针对 Poisson 截断 δ 冲击模型失效参数的估计问题，利用 Bayes 估计方法，在最小均方误差原则下，基于寿命终止时总冲击次数及冲击到达时间这两类样本数据，在不同的先验假设下，给出了 Poisson 截断 δ 冲击模型失效参数 δ 的 Bayes 估计量；Bian 等[12]利用多元分析方法和技术，得到了极端冲击模型和累积冲击模型下 k-out-of-$n(G)$ 系统可靠性函数的闭合形式，并采用 Monte Carlo 模拟作为辅助方法计算了系统可靠度；马明等[13]得到了 3 个定积分的显示表达式，其对 Poisson 截断 δ 冲击模型中的可靠性计算具有重要作用；Bian 等[14]采用广义 Pólya 过程进行建模，给出了相遇的冲击模型、可靠性函数、可靠性函数的上界、平均寿命、故障率和寿命分布类型，确定了最优更换策略.

本文在开型截断 δ 冲击模型的基础上，通过扩展系统失效条件，提出一种闭型截断 δ 冲击模型，并以闭型离散截断 δ 冲击模型为基础，对一类冲击的时间间隔相互独立且服从同一个格点分布的系统进行研究，讨论模型系统寿命 T 与失效阈值 δ 的关系，给出相关冲击模型系统寿命的分布、平均寿命等可靠性指标.

1　闭型离散更新截断 δ 冲击模型

考虑一个冲击的时间间隔相互独立且服从同一个格点分布(设其周期为 1)的冲击模型，记 $S_n(n=1,2,\cdots)$为第 n 次冲击到达的时刻，$Z_n(n=1,2,\cdots)$为第$(n-1)$次与第 n 次冲击之间的时间间隔，$N(n)$ $(n=0,1,\cdots)$为直到时刻 n 系统受到的冲击总次数. 对 $n=0,1,2,\cdots$，记 $p_k=P(Z_k=i)$，$k=0,1,2,\cdots$，其中 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k=1$(不考虑 $P(Z_n=\infty)>0$ 的情形)，Z_n 的生存函数为 $\bar{F}(i)=P(Z_n>i)$. 若该系统经某次冲击后时长达到正整数 δ 才有新冲击到达或仍没有新冲击到达，系统就失效，则该系统称为失效参数为 δ 的闭型离散更新截断 δ 冲击模型，简记为 SM$\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(\delta)\}$(其中 SM 表示 shock model，RE 表示 renewal，$\mathrm{CD_c}$ 表示 closed discrete censored)，δ 也称为系统失效阈值.

与开型截断 δ 冲击模型相比，闭型比开型多了一个失效条件，即冲击间隔为 δ 时长时系统也失效. 在 SM$\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(\delta)\}$中，设 M 表示系统失效前的总冲击次数，即

$$\{M=m\}=\{Z_0<\delta,\ Z_1<\delta,\ \cdots,\ Z_m<\delta,\ Z_{m+1}\geqslant\delta\},\qquad m=0,1,\cdots, \tag{1}$$

其中 Z_0 恒为 0，则根据截断 δ 冲击模型的失效机制有系统寿命 $T=\sum\limits_{n=0}^{M}Z_n+\delta$，并满足 $P(T\geqslant\delta)=1$，此时可记作 $T\sim$SM$\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(\delta)\}$. 当 $M=m$ 时 SM$[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(\delta)\}$的样本轨道如图 1 所示.

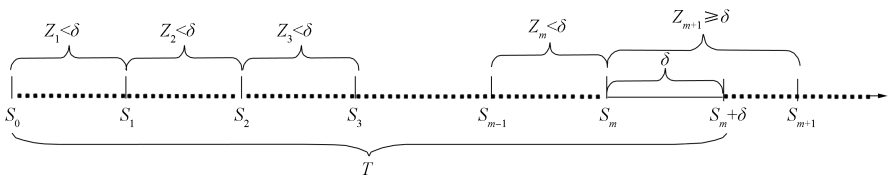


图 1　当 $M=m$ 时 SM$[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(\delta)\}$的样本轨道

Fig. 1　Sample trajectories of SM$\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(\delta)\}$ when $M=m$

2　主要结果

若无特殊说明，本文系统均指 SM$\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(\delta)\}$. 先考察系统寿命 T 的概率分布列. 首先

不考虑 p_0 恒为 1 这种平凡情形. 显然，若 $\sum_{k=0}^{\delta-1} p_k = 1$，则由模型失效机制可得系统永不失效，即有 $P(T=\infty)=1$. 此外，若 $\sum_{k=0}^{\delta-1} p_k = 0$，则由式及 $T = \sum_{n=0}^{M} Z_n + \delta$，可得 $P(T=\delta)=1$. 所以以下仅考虑 $0 < \sum_{k=0}^{\delta-1} p_k < 1$ 的情形.

设 $\delta=1$，若使事件$\{T=1\}$发生，则系统从时刻 $t=0$ 出发需时间长度等于 1 或超过 1 才有可能发生冲击(该冲击发生概率为 $P(Z\geqslant 1)=1-p_0$，其中 Z 表示冲击时间间隔). 但若 $p_0\neq 0$，则发生该冲击前可能在 $t=0$ 时刻发生若干个时间间隔为 0 的冲击 $\left(\text{概率为}\sum_{n=0}^{\infty} p_0^n\right)$，此时有 $P(T=1)=P(Z\geqslant 1)\sum_{n=0}^{\infty} p_0^n$，即

$$P(T=1)=\begin{cases} P(Z\geqslant 1), & p_0=0,\\ (1-p_0)\sum_{n=0}^{\infty} p_0^n, & p_0\neq 0. \end{cases}$$

于是可得如下定理.

定理 1 设 $p_0<1$，$T\sim \mathrm{SM}\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(1)\}$，则 $P(T=1)=1$.

当 $\delta=2$ 时系统的寿命分布有如下结果.

定理 2 设 $p_0<1$，$T\sim \mathrm{SM}\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(2)\}$，则系统寿命的分布

$$P(T=m)=\begin{cases} (1-p_0-p_1)\dfrac{p_1^{m-2}}{(1-p_0)^{m-1}}, & m=2,3,\cdots,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{2}$$

其中规定 $0^0=1$.

证明：由于寿命 T 满足 $T\geqslant\delta$，即 $T\geqslant 2$，所以

$$P(T=1)=0.$$

若使事件$\{T=2\}$发生，则系统从时刻 $t=0$ 出发需时间长度等于 2 或超过 2 才有可能发生冲击(该冲击发生概率为 $P(Z\geqslant 2)=1-p_0-p_1$，其中 Z 表示冲击时间间隔). 但若 $p_0\neq 0$，则发生该冲击前可能在 $t=0$时刻发生若干个时间间隔为 0 的冲击 $\left(\text{概率为}\sum_{n=0}^{\infty} p_0^n\right)$，所以有

$$P(T=2)=\begin{cases} P(Z\geqslant 2), & p_0=0,\\ P(Z\geqslant 2)\sum_{n=0}^{\infty} p_0^n, & p_0\neq 0 \end{cases}=\begin{cases} 1-p_1, & p_0=0,\\ \dfrac{1-p_0-p_1}{1-p_0}, & p_0\neq 0 \end{cases}=\frac{1-p_0-p_1}{1-p_0}. \tag{3}$$

当整数 $m>2$ 时，因为 $\delta=2$，故根据寿命 T 的定义有

$$\{T=m\}\Leftrightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty}\{Z_0+Z_1+\cdots+Z_n=m-2,\ Z_0<2,\ Z_1<2,\ \cdots,\ Z_n<2,\ Z_{n+1}\geqslant 2\},$$

从而有

$$P(T=m)=P(Z_0=m-2,\ Z_0<2,\ Z_1\geqslant 2)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_0+Z_1+\cdots+Z_n=m-2,\ Z_0<2,\ Z_1<2,\ \cdots,\ Z_n<2,\ Z_{n+1}\geqslant 2).$$

由于 Z_0 恒为 0，$m>2$，即 $P(Z_0=m-2,\ Z_0<2,\ Z_1\geqslant 2)=0$，所以有

$$P(T=m)=\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_1+Z_2+\cdots+Z_n=m-2,\ Z_1\leqslant 1,\ Z_2\leqslant 1,\ \cdots,\ Z_n\leqslant 1,\ Z_{n+1}>1). \tag{4}$$

对 $\forall n=1,2,\cdots$，若$\{Z_i\leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,n\}$发生，则有$\{Z_1+Z_2+\cdots+Z_n\leqslant n\}$，所以要使$\{Z_1+Z_2+\cdots+Z_n=m-2,\ Z_1\leqslant 1,\ Z_1\leqslant 1,\cdots,Z_n\leqslant 1,\ Z_{n+1}>1\}$发生，必须有 $m-2\leqslant n$，于是式(4)等价于

$$P(T=m)=\sum_{n=m-2}^{\infty}P(Z_1+Z_2+\cdots+Z_n=m-2,\ Z_1\leqslant 1,\ Z_2\leqslant 1,\ \cdots,\ Z_n\leqslant 1,\ Z_{n+1}>1).$$

又由于 $Z_i(i=1,2,\cdots,n)$是独立同分布的，所以

$$P(T=m)=\sum_{n=m-2}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=m-2\\ k_i=0,1,\ i=1,2,\cdots,n}}P(Z_1=k_1,\ Z_2=k_2,\ \cdots,\ Z_n=k_n,\ Z_{n+1}>1)=$$

$$\overline{F}(1)\sum_{n=m-2}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=m-2\\ k_i=0,1,\ i=1,2,\cdots,n}}p_{k_1}p_{k_2}\cdots p_{k_n}. \tag{5}$$

设整数 $n\geqslant m-2$，则在非负整数 $k_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$条件下，$k_1+k_2+\cdots+k_n=m-2$ 表示从 n 个 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$中选中$(m-2)$个令其值为 1，剩余的$(n-m+2)$个取值为 0，这种取法总数为$\binom{n}{m-2}$，因此

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=m-2\\ k_i=0,1,\ i=1,2,\cdots,n}}p_{k_1}p_{k_2}\cdots p_{k_n}=\binom{n}{m-2}p_1^{m-2}p_0^{n-m+2}, \tag{6}$$

将式(6)代入式(5)有

$$P(T=m)=\overline{F}(1)\sum_{n=m-2}^{\infty}\binom{n}{m-2}p_1^{m-2}p_0^{n-m+2}=\overline{F}(1)p_1^{m-2}\sum_{n=m-2}^{\infty}\binom{n}{m-2}p_0^{n-m+2}. \tag{7}$$

为计算 $\sum_{n=m-2}^{\infty}\binom{n}{m-2}p_0^{n-m+2}$，先考察参数为 $m-2$ 和 $1-p_0$ 的正值 Pascal 分布的期望，有

$$\sum_{n=m-2}^{\infty}n\binom{n-1}{(m-2)-1}(1-p_0)^{m-2}p_0^{n-(m-2)}=\frac{m-2}{1-p_0}, \tag{8}$$

再由 $n\binom{n-1}{(m-2)-1}=(m-2)\binom{n}{m-2}$得

$$\sum_{n=m-2}^{\infty}n\binom{n-1}{(m-2)-1}(1-p_0)^{m-2}p_0^{n-(m-2)}=(m-2)(1-p_0)^{m-2}\sum_{n=m-2}^{\infty}\binom{n}{m-2}p_0^{n-(m-2)}. \tag{9}$$

将式(8)代入式(9)，计算得

$$\sum_{n=m-2}^{\infty}\binom{n}{m-2}p_0^{n-m+2}=\frac{1}{(1-p_0)^{m-1}}. \tag{10}$$

将式(10)代入式(7)，得

$$P(T=m)=(1-p_0-p_1)\frac{p_1^{m-2}}{(1-p_0)^{m-1}}. \tag{11}$$

显然，式(11)对式(3)$m=2$ 的情形也成立(其中若 $p_1=0$，规定 $0^0=1$)．证毕．

下面证明式(2)满足正则性．因为

$$\sum_{m=0}^{\infty}P(T=m)=\sum_{m=2}^{\infty}(1-p_0-p_1)\frac{p_1^{m-2}}{(1-p_0)^{m-1}}=\frac{(1-p_0-p_1)}{1-p_0}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{p_1}{1-p_0}\right)^m, \tag{12}$$

由于仅考虑 $0<\sum_{k=0}^{\delta-1}p_k<1$ 的情形，所以有 $0<p_0+p_1<1$，满足

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{p_1}{1-p_0}\right)^m=\frac{1-p_0}{1-p_0-p_1},$$

将其代入式(12)得

$$\sum_{m=0}^{\infty}P(T=m)=1.$$

于是可得如下推论．

推论 1 设 $0<p_0+p_1<1$，$T\sim \mathrm{SM}\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(2)\}$，则 $P(T<\infty)=1$.

定理 2 表明当 $\delta=2$ 时，系统寿命 T 的分布完全由 p_0 和 p_1 决定，而推论 1 表明 T 是有限的.

下面讨论 $\delta\geqslant 2$ 时 $\mathrm{SM}\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(\delta)\}$模型系统寿命 T 的分布. 记 $\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数，$\lfloor x\rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数.

定理 3 设 $p_0<1$，$\delta\geqslant 2$，$T\sim \mathrm{SM}\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD_c}(\delta)\}$，则系统寿命的分布为

$$P(T=m)=\begin{cases}0, & m=0,1,\cdots,\delta,\\ \dfrac{\bar F(\delta-1)}{1-p_0}, & m=\delta,\\ \bar F(\delta-1)\displaystyle\sum_{i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil}^{\infty}\sum_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant\delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j=m-\delta}}\Big(\prod_{j=1}^{i}p_{k_j}\Big), & m=\delta+1,\delta+2,\cdots,\end{cases}\tag{13}$$

其中 $\bar F(\delta-1)=1-\sum\limits_{k=0}^{\delta-1}p_k$.

证明：根据系统寿命 T 的定义，对 $m=\delta$，$\delta+1$，…，有

$$P(T=m)=P\Big(\sum_{n=0}^{M}Z_n=m-\delta\Big).\tag{14}$$

若 $m=\delta$，对式(14)关于 M 取条件，得

$$P(T=m)=P\Big(\sum_{n=0}^{M}Z_n=0\Big)=\sum_{i=0}^{\infty}P\Big(\sum_{n=0}^{i}Z_n=0,\ M=i\Big).$$

对 $i=0,1,\cdots$，事件 $\Big\{\sum\limits_{n=0}^{i}Z_n=0,\ M=i\Big\}$ 发生等价于$\{Z_0$ 恒为 0，$Z_1=0$，…，$Z_i=0$，$Z_{i+1}>\delta-1\}$发生，所以

$$P(T=m)=\sum_{i=0}^{\infty}P(Z_0\text{ 恒为 }0,\ Z_1=0,\ \cdots,\ Z_i=0,\ Z_{i+1}>\delta-1).\tag{15}$$

由独立性，对 $i=0,1,\cdots$，有

$$P(Z_0\text{ 恒为 }0,\ Z_1=0,\ \cdots,\ Z_i=0,\ Z_{i+1}>\delta-1)=p_0^i\bar F(\delta-1),\tag{16}$$

其中对 $i=0$，若 $p_0=0$，规定 $0^0=1$. 将式(16)代入式(15)，得

$$P(T=m)=\bar F(\delta-1)\sum_{i=0}^{\infty}p_0^i=\frac{\bar F(\delta-1)}{1-p_0}.$$

若 $m>\delta$，同理可得

$$P(T=m)=\sum_{i=0}^{\infty}P\Big(\sum_{n=0}^{i}Z_n=m-\delta,\ M=i\Big).\tag{17}$$

由式(1)，对 $\forall\, i=0,1,\cdots$，$\{M=i\}\Leftrightarrow\{Z_0\leqslant\delta-1,\ Z_1\leqslant\delta-1,\ \cdots,\ Z_i\leqslant\delta-1,\ Z_{i+1}>\delta-1\}$，其中 Z_0 恒为 0，所以由冲击间隔独立同分布式(17)有

$$\begin{aligned}P(T=m)&=P(Z_0=m-\delta,\ Z_0\leqslant\delta-1,\ Z_1>\delta-1)+\\ &\sum_{i=1}^{\infty}P\Big(\sum_{n=1}^{i}Z_n=m-\delta,\ Z_1\leqslant\delta-1,\ Z_2\leqslant\delta-1,\ \cdots,\ Z_i\leqslant\delta-1,\ Z_{i+1}>\delta-1\Big)=\\ &\bar F(\delta-1)\sum_{i=1}^{\infty}P\Big(\sum_{n=1}^{i}Z_n=m-\delta,\ Z_1\leqslant\delta-1,\ Z_2\leqslant\delta-1,\ \cdots,\ Z_i\leqslant\delta-1\Big).\end{aligned}\tag{18}$$

对 $i=1,2,\cdots$，若 $Z_1\leqslant\delta-1$，$Z_2\leqslant\delta-1$，…，$Z_i\leqslant\delta-1$ 发生，则有 $Z_1+Z_2+\cdots+Z_i\leqslant i(\delta-1)$，所以若使事件 $\Big\{\sum\limits_{n=1}^{i}Z_n=m-\delta,\ Z_1\leqslant\delta-1,\ Z_2\leqslant\delta-1,\ \cdots,\ Z_i\leqslant\delta-1\Big\}$ 发生，必须满足 $m-\delta\leqslant i(\delta-1)$.

因为 $m>\delta\geqslant 2$，即 $i\geqslant\lceil\dfrac{m-\delta}{\delta-1}\rceil\geqslant 1$，所以根据式(18)有

$$P(T=m)=\bar{F}(\delta-1)\sum_{i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil}^{\infty}\sum_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant\delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j=m-\delta}}P(Z_1=k_1,\ Z_2=k_2,\ \cdots,\ Z_i=k_i)=$$

$$\bar{F}(\delta-1)\sum_{i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil}^{\infty}\sum_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant\delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j=m-\delta}}\Big(\prod_{j=1}^{i}p_{k_j}\Big).$$

证毕.

由定理 3 可见，系统寿命 T 的分布列只与 $p_0,p_1,\cdots,p_{\delta-1}$ 有关，即闭型离散更新截断 δ 冲击模型的系统寿命 T 的分布完全由冲击间隔分布列的前 δ 个值决定. 此外，若 $p_0=0$，则考察式(13)的变形. 首先若 $m=\delta$，则根据式(13)有 $P(T=\delta)=\bar{F}(\delta-1)$. 其次，再考察整数 $m>\delta$ 的情形，因为 $p_0=0$，式(13)中 k_j 的范围变为 $1\leqslant k_j\leqslant\delta-1$，所以对 $\forall\, i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil,\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil+1,\cdots$，若 $1\leqslant k_j\leqslant\delta-1$，$j=1,2,\cdots,i$，则 $k_1+k_2+\cdots+k_i\geqslant i$，因此只有 $i\leqslant m-\delta$ 时，

$$\Big\{\sum_{j=1}^{i}k_j=m-\delta,\ 1\leqslant k_j\leqslant\delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\Big\}$$

才不为空. 从而根据式(13)有

$$P(T=m)=\bar{F}(\delta-1)\sum_{i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil}^{m-\delta}\sum_{\substack{1\leqslant k_j\leqslant\delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j+\delta=m}}\Big(\prod_{j=1}^{i}p_{k_j}\Big).$$

综上可得如下无冲击重点情形的系统寿命分布.

推论 2　设 $p_0=0$，$\delta\geqslant2$，$T\sim\mathrm{SM}\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD}_c(\delta)\}$，则系统寿命分布为

$$P(T=m)=\begin{cases}0, & m=0,1,\cdots,\delta,\\ \bar{F}(\delta-1), & m=\delta,\\ \bar{F}(\delta-1)\displaystyle\sum_{i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil}^{m-\delta}\sum_{\substack{1\leqslant k_j\leqslant\delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j=m-\delta}}\Big(\prod_{j=1}^{i}p_{k_j}\Big), & m=\delta+1,\delta+2,\cdots.\end{cases}\tag{19}$$

如果对 $\forall\, i=1,2,\cdots$，$\prod_{j=1}^{i}p_{k_j}$ 可写成 $k_1,k_2,\cdots,k_i$ 和的函数，其中 $0\leqslant k_j\leqslant\delta-1$，$j=1,2,\cdots,i$，则 $\mathrm{SM}\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD}_c(\delta)\}$ 的寿命分布有以下显式表示.

推论 3　设 $p_0<1$，$\delta\geqslant2$，$T\sim\mathrm{SM}\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD}_c(\delta)\}$，若 $\forall\, x\in(-\infty,\infty)$，存在非负二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}p_0^x, & y=0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$ 使得对 $\forall\, i=1,2,\cdots$ 及 $k_j=0,1,\cdots,\delta-1$，$j=1,2,\cdots,i$ 满足 $\prod_{j=1}^{i}p_{k_j}=f\Big(i,\sum_{j=1}^{i}k_j\Big)$，则对 $\forall\, m=0,1,\cdots$，有

$$P(T=m)=\bar{F}(\delta-1)\sum_{i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil}^{\infty}f(i,m-\delta)\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m-\delta}{\delta}\rfloor}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{m-\delta-\delta j+i-1}{i-1},$$

其中 $\bar{F}(\delta-1)=1-\sum_{k=0}^{\delta-1}p_k$，规定 $\binom{-1}{-1}=1$.

证明：考察式(13)中 $m>\delta$ 的情形，因为对 $\forall\, i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil,\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil+1,\cdots$，有 $\prod_{j=1}^{i}p_{k_j}=f\Big(i,\sum_{j=1}^{i}k_j\Big)$，则

$$\sum_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant \delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j+\delta=m}} p_{k_1}p_{k_2}\cdots p_{k_i}=f(i,m-\delta)\sum_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant \delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j+\delta=m}}1. \tag{20}$$

对 $\forall i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil,\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil+1,\cdots$，由文献[15]可知：满足条件 $0\leqslant k_j\leqslant\delta-1(j=1,2,\cdots,i)$ 的关于 $k_1,k_2,\cdots,k_i$ 的不定方程 $k_1+k_2+\cdots+k_i=m-\delta$ 的整数解数目为

$$\sum_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant \delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j+\delta=m}}1=\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{m-\delta-\delta j+i-1}{i-1}. \tag{21}$$

在式(21)中，要求 $m-\delta-\delta j+i-1\geqslant i-1$，此时可得 $j\leqslant\frac{m-\delta}{\delta}$，而在 $\delta\geqslant2$，$i\geqslant\frac{m-\delta}{\delta-1}$ 条件下，必有 $\frac{m-\delta}{\delta}<i$，所以式(21)应记为

$$\sum_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant \delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j+\delta=m}}1=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m-\delta}{\delta}\rfloor}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{m-\delta-\delta j+i-1}{i-1}. \tag{22}$$

将式(20),(22)代入式(13)的 $m>\delta$ 情形中，得

$$P(T=m)=\bar{F}(\delta-1)\sum_{i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil}^{\infty}f(i,m-\delta)\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m-\delta}{\delta}\rfloor}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{m-\delta-\delta j+i-1}{i-1}. \tag{23}$$

若规定 $\binom{-1}{-1}=1$，因为 $f(i,0)=p_0^i(i=0,1,\cdots)$，将 $m=\delta$ 代入式(23)的等式右边，得

$$\bar{F}(\delta-1)\sum_{i=0}^{\infty}f(i,0)(-1)^0\binom{i}{0}\binom{i-1}{i-1}=\bar{F}(\delta-1)\sum_{i=0}^{\infty}p_0^i=\frac{\bar{F}(\delta-1)}{1-p_0}.$$

所以式(23)包含 $m=\delta$ 的情形.

此外，对整数 $m<\delta$，因为 $f(\cdot,m-\delta)=0$，所以式(23)也包含 $m<\delta$ 的情形. 证毕.

推论 4 设 $p_0=0$，$\delta\geqslant2$，$T\sim\mathrm{SM}\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD}_c(\delta)\}$，若 $\forall x\in(-\infty,\infty)$，存在非负二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}1, & x=y=0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$ 使得对 $\forall i=1,2,\cdots$ 及 $k_j=1,2,\cdots,i$，$j=1,2,\cdots,i$ 满足 $\prod_{j=1}^{i}p_{k_j}=f\left(i,\sum_{j=1}^{i}k_j\right)$，则对 $\forall m=0,1,\cdots$，有

$$P(T=m)=\bar{F}(\delta-1)\sum_{i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil}^{m-\delta}f(i,m-\delta)\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m-\delta-i}{\delta-1}\rfloor}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{m-\delta-(\delta-1)j-1}{i-1},$$

其中 $\bar{F}(\delta-1)=1-\sum_{k=0}^{\infty}p_k$，规定 $\binom{-1}{-1}=1$.

证明：考虑式(19)中 $m>\delta$ 的情形，将 $\prod_{j=1}^{i}p_{k_j}=f\left(i,\sum_{j=1}^{i}k_j\right)$ 代入其中得

$$P(T=m)=\bar{F}(\delta-1)\sum_{i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil}^{m-\delta}f(i,m-\delta)\sum_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant \delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j+\delta=m}}1. \tag{24}$$

对 $\forall i=\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil,\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\rceil+1,\cdots,m-\delta$，由文献[15]可知：满足条件 $\delta\geqslant2$，$1\leqslant k_j\leqslant\delta-1$ $(j=1,2,\cdots,i)$ 的关于 $k_1,k_2,\cdots,k_i$ 的不定方程 $k_1+k_2+\cdots+k_i=m-\delta$ 的整数解数目为

$$\sum_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant \delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j+\delta=m}} 1=\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{m-\delta-(\delta-1)j-1}{i-1}. \tag{25}$$

在式(25)中，要求 $m-\delta-(\delta-1)j-1\geqslant i-1$，此时可得 $j\leqslant\frac{m-\delta-i}{\delta-1}$，而当 $\frac{m-\delta}{\delta-1}\leqslant i\leqslant m-\delta$ 时，必有 $0\leqslant\frac{m-\delta-i}{\delta-1}\leqslant i$，所以式(25)应记为

$$\sum_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant \delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j+\delta=m}} 1=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{m-\delta-i}{\delta-1}\right\rfloor}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{m-\delta-(\delta-1)j-1}{i-1}.$$

从而式(24)等价于

$$P(T=m)=\bar{F}(\delta-1)\sum_{i=\left\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\right\rceil}^{m-\delta}f(i,m-\delta)\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{m-\delta-i}{\delta-1}\right\rfloor}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{m-\delta-(\delta-1)j-1}{i-1}. \tag{26}$$

若规定 $\binom{-1}{-1}=1$，因为 $f(0,0)=1$，将 $m=\delta$ 代入式(26)的等式右边，得

$$\bar{F}(\delta-1)f(0,0)(-1)^0\binom{0}{0}\binom{-1}{-1}=\bar{F}(\delta-1)=\bar{F}(\delta-1),$$

所以式(26)包含 $m=\delta$ 的情形.

此外，对整数 $m<\delta$，因为 $f(\cdot,m-\delta)=0$，所以式(26)包含 $m<\delta$ 的情形. 证毕.

下面研究系统平均寿命.

定理 4　设 $T\sim\mathrm{SM}\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD}_c(\delta)\}$，若 $E(T)<\infty$，$0<\sum_{k=0}^{\delta-1}p_k<1$，则系统平均寿命为

$$E(T)=\frac{\sum_{n=0}^{\delta-1}np_n}{\bar{F}(\delta-1)}+\delta.$$

证明：对系统寿命 T 关于 Z_1 取条件，有

$$E(T)=E(E(T\mid Z_1))=\sum_{n=0}^{\infty}E(T\mid Z_1=n)p_n=$$

$$\sum_{n=0}^{\delta-1}E(T\mid Z_1=n)p_n+\sum_{n=\delta}^{\infty}E(T\mid Z_1=n)p_n. \tag{27}$$

在 $\mathrm{SM}\{[\mathrm{RE}(p_k)],\mathrm{CD}_c(\delta)\}$ 中，当 $n=\delta,\delta+1,\cdots$ 时，因为 $\bar{F}(\delta-1)\neq0$，$\{Z_1=n\}$ 是有可能发生的，而 $\{Z_1=n\}$ 表明 $Z_1\geqslant\delta$ 发生，此时有 $T=\delta$，所以 $E(T\mid Z_1=n)=\delta$.

若 $n=0,1,\cdots,\delta-1$，由于 $\{Z_1=n\}\subset\{Z_1<\delta\}$，因此系统在时刻 n 寿命还未结束，所以系统寿命等于存活到 n 的时长再附加从 n 开始直到寿命结束的剩余寿命，由更新过程的再生性(即在概率意义上，从任一冲击点作为新起点，过程重新开始)知，系统剩余寿命与原寿命 T 是同分布的，所以 $E(T\mid Z_1=n)=n+E(T)$. 因此，由式(27)有

$$E(T)=\sum_{n=0}^{\delta-1}(n+E(T))p_n+\sum_{n=\delta}^{\infty}\delta p_n=$$

$$\sum_{n=0}^{\delta-1}np_n+E(T)\sum_{n=0}^{\delta-1}p_n+\delta\sum_{n=\delta}^{\infty}p_n=$$

$$\sum_{n=0}^{\delta-1}np_n+E(T)\sum_{n=0}^{\delta-1}p_n+\delta\Big(1-\sum_{n=0}^{\delta-1}p_n\Big). \tag{28}$$

对式(28)解方程得

$$E(T)=\frac{\sum_{n=0}^{\delta-1}np_n}{1-\sum_{n=0}^{\delta-1}p_n}+\delta=\frac{\sum_{n=0}^{\delta-1}np_n}{F(\delta-1)}+\delta. \tag{29}$$

证毕.

3 数值模拟

上面结合 SM{[RE(p_k)],$CD_c(\delta)$}模型的构造，给出了该模型系统的可靠度、冲击度、平均寿命等可靠性指标. 下面将给出该模型时间间隔服从参数为 n 的离散均匀分布，即 $P(Z_i=k)=\frac{1}{n}$，$k=1,2,\cdots,n$ 且 $\delta<n$.

$\forall k_j=1,2,\cdots,n$，得离散均匀分布的分布列为

$$\prod_{j=1}^{i}p_{k_j}=\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{n}=\frac{1}{n^i}=n^{-i}, \tag{30}$$

离散均匀分布在 δ 处的生存函数为

$$\begin{aligned}\overline{F}(\delta)&=1-F(\delta)=\\&1-[P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=\delta-1)]=\\&1-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{\delta-1}{n}.\end{aligned} \tag{31}$$

将式(30),(31)分别代入式(19),(29)，得

$$P(T=m)=\begin{cases}0, & m=0,1,\cdots,\delta,\\ 1-\dfrac{\delta-1}{n}, & m=\delta,\\ \left(1-\dfrac{\delta-1}{n}\right)\displaystyle\sum_{i=\left\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\right\rceil}^{m-\delta}\sum_{\substack{1\leqslant k_j\leqslant\delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j=m-\delta}}(n^{-i}), & m=\delta+1,\delta+2,\cdots\end{cases}=$$

$$\begin{cases}0, & m=0,1,\cdots,\delta,\\ 1-\dfrac{\delta-1}{n}, & m=\delta,\\ \left(1-\dfrac{\delta-1}{n}\right)\displaystyle\sum_{i=\left\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\right\rceil}^{m-\delta}n^{-i}\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{m-\delta-i}{\delta-1}\right\rfloor}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{m-\delta-(\delta-1)j-1}{i-1}, & m=\delta+1,\delta+2,\cdots\end{cases}$$

以及

$$E(T)=\frac{\delta^2}{n-\delta}.$$

通过数值模拟，可得 $E(T)$和 $P(T=m)$的变化趋势分别如图 2 和图 3 所示. 由图 2 可见，$E(T)$关于参数 n 是单调递增的，并且 δ 越大 $E(T)$关于参数 n 的变化趋势越平缓. 由图 3 可见，从 $m=\delta$ 点开始曲线大幅度上升，到达一个最大值后又下降至零值，并且 δ 值越大曲线下降越慢，而且 $P(T=m)$的曲线变化幅度与 n 值没有太大关系.

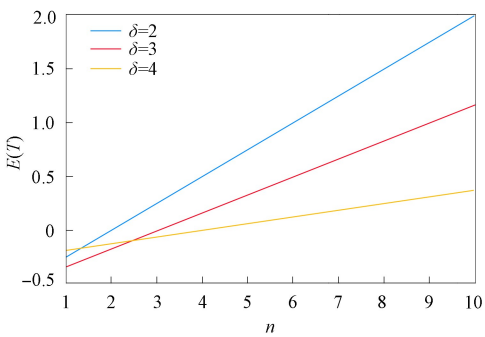


图 2 当 $\delta=2,3,4$ 时 $E(T)$关于 n 的变化趋势

Fig. 2 Changing trend of parameters n for $E(T)$ when $\delta=2,3,4$

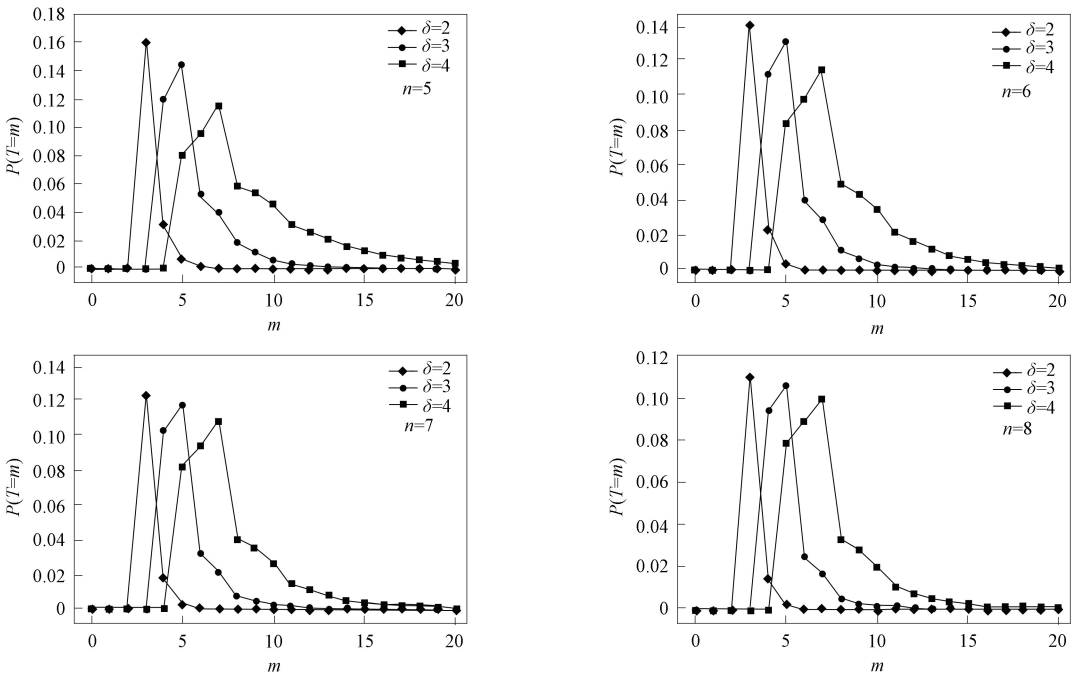


图 3　当 $\delta=2,3,4$，$n=5,6,7,8$ 时 $P(T=m)$关于 m 的变化趋势

Fig. 3　Changing trend of parameters m for $P(T=m)$ when $\delta=2,3,4$ and $n=5,6,7,8$

4　总　结

根据本文的定理 1、定理 4 与文献[4]的定理 2，表 1 和表 2 分别列出了当 $p_0<1$ 时 SM{[RE(p_k)],$CD_c(\delta)$}和 SM{[RE(p_k)],$CD_o(\delta)$}(其中 CD_o 表示 open discrete censored)的系统寿命分布与系统平均寿命.

表 1　SM{[RE(p_k)],$CD_c(\delta)$}和 SM{[RE(p_k)],$CD_o(\delta)$}寿命分布

Table 1　Lifetime distributions of SM{[RE(p_k)],$CD_c(\delta)$} and SM{[RE(p_k)],$CD_o(\delta)$}

模型	在 m 处的寿命分布(其中 $m=\delta+1,\delta+2,\cdots$)
SM{[RE(p_k)],$CD_c(\delta)$}($\delta=2,3,\cdots$)	$\bar{F}(\delta-1)\sum\limits_{i=\left\lceil\frac{m-\delta}{\delta-1}\right\rceil}^{\infty}\sum\limits_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant\delta-1,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j+\delta=m}}\left(\prod\limits_{j=1}^{i}p_{k_j}\right)$
SM{[RE(p_k)],$CD_o(\delta)$}($\delta=1,2,\cdots$)	$\bar{F}(\delta)\sum\limits_{i=\left\lceil\frac{m-\delta}{\delta}\right\rceil}^{\infty}\sum\limits_{\substack{0\leqslant k_j\leqslant\delta,\ j=1,2,\cdots,i\\ \sum_{j=1}^{i}k_j+\delta=m}}\left(\prod\limits_{j=1}^{i}p_{k_j}\right)$

注：$p_0<1$.

表 2　SM{[RE(p_k)],$CD_c(\delta)$}和 SM{[RE(p_k)],$CD_o(\delta)$}的平均寿命

Table 2　Mean lifetime of SM{[RE(p_k)],$CD_c(\delta)$} and SM{[RE(p_k)],$CD_o(\delta)$}

模型	平均寿命
SM{[RE(p_k)],$CD_c(\delta)$}($\delta=1,2,\cdots$)	$\sum\limits_{n=0}^{\delta-1}np_n\Big/(\bar{F}(\delta-1))+\delta$
SM{[RE(p_k)],$CD_o(\delta)$}($\delta=1,2,\cdots$)	$\sum\limits_{n=0}^{\delta}np_n\Big/(\bar{F}(\delta))+\delta$

注：$0<\sum\limits_{k=0}^{\delta-1}p_k<1$.

假设 $T_c(\delta)\sim$SM{[RE(p_k)],$CD_c(\delta)$}，$T_o(\delta)\sim$SM{[RE(p_k)],$CD_o(\delta)$}. 由表 1 可知，$T_c(\delta)$同分布于 $T_o(\delta-1)+1$，即 $T_c(\delta)\overset{d}{=\!=}T_o(\delta-1)+1$，因此理论上只需要计算 SM{[RE($p_k$)],$CD_o(\delta-1)$}

在点 $m-1$ 处的寿命分布即可得到 SM{[RE(p_k)],$CD_c(\delta)$}在点 m 处的寿命分布. 由表 2 可见，只需把 SM{[RE(p_k)],$CD_o(\delta-1)$}平均寿命附加一个单位时间，即可得到 SM{[RE(p_k)],$CD_c(\delta)$}的平均寿命，这一点也可由 $T_c(\delta)\overset{d}{=\!=}T_o(\delta-1)+1$得出.

参 考 文 献

[1] 李泽慧. 与 Poisson 流有关的几个概率分布及其在城市交通拥挤问题中的应用 [J]. 兰州大学学报(自然科学版)，1984，20(S1)：127-136.(LI Z H. Some Distributions Reclated to Poisson Processes and Their Application in Solving the Problems of Traffic Jam [J]. Journal of Lanzhou University (Natural Sciences)，1984，20(S1)：127-136.)

[2] MA M，LI Z H. Life Behavior of Censored δ-Shock Model [J]. Indian Journal of Pure & Applied Mathematics，2010，41(2)：401-420.

[3] 张攀，马明，余进玉，等. 时间点服从 0-1 分布的离散截断 δ-冲击模型的寿命性质 [J]. 甘肃联合大学学报(自然科学版)，2012，26(5)：24-26.(ZHANG P，MA M，YU J Y，et al. Lifetime Behavior of Discrete Censored δ-Shock Model on Arrival Times Obey the 0-1 Distribution [J]. Journal of Gansu Lianhe University (Natural Sciences)，2012，26(5)：24-26.)

[4] 冶建华，马明. 一般离散开型截断 δ 冲击模型的寿命分布 [J]. 山东大学学报(理学版)，2015，50(4)：8-13.(YE J H，MA M. Lifetime Distribution Behavior of Discrete Open Censored δ-Shock Model [J]. Journal of Shandong University (Natural Science)，2015，50(4)：8-13.)

[5] 马明，边莉娜，王世超，等. 格点更新截断 δ 冲击模型的可靠性指标 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2017，40(6)：809-816.(MA M，BIAN L N，WANG S C，et al. Reliability Indices of Grid Renewal Censored δ Shock Model [J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science)，2017，40(6)：809-816.)

[6] BIAN L N，MA M，LIU H，et al. Lifetime Distribution of Two Discrete Censored δ Shock Models [J]. Communications in Statistics：Theory and Methods，2019，48(14)：3451-3463.

[7] 姜伟欣，马明，刘华. 有重点伯努利冲击到达的开型截断 δ 冲击模型的寿命行为 [J]. 山东大学学报(理学版)，2022，57(1)：95-100.(JIANG W X，MA M，LIU H. Lifetime Behavior of the Open Censored δ Shock Model with Multiple Bernoulli Arrival [J]. Journal of Shandong University (Natural Science)，2022，57(1)：95-100.)

[8] MA M，BIAN L N，LIU H，et al. Lifetime Behavior of Discrete Markov Chain Censored δ Shock Model [J]. Communications in Statistics：Theory and Methods，2022，50(5)：1019-1035.

[9] CHADJICONSTANTINIDIS S，ERYILMAZ S. Reliability Assessment for Censored δ-Shock Models [J]. Methodology and Computing in Applied Probability，2022，24(4)：3141-3173.

[10] 彭博，马明，拉毛措，等. 泊松截断 δ 冲击模型冲击参数的 Bayes 估计 [J]. 菏泽学院学报，2022，44(5)：27-34.(PENG B，MA M，LA M C，et al. Bayes Estimation of Shock Parameters of Poisson Censored δ-Shock Model [J]. Journal of Heze University，2022，44(5)：27-34.)

[11] 马明，彭博，拉毛措，等. Poisson 截断 δ 冲击模型失效参数的 Bayes 估计 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2023，61(2)：292-302.(MA M，PENG B，LA M C，et al. Bayes Estimation of Failure Parameter for Poisson Censored δ-Shock Model [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2023，61(2)：292-302.)

[12] BIAN L N，WANG G J，LIU P. Reliability Analysis for k-Out-of-$n(G)$ Systems Subject to Dependent Competing Failure Processes [J]. Computers & Industrial Engineering，2023，177：109084-1-109084-12.

[13] 马明，彭博. 泊松截断 δ 冲击模型中 3 类定积分的计算 [J]. 高师理科学刊，2023，43(1)：1-5.(MA M，PENG B. Calculation of Three Kinds of Definite Integrals in Poisson Censored δ-Shock Model [J]. Journal of Science of Teachers' College and University，2023，43(1)：1-5.)

[14] BIAN L N，PENG B，YE Y. Reliability Analysis and Optimal Replacement Policy for Systems with Generalized Pólya Censored δ Shock Model [J]. Mathematics，2023，11(21)：4560-1-4560-19.

[15] 卢开澄，卢华明. 组合数学 [M]. 3 版. 北京：清华大学出版社，2002：227-229.(LU K C，LU H M. Combinatorial Mathematics [M]. 3rd ed. Beijing：Tsinghua University Press，2002：227-229.)

(责任编辑：赵立芹)