·数理科学·

引用格式:张涛,郭志伟,李丽,等. 完全图在圈和路分解下的彩虹生成树[J]. 延安大学学报(自然科学版),2026,45(3):90-97. [ZHANG T, GUO Z W, LI L, et al. Rainbow spanning trees in complete graphs with cycle-decompositions and path- decompositions[J]. Journal of Yan'an University(Natural Science Edition),2026,45(3):90-97.] **DOI**:10.13876/J.cnki.ydnse.250117

完全图在圈和路分解下的彩虹生成树

张　涛,郭志伟*,李　丽,石晓芸

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘　要:研究了完全图在特定子图分解下彩虹生成树的存在性。基于拟阵理论并利用Rado定理,证明了顶点数为奇数的完全图在特定圈分解下和顶点数为偶数的完全图在特定路分解下均包含彩虹生成树及边不交彩虹生成树。此外,通过引入基于特定子图分解的色度矩阵并利用柯西-比奈定理,建立了顶点数为奇数的完全图在特定圈分解下和顶点数为偶数的完全图在特定路分解下彩虹生成树数目的下界。研究结果丰富了完全图在特定子图分解下彩虹生成树及边不交彩虹生成树的存在性理论,同时完善了完全图在特定子图分解下彩虹生成树数目下界的结果。

关键词:完全图;圈(路)分解;彩虹生成树;拟阵理论;色度矩阵

中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1004-602X(2026)03-0090-08

在图论研究中,生成树作为极小连通无圈图,是研究复杂图结构的重要基础。KIRCHHOFF[1]考虑电流线性分布问题时首次提出了"树"的概念,并探究了生成树的存在性和计数问题。此后,生成树的存在性和计数问题逐渐成为研究热点[2-4]。特别地,边着色图中彩虹生成树的存在性和计数问题已被广泛研究[5-8]。边着色图是指具有从边集到自然数集的固定映射的图,且彩虹图是指满足任意两条边的颜色均不相同的边着色图。此外,边着色图中彩虹生成树的存在性和计数问题在工程实践领域具有广泛应用。例如,在通信网络领域,彩虹生成树可为"连接所有节点且成本最优"的需求提供有效拓扑结构,并且其数目可作为评估通信网络稳健性的关键指标[9];在化学图论中,将分子图中的原子和化学键分别看作顶点和边建立图模型后,彩虹生成树可用于分析分子结构的稳定性[10];而且,彩虹生成树计数问题在模拟复杂网络与评估网络可靠性等领域也具有重要的应用价值[11]。

图的子图分解是指将该图分解为若干个边不交子图,使得其顶点集的并集为该图顶点集且边集的并集为该图边集。事实上,图的子图分解与图的边着色之间存在着自然的对应关系。对于具有特定子图分解的图,其彩虹子图是指满足任意两条边均来自该子图分解中不同子图的图。近年来,关于完全图在特定子图分解下彩虹生成树的存在性已被关注。BRUALDI等[12]通过划分完全图K_{2n}的边集,构造了$2n-1$个1-因子,并证明了K_{2n}在该子图分解下存在边不交彩虹生成树。KRUSSEL等[13]在文献[12]的研究基础上改进了结果,并证明了完全图K_{2n}在相同条件下存在三棵边不交彩虹生成树。ALON等[14]针对完全图K_n给出了一种完全二部分

收稿日期:2025-10-14

基金项目:国家自然科学基金项目(12301456,12471334);陕西高校优秀青年人才支持计划项目(202120009);延安大学研究生科研创新计划项目(YKY2025030);延安大学创新创业训练项目(D2024117)

作者简介:张　涛(2000—),男,硕士研究生,主要从事图论及其应用研究。

*通信作者　E-mail:zhiweiguo@yau.edu.cn

解 $\theta:=\{G_1,G_2,\cdots,G_{n-1}\}$，并证明了 K_n 在此分解下存在彩虹生成树。LIU 等[15]针对完全图 K_n 的最小完全二部分解 $\theta:=\{G_1,G_2,\cdots,G_{n-1}\}$，引入了基于该分解的色度矩阵，并通过色度矩阵的性质给出了 K_n 在任意最小完全二部分解下彩虹生成树数目的下界。最小完全二部分解是指包含最少数目子图的完全二部分解。

本文借助拟阵理论和Rado定理，分别证明了完全图 K_{2n+1} 在特定圈分解下和完全图 K_{2n} 在特定路分解下包含彩虹生成树及边不交彩虹生成树。同时，通过引入基于特定子图分解的色度矩阵并结合柯西-比奈定理，建立了完全图 K_{2n+1} 在特定圈分解下和完全图 K_{2n} 在特定路分解下彩虹生成树数目的下界。研究结果进一步丰富了完全图在特定子图分解下彩虹子图存在性的理论体系，并为彩虹子图在相关工程技术领域的应用提供了理论支撑。

1　基本概念及引理

首先，介绍一些基本定义与符号，对于文中出现但未定义的图论术语和符号，可参考文献[16]。本文只考虑简单图，即无环或重边的图。用 $G=(V(G),E(G))$ 表示顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 的图，并用 $|E(G)|$ 表示图 G 的边数。给定图 G 的边定向是指对 G 的每条边指定一个方向，从而得到对应有向图 $D=(V(D),A(D))$，其中，$V(D)=V(G)$ 且 $A(D)$ 是由 $E(G)$ 中每条边定向后得到的弧集。图 G 的生成子图是指顶点集 $V(G)$ 且边集为 $X\subseteq E(G)$ 的图，记作 $G(X)$。边集 $X\subseteq E(G)$ 在 G 中的导出子图是指边集为 X 且顶点集为 X 中所有边的端点构成集合的图，记作 $G[X]$。完全图是指图中每对不同顶点都有一条边相连，并用 K_n 表示 n 个顶点的完全图。二部图是指顶点集可以划分为两个子集 X 和 Y 且图中每条边的两个顶点分别属于 X 和 Y 的图，并称 X 和 Y 为该二部图的两个部集。对于部集分别为 X 和 Y 的二部图，若 X 中每个顶点都与 Y 中每个顶点相连，则称该二部图为完全二部图，并用 $K_{m,n}$ 表示部集顶点数分别为 m 和 n 的完全二部图。图中的路是指该图中顶点和边互不相同的点边交替序列；圈是指起点和终点重合的路。用 P_k 表示 k 个顶点，并用 C_k 表示 k 个顶点的圈。

图 G 的边着色是指从边集到自然数集的映射 $c:E(G)\to\mathbf{N}$。称具有固定边着色的图为边着色图。若边着色图中任意两条边的颜色均不相同，则称该图为彩虹图。图 G 的子图分解 $\theta:=\{G_1,G_2,\cdots,G_k\}$ 是指将 G 分解为 k 个子图 $G_1,G_2,\cdots,G_k$，使得 $\bigcup_{i=1}^{k}V(G_i)=V(G)$，$\bigcup_{i=1}^{k}E(G_i)=E(G)$ 且对于 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant k$ 满足 $E(G_i)\cap E(G_j)=\varnothing$。特别地，若图 G 子图分解中的每个子图均为圈，则称该分解为 G 的圈分解；若图 G 子图分解中的每个子图均为路，则称该分解为 G 的路分解。相应地，若具有子图分解 θ 的图 G 的子图 H 中任意两条边均来自 θ 的不同子图，则称 H 是 G 的彩虹子图。

拟阵 $\boldsymbol{M}$ 是指有序对 $(E,\mathcal{I})$，其中，E 是有限集合，称为拟阵 $\boldsymbol{M}$ 的基础集，$\mathcal{I}\subseteq 2^{E(G)}$ 是 E 的子集族且满足以下条件：1）$\varnothing\in\mathcal{I}$；2）若 $I\in\mathcal{I}$，且 $J\subseteq I$，则 $J\in\mathcal{I}$；3）若 $I_1,I_2\in\mathcal{I}$ 且 $|I_1|<|I_2|$，则存在 $e\in I_2-I_1$ 使得 $I_1\cup\{e\}\in\mathcal{I}$。称 $\mathcal{I}$ 中的元素为拟阵 $\boldsymbol{M}$ 的独立集。设 $G=(V(G),E(G))$ 为无向图，定义 $\mathcal{I}\subseteq 2^{E(G)}$ 是由 $E(G)$ 的子集构成的集族，使得 $X\in\mathcal{I}$ 当且仅当 $G[X]$ 不包含图 G 的圈，并称拟阵 $\boldsymbol{M}=(E(G),\mathcal{I})$ 为图 G 的圈拟阵。对于图 G 边集的任意非空子集 X，定义 $rank(X)=\max\{|I|:I\subseteq X,I\in\mathcal{I}\}$ 为圈拟阵的秩函数。

引理 1[17]　（Rado 定理）设 $\boldsymbol{M}=(E,\mathcal{I})$ 是有限集合 E 上的拟阵，$I=\{1,2,\cdots,n\}$ 且 $\mathcal{C}=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 是 E 的子集族。则对于满足 $0\leqslant m\leqslant|I|$ 的整数 m，存在基数为 m 且元素来自 $\mathcal{C}$ 中不同子集的独立集 F，当且仅当对于任意子集 $J\subseteq I$，秩函数

$$rank\left(\bigcup_{i\in J}C_i\right)\geqslant|J|-(|I|-m)。$$

引理 2[17]　设 G 是顶点数为 n，边集为 $E(G)$ 的图，且 $\boldsymbol{M}=(E(G),\mathcal{I})$ 是 G 的圈拟阵。则对于任意子集 $X\subseteq E(G)$，拟阵 $\boldsymbol{M}$ 的秩函数为 $rank(X)=n-t$，其中，t 是 $G(X)$ 的分支数。

引理 3　设 G 是顶点数为 n 的简单图，且 $X\subseteq E(G)$。如果对于给定正整数 r，$|X|>\binom{r}{2}$，那么 X 的秩函数 $rank(X)\geqslant r$。

证明　设 t 为 $G(X)$ 的分支数，其中，$1\leqslant t\leqslant n$。分别用 $n_1,n_2,\cdots,n_t$ 表示各分支的顶点数，则 $\sum_{i=1}^{t}n_i=n$。由于 $\binom{r}{2}<|X|\leqslant\binom{n_1}{2}+\binom{n_2}{2}+\cdots+\binom{n_t}{2}$，根据不等式 $\binom{a}{2}+\binom{b}{2}\leqslant\binom{a+b-1}{2}$ 可得 $\binom{r}{2}<|X|\leqslant\binom{n-t+1}{2}$，因此 $n-t\geqslant r$，即 $rank(X)\geqslant r$。引理3得证。

引理4[18] 设$n \geqslant 1$是整数,且K_{2n}是顶点数为$2n$的完全图。则K_{2n}存在路分解$\theta := \{P_1, P_2, \cdots, P_{2n-1}\}$,其中,对于$i \in \{1, 2, \cdots, 2n-1\}$,$P_i$是长度为$n$的路。

接下来,在完全图K_n上定义基于二部子图分解的色度矩阵。

设$\theta := \{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\}$是完全图$K_n$的二部子图分解,其中,对于$i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$,$G_i$是以$X_i$和$Y_i$为部集的二部图。规定:如果顶点$v \in X_i$,那么$v$在$G_i$中度的符号记作"+";如果顶点$v \in Y_i$,那么$v$在$G_i$中度的符号记作"-"。在这种情形下,$K_n$的色度矩阵定义为$\boldsymbol{B} = \left(\pm b_{ij} \right)_{n \times (n-1)}$,其中,如果$v_i \in V\left(G_j\right)$,那么$b_{ij}$表示顶点$v_i$在子图$G_j$中的度;如果$v_i \notin V\left(G_j\right)$,那么$b_{ij} = 0$。

令$\boldsymbol{B}_i$表示矩阵$\boldsymbol{B}$删除第i行后的子矩阵。由色度矩阵的定义可知,矩阵$\boldsymbol{B}$满足每一列元素之和为零。对$\boldsymbol{B}$添加列和不为零的一列元素构成n阶矩阵。考虑n阶矩阵对应的行列式,对其进行初等行变换,将各行元素加到指定行后按该行展开。由于此n阶行列式值的绝对值为定值,且该定值等于新增列元素之和与矩阵$\boldsymbol{B}$删除指定行后对应$(n-1)$阶行列式乘积的绝对值,因此原矩阵$\boldsymbol{B}$任意删除一行对应的$(n-1)$行列式值仅符号存在不同,即满足

$$|\det(\boldsymbol{B}_i)| = |\det(\boldsymbol{B}_j)|。$$

不难发现,基于二部子图分解所定义的色度矩阵并不唯一。由于顶点(子图)可以任意重新标记,因此导致矩阵的行(列)重新排列。此外,顶点在子图中度的符号可任意定义使得每一列均可独立乘以± 1。这些改变仅会使任意子矩阵$\boldsymbol{B}_i$的行列式改变一个因子± 1。因此,$\left|\det(\boldsymbol{B}_i)\right|$是二部子图分解$\theta$的不变量,记为$\det(\theta)$。

对于图G的二部子图分解$\theta := \{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\}$,按照从一个部集到另一个部集的方向对$G_i\left(i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}\right)$中的边定向,由此得到图$G$在$\theta$下的有向图,记作$D$。根据有向图$D$,定义顶点-弧关联矩阵$\boldsymbol{M} = \left(m_{ij}\right)_{n \times q}$,其中,$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{如果} a_j \text{指出顶点} v_i; \\ -1, \text{如果} a_j \text{指向顶点} v_i; \\ 0, \text{如果} a_j \text{和顶点} v_i \text{不关联}。 \end{cases}$

进一步,定义弧-子图关联矩阵$\boldsymbol{N} = \left(n_{ij}\right)_{q \times (n-1)}$,其中,$n_{ij} = \begin{cases} 1, \text{如果} a_i \in A\left(G_j\right); \\ 0, \text{其他}。 \end{cases}$

对于无向图,可以采用同样的方式定义边-子图关联矩阵。

引理5 设G是顶点数为n且具有二部子图分解$\theta := \{G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}\}$的图,$\boldsymbol{B}$是图$G$基于二部子图分解的色度矩阵,$\boldsymbol{M}$是顶点-弧关联矩阵,且$\boldsymbol{N}$是弧-子图关联矩阵。则满足$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{MN}$。

证明 根据矩阵乘法运算法则可知,需证明矩阵$\boldsymbol{B}$中元素b_{ij}等于矩阵$\boldsymbol{M}$的第i行子矩阵与矩阵$\boldsymbol{N}$的第j列子矩阵的乘积,其中,乘积表示子图G_j中与顶点v_i关联的边数。由于子图G_j的边定向,从而矩阵$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{N}$中与边相关的元素符号一致,因此这些元素的和等于顶点v_i在子图G_j中的度。根据色度矩阵$\boldsymbol{B}$的定义,矩阵$\boldsymbol{B}$中元素b_{ij}等于矩阵$\boldsymbol{M}$的第i行子矩阵与矩阵$\boldsymbol{N}$的第j列子矩阵的乘积。引理5得证。

引理6[19] (柯西-比奈定理)设$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵,且$\boldsymbol{B}$是$n \times m$矩阵。假设子集$S \subseteq \mathbf{N}^+$且满足$|S| = m$,$\boldsymbol{A}_S$为$\boldsymbol{A}$中列指标取对应S的$m \times m$子矩阵,且$\boldsymbol{B}_S$为$\boldsymbol{B}$中行指标取对应S的$m \times m$子矩阵。则有

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \sum_{S \subseteq N^+, |S| = m} \det(\boldsymbol{A}_S) \det(\boldsymbol{B}_S)。$$

引理7[20] 设$\boldsymbol{M}$是图G的顶点-边关联矩阵。若G不包含圈,当且仅当$\boldsymbol{M}$的列向量组线性无关。设$\boldsymbol{N}$是图G的边-子图关联矩阵。若集合$S \subseteq E(G)$中的边构成彩虹子图,当且仅当$\boldsymbol{N}$关于集合S的行向量组线性相关。

2 主要结果

定理1 设$n \geqslant 3$是整数,且K_{2n+1}是顶点数为$2n+1$的完全图。如果K_{2n+1}存在满足$k \geqslant 2n$且对于$i \in \{1, 2, \cdots, k\}$,$3 \leqslant \left|E\left(C_i\right)\right| \leqslant n$的圈分解$\theta := \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$,那么$K_{2n+1}$在该分解下包含彩虹生成树。

证明 设$\theta := \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$是完全图$K_{2n+1}$的圈分解,其中,$k \geqslant 2n$且对于$i \in \{1, 2, \cdots, k\}$,$3 \leqslant \left|E\left(C_i\right)\right| \leqslant n$。考虑完全图$K_{2n+1}$的圈拟阵$\boldsymbol{M}(E(K_{2n+1}), \mathcal{I})$。设$I = \{1, 2, \cdots, k\}$且$\mathcal{C} = \left\{E\left(C_1\right), E\left(C_2\right), \cdots, E\left(C_k\right)\right\}$是边集$E\left(K_{2n+1}\right)$的子集族。根据引理1可知,存在基数为$2n$且元素来自$\mathcal{C}$中不同子集的独立集$F$,当且仅当对于任意子集$J \subseteq I$,秩函数

$$rank\left(\bigcup_{i \in J} E\left(C_i\right)\right) \geqslant |J| - (k - 2n)。$$

情形 1　$|J|-(k-2n)\leqslant 0$。

根据引理 2 可知，秩函数 $rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right)=2n+1-t$。因为 $K_{2n+1}\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right)$ 的分支数 $t\leqslant 2n+1$，所以秩函数 $rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right)\geqslant 0$。又因为 $|J|-(k-2n)\leqslant 0$，所以秩函数 $rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right)\geqslant |J|-(k-2n)$ 成立。

情形 2　$|J|-(k-2n)>0$。

情形 2.1　$|J|-(k-2n)=1$。

因为 $k\geqslant 2n$，所以 $|J|\geqslant 1$。此时 $\left|\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right|\geqslant 3>\binom{|J|-(k-2n)}{2}$。根据引理 3 可知，秩函数 $rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right)\geqslant |J|-(k-2n)$。

情形 2.2　$|J|-(k-2n)=2$。

因为 $k\geqslant 2n$，所以 $|J|\geqslant 2$。此时 $\left|\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right|\geqslant 6>\binom{|J|-(k-2n)}{2}$。根据引理 3 可知，秩函数 $rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right)\geqslant |J|-(k-2n)$。

情形 2.3　$|J|-(k-2n)>2$。

考虑 $\left|\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right|$ 与 $\binom{|J|-(k-2n)}{2}$ 之间的关系，因此存在

$$\left|\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right|-\binom{|J|-(k-2n)}{2}\geqslant \binom{2n+1}{2}-(k-|J|)n-\binom{|J|-(k-2n)}{2}=2n-\frac{1}{2}(k-|J|)(k-|J|-2n+1)。$$

由于 $|J|-(k-2n)>0$ 且 $k\geqslant |J|$，因此 $0\leqslant k-|J|<2n$。又因为 $|J|-(k-2n)>2$，所以 $k-|J|-2n+1<-1$。因此 $2n-\frac{1}{2}(k-|J|)(k-|J|-2n+1)>0$，从而 $\left|\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right|>\binom{|J|-(k-2n)}{2}$ 成立。根据引理 3 可知，秩函数

$$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right)\geqslant |J|-(k-2n)。$$

综上所述，对于任意子集 $J\subseteq I$，都有秩函数 $rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i)\right)\geqslant |J|-(k-2n)$ 成立。根据引理 1 可知，对于 K_{2n+1} 的圈拟阵 $\boldsymbol{M}\left(E\left(K_{2n+1}\right),\mathcal{I}\right)$，存在基数为 $2n$ 且元素来自 $\mathcal{C}$ 中不同子集的独立集 F。由于该独立集 F 是不包含圈的边集，且包含 $2n+1$ 个顶点和 $2n$ 条边，因此 F 构成的图是连通的，即形成彩虹生成树。定理 1 得证。

推论 1　设 $n\geqslant 3$ 是整数，且 K_{2n+1} 是顶点数为 $2n+1$ 的完全图。则 K_{2n+1} 在满足 $k\geqslant 2n$ 且对于 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$，$3\leqslant\left|E(C_i)\right|\leqslant n$ 的圈分解 $\theta:=\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$ 下包含不同构于 $K_{1,2n}$ 的彩虹生成树。

证明　设 $\theta:=\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$ 是完全图 K_{2n+1} 的圈分解，其中，$k\geqslant 2n$ 且对于 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$，$3\leqslant\left|E(C_i)\right|\leqslant n$。由定理 1 可知，完全图 K_{2n+1} 在该圈分解 $\theta:=\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$ 下包含彩虹生成树，记作 T。若 T 不同构于 $K_{1,2n}$，则该推论得证。接下来，假定 T 同构于 $K_{1,2n}$。设 $E(T)=\{e_1,e_2,\cdots,e_{2n}\}$，其中，对于 $i\in\{1,2,\cdots,2n\}$，边 $e_i=vv_i\in E(C_i)$。

当 $k=2n$ 时。由于每个圈 C_i 至少包含 3 条边，因此对于任意指定的圈 C_i，可通过从 C_i 中选取一条未出现在 T 的边 $e_i'=v_iv_j$ 替换 T 中来自 C_i 的边 e_i，得到新的彩虹生成树，即 $T'=T-e_i+e_i'$。

当 $k>2n$ 时。由于彩虹生成树 T 的构造仅需从 $2n$ 个子图中选取 $2n$ 条来自不同子图的边，因此在该圈分解 θ 中，除被选取的 $2n$ 个子图 $C_1,C_2,\cdots,C_{2n}$ 外，仍存在至少一个未被 T 使用任何边的子图，记作 $C_j\left(j\in\{1,2\cdots,k\}\backslash\{1,2,\cdots,2n\}\right)$。假设边 $e\in E\left(C_j\right)$。此时，边 e 必连接两个非中心顶点 v_i 与 v_j。由于圈 $C_i\left(i\in\{1,2,\cdots,k\}\right)$ 至少包含 3 条边，因此对于任意指定的圈 C_j，可以通过从 C_j 中选取未出现在 T 的边 $e=v_iv_j$ 替换 T 中来自 C_i 的边 e_i，得到新的彩虹生成树，即 $T''=T-e_i+e$。

综上所述，K_{2n+1} 在该分解 θ 下包含不同构于 $K_{1,2n}$ 的彩虹生成树。推论 1 得证。

定理 2　设 $n\geqslant 3$ 是整数，且 K_{2n+1} 是顶点数为 $2n+1$ 的完全图。假设 T 是 K_{2n+1} 在满足 $k\geqslant 2n$ 且对于 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$，$3\leqslant\left|E(C_i)\right|\leqslant n$ 的给定圈分解 $\theta:=\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$ 下不同构于 $K_{1,2n}$ 的彩虹生成树。则 K_{2n+1} 在该圈分解 θ 下包含与 T 边不交的彩虹生成树 T'。

证明　设 T 是 K_{2n+1} 在满足 $k\geqslant 2n$ 且对于 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$，$3\leqslant\left|E(G_i)\right|\leqslant n$ 的给定圈分解 $\theta:=\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$ 下不同构于 $K_{1,2n}$ 的彩虹生成树。令

$G'=K_{2n+1}-E(T)$。对于$i\in\{1,2,\cdots,k\}$，记$C_i'=C_i-e_i$，其中，$C_i\in\theta$且边$e_i=E(T)\cap E(C_i)$。不难发现，子图C_i'包含一条路或一个圈。记$\theta':=\{C_1',C_2',\cdots,C_k'\}$是$G'$的子图分解。因此，为证明$K_{2n+1}$在圈分解$\theta$下存在边不交彩虹生成树，需证明$G'$在子图分解$\theta'$下存在彩虹生成树$T'$。

对于图G'，考虑其圈拟阵$\boldsymbol{M}(E(G'),\mathcal{I})$。设$I=\{1,2,\cdots,k\}$，且$\mathcal{C}'=\{E(C_1'),E(C_2'),\cdots,E(C_k')\}$是$E(G')$的子集族，其中，$|E(C_i')|\geqslant|E(C_i)|-1\geqslant 2$$(i\in I)$。根据引理1可知，存在基数为$2n$且元素来自$\mathcal{C}'$中不同子集的独立集$F'$，当且仅当对于任意子集$J\subseteq I$，有秩函数$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i')\right)\geqslant|J|-(k-2n)$。接下来，根据$|J|$的大小分两种情形讨论。

情形1 $|J|=|I|=k$。

由于T是不同构于$K_{1,2n}$的彩虹生成树，因此$G'\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i')\right)=G'\left(\bigcup_{i\in I}E(C_i')\right)=G'$是连通的。根据引理2可知，秩函数$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i')\right)=(2n+1)-1=2n$。又因为$|J|=k$，所以秩函数$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i')\right)\geqslant|J|-(k-2n)$成立。

情形2 $|J|<|I|=k$。

考虑$\left|\bigcup_{i\in J}E(C_i')\right|$与$\binom{|J|-(k-2n)}{2}$之间的关系，因此存在

$$\left|\bigcup_{i\in J}E(C_i')\right|-\binom{|J|-(k-2n)}{2}\geqslant\binom{2n+1}{2}-2n-(k-|J|)n-\binom{|J|-(k-2n)}{2}=\frac{1}{2}(k-|J|)(|J|-k+2n-1)。$$

情形2.1 $|J|-k+2n-1>0$。

此时$\frac{1}{2}(k-|J|)(|J|-k+2n-1)>0$。因此$\left|\bigcup_{i\in J}E(C_i')\right|-\binom{|J|-(k-2n)}{2}>0$成立。根据引理3可知，秩函数$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i')\right)\geqslant|J|-(k-2n)$。

情形2.2 $|J|-k+2n-1=0$。

因为$k\geqslant 2n$，所以$|J|\geqslant 1$。此时$\left|\bigcup_{i\in J}E(C_i')\right|\geqslant 2>\binom{|J|-(k-2n)}{2}$。根据引理3可知，秩函数$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i')\right)\geqslant|J|-(k-2n)$。

综上所述，对于任意子集$J\subseteq I$，都有秩函数$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(C_i')\right)\geqslant|J|-(k-2n)$成立。根据引理1可知，对于图$G'$的圈拟阵$\boldsymbol{M}(E(G'),\mathcal{I})$，存在基数为$2n$且元素来自$\mathcal{C}'$中不同子集的独立集$F'$。因为该独立集$F'$是不包含圈的边集，且包含$2n+1$个顶点和$2n$条边，所以$F'$构成的图是连通的，即形成彩虹生成树。因此$K_{2n+1}$在该圈分解$\theta$下包含与$T$边不交的彩虹生成树$T'$。定理2得证。

注1 在定理2中，如果T是K_{2n+1}在给定圈分解θ下同构于$K_{1,2n}$的彩虹生成树，那么与T边不交的彩虹树将无法包含与$K_{1,2n}$的中心点关联的边，即无法构成彩虹生成树。

定理3 设$n\geqslant 2$是整数，且K_{2n}是顶点数为$2n$的完全图。则存在路分解$\theta:=\{P_1,\cdots,P_{2n-1}\}$，使得$K_{2n}$在该分解$\theta$下包含彩虹生成树。

证明 由引理4可知，完全图K_{2n}存在由长度为n的路组成的路分解。设$\theta:=\{P_1,\cdots,P_{2n-1}\}$是$K_{2n}$的路分解，其中，$P_i\left(i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}\right)$是长度为$n$的路。对于完全图$K_{2n}$，考虑其圈拟阵$\boldsymbol{M}(E(K_{2n}),\mathcal{I})$。设$I=\{1,2,\cdots,2n-1\}$且$\mathcal{P}=\{E(P_1),E(P_2),\cdots,E(P_{2n-1})\}$是$E(K_{2n})$的子集族。根据引理1可知，存在基数为$2n-1$且元素来自$P$中不同子集的独立集$F=\{e_1,e_2,\cdots,e_{2n-1}\}$，当且仅当对于任意子集$J\subseteq I$，秩函数$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right)\geqslant|J|-(|I|-2n+1)=|J|$。接下来，根据$|J|$的大小分三种情形讨论。

情形1 $|J|=0$。

此时$\bigcup_{i\in J}E(P_i)=\varnothing$，空集生成子图是空图，其分支数$t=0$。根据引理2可知，秩函数$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right)=2n-t=2n$。因为$|J|=0$，所以秩函数

$$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right)=2n\geqslant|J|。$$

情形2 $1\leqslant|J|<|I|=2n-1$。

情形2.1 $|J|=1$。

此时$\left|\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right|=n$。因此$\left|\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right|=n>\binom{|J|}{2}$成立。根据引理3可知，秩函数$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right)\geqslant|J|$。

情形 2.2　$|J|=2$。

此时 $\left|\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right|=2n$。因此 $\left|\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right|=2n>\binom{|J|}{2}$ 成立。根据引理 3 可知，秩函数

$$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right)\geqslant|J|。$$

情形 2.3　$3\leqslant|J|<2n-1$。

考虑 $\left|\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right|$ 与 $\binom{|J|}{2}$ 之间的关系，因此存在

$$\left|\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right|-\binom{|J|}{2}\geqslant\binom{2n}{2}-(2n-1-|J|)n-\binom{|J|}{2}=\frac{1}{2}|J|(2n+1-|J|)。$$

又因为 $|J|<2n-1$，所以 $2n+1-|J|>0$。因此 $\frac{1}{2}|J|(2n+1-|J|)>0$，从而 $\left|\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right|>\binom{|J|}{2}$ 成立。根据引理 3 可知，秩函数

$$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right)\geqslant|J|。$$

情形 3　$|J|=|I|=2n-1$。

此时 $K_{2n}\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right)$ 的分支数 $t=1$。根据引理 2 可知，秩函数 $rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right)=2n-t=2n-1$。因为 $|J|=2n-1$，所以秩函数

$$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right)=2n-1=|J|。$$

综上所述，对于任意子集 $J\subseteq I$，都有秩函数 $rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i)\right)\geqslant|J|$ 成立。根据引理 1 可知，对于图 K_{2n} 的圈拟阵 $\boldsymbol{M}\left(E(K_{2n}),\mathcal{I}\right)$，存在基数为 $2n-1$ 且元素都来自 P 中不同子集的独立集 $F=\{e_1,e_2,\cdots,e_{2n-1}\}$。由于该独立集 F 是不包含圈的边集，且包含 $2n$ 个顶点和 $2n-1$ 条边，因此 F 构成的图是连通的，即形成彩虹生成树。定理 3 得证。

推论 2　设 $n\geqslant2$ 是整数，且 K_{2n} 是顶点数为 $2n$ 的完全图。则 K_{2n} 在由长度为 n 的路组成的路分解 $\theta:=\{P_1,\cdots,P_{2n-1}\}$ 下包含不同构于 $K_{1,2n-1}$ 的彩虹生成树。

证明　由定理 3 可知，K_{2n} 在由长度为 n 的路组成的路分解 $\theta:=\{P_1,\cdots,P_{2n-1}\}$ 下包含彩虹生成树，记作 T。如果 T 不同构于 $K_{1,2n-1}$，那么该推论得证。接下来，假定 T 同构于 $K_{1,2n-1}$。设 $E(T)=\{e_1,e_2,\cdots,e_{2n-1}\}$，其中，对于 $i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}$，边 $e_i=vv_i\in E(P_i)$。由于每条路 P_i 包含 n 条边，因此对于任意指定的路 $P_i\left(i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}\right)$，可通过从 P_i 中选取一条未出现在 T 的边 $e_i'=v_iv_j$ 替换 T 中来自 P_i 的边 e_i，得到新的彩虹生成树，即 $T'=T-e_i+e_i'$。不难检验新的彩虹生成树 T' 不同构于 $K_{1,2n-1}$。

综上所述，完全图 K_{2n} 在该路分解 $\theta:=\{P_1,\cdots,P_{2n-1}\}$ 下包含不同构于 $K_{1,2n-1}$ 的彩虹生成树。推论 2 得证。

定理 4　设 $n\geqslant2$ 是整数，且 K_{2n} 是顶点数为 $2n$ 的完全图。假设 T 是 K_{2n} 在由长度为 n 的路组成的给定路分解 $\theta:=\{P_1,\cdots,P_{2n-1}\}$ 下不同构于 $K_{1,2n-1}$ 的彩虹生成树。则 K_{2n} 在该分解 θ 下包含与 T 边不交的彩虹生成树 T'。

证明　设 T 是 K_{2n} 在给定路分解 $\theta:=\{P_1,\cdots,P_{2n-1}\}$ 下不同构于 $K_{1,2n-1}$ 的彩虹生成树。令 $G'=K_{2n}-E(T)$。对于 $i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}$，记 $P_i'=P_i-e_i$，其中，$P_i\in\theta$ 且边 $e_i=E(T)\cap E(P_i)$。不难发现，子图 P_i' 至多包含两条边不交路。记 $\theta':=\{P_1',P_2',\cdots,P_{2n-1}'\}$ 是 G' 的子图分解。因此，为证明 K_{2n} 在该路分解 θ 下存在与 T 边不交的彩虹生成树，需证明 G' 在子图分解 θ' 下存在彩虹生成树 T'。

对于图 G'，考虑其圈拟阵 $\boldsymbol{M}\left(E(G'),\mathcal{I}\right)$。设 $I=\{1,2,\cdots,2n-1\}$ 且 $\mathcal{P}'=\left\{E(P_1'),E(P_2'),\cdots,E(P_{2n-1}')\right\}$ 是边集 $E(G')$ 的子集族。根据引理 1 可知，存在基数为 $2n-1$ 且元素来自 $\mathcal{P}'$ 中不同子集的独立集 $F'=\{e_1',e_2',\cdots,e_{2n-1}'\}$，当且仅当对于任意子集 $J\subseteq I$，秩函数 $rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i')\right)\geqslant|J|-(|I|-2n+1)=|J|$。接下来，根据 $|J|$ 的大小分两种情形讨论。

情形 1　$|J|=|I|=2n-1$。

由于 T 是不同构于 $K_{1,2n-1}$ 的彩虹生成树，因此 $G'\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i')\right)=G'\left(\bigcup_{i\in I}E(P_i')\right)=G'$ 是连通的。根据引理 2 可知，秩函数 $rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i')\right)=2n-t=2n-1$。因为 $|J|=2n-1$，所以秩函数 $rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i')\right)=2n-1\geqslant|J|$ 成立。

情形 2　$|J|<|I|=2n-1$。

考虑 $\left|\bigcup_{i\in J}E(P_i')\right|$ 与 $\binom{|J|}{2}$ 之间的关系，因此存在

$$\left|\bigcup_{i\in J}E(P_i')\right|-\binom{|J|}{2}\geqslant\binom{2n}{2}-(2n-1)-(2n-1-|J|)(n-1)-\binom{|J|}{2}=\frac{1}{2}|J|(2n-1-|J|)。$$

因为$|J|<2n-1$,所以$2n-1-|J|>0$。因此$\frac{1}{2}|J|(2n-1-|J|)>0$,从而$\left|\bigcup_{i\in J}E(P_i')\right|>\binom{|J|}{2}$成立。根据引理3可知,秩函数$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i')\right)\geqslant|J|$。

综上所述,对于任意子集$J\subseteq I$,都有秩函数$rank\left(\bigcup_{i\in J}E(P_i')\right)\geqslant|J|$成立。根据引理1可知,对于$G'$的圈拟阵$\boldsymbol{M}(E(G'),\mathcal{I})$,存在基数为$2n-1$且元素来自$\mathcal{P}'$中不同子集的独立集$F'=\{e_1',e_2',\cdots,e_{2n-1}'\}$。因为该独立集$F'$是不包含圈的边集,且包含$2n$个顶点和$2n-1$条边,所以$F'$构成的图是连通的,即形成彩虹生成树。因此$K_{2n}$在该路分解$\theta$下存在与$T$边不交的彩虹生成树$T'$。定理4得证。

注2 在定理4中,如果T是K_{2n}在给定路分解θ下同构于$K_{1,2n-1}$的彩虹生成树,那么与T边不交的彩虹树将无法包含与$K_{1,2n-1}$的中心点关联的边,即无法构成彩虹生成树。

下面用$RST(\theta)$表示完全图K_n在子图分解θ下的彩虹生成树数目。

定理5 设$n\geqslant2$是整数,且K_{2n}是顶点数为$2n$并具有路分解$\theta:=\{P_1,\cdots,P_{2n-1}\}$的完全图。则在该分解$\theta$下,$RST(\theta)\geqslant\det(\theta)$。

证明 设$\theta:=\{P_1,\cdots,P_{2n-1}\}$为完全图$K_{2n}$的路分解。值得注意的是$\theta$中路$P_i(i\in\{1,2,\cdots,2n-1\})$是二部图。设$D$是对$\theta$中的每个路$P_i$进行从一个部集到另一个部集的任意定向形成$K_{2n}$的有向图。设$\boldsymbol{M}$为$D$的$2n\times q$顶点-弧关联矩阵,且$\boldsymbol{N}$为$D$的$q\times(2n-1)$弧-路关联矩阵。进一步设$\boldsymbol{B}$为$K_{2n}$在路分解$\theta$下的色度矩阵。根据引理5可知,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{MN}$。令$\boldsymbol{A}_i$表示矩阵$\boldsymbol{A}$删除第$i$行后形成的子矩阵。由$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{MN}$可得$\boldsymbol{B}_{2n-1}=\boldsymbol{M}_{2n-1}\cdot\boldsymbol{N}$。根据$\det(\theta)$的定义可知$\det(\theta)=\left|\det(\boldsymbol{B}_{2n-1})\right|$。进一步可得

$$\det(\theta)=\left|\det(\boldsymbol{B}_{2n-1})\right|=\left|\det(\boldsymbol{M}_{2n-1}\cdot\boldsymbol{N})\right|。$$

根据引理6可知

$$\left|\det(\boldsymbol{M}_{2n-1}\cdot\boldsymbol{N})\right|=\left|\sum_{S\subseteq E,|S|=2n-1}\det(\boldsymbol{M}_{2n-1}^S)\cdot\det(\boldsymbol{N}^S)\right|,$$

其中,$\sum$是对由$2n-1$条边组成的所有子集S求和,$\boldsymbol{M}_{2n-1}^S$是保留S对应$\boldsymbol{M}$的$2n-1$列得到的矩阵,且$\boldsymbol{N}^S$是保留S所对应$\boldsymbol{N}$的$2n-1$行得到的矩阵。

根据引理7可知,若集合S的边导出子图是K_{2n}的生成树,则$\det(\boldsymbol{M}_{2n-1}^S)=\pm1$;否则,$\det(\boldsymbol{M}_{2n-1}^S)=0$。进一步由引理7及弧-路关联矩阵$\boldsymbol{N}$的定义可知,若集合$S$的边导出子图是彩虹的,则$\det(\boldsymbol{N}^S)=\pm1$;否则,$\det(\boldsymbol{N}^S)=0$。因此集合$S$的边导出子图是$K_{2n}$在$\theta$分解下的彩虹生成树,当且仅当$\det(\boldsymbol{M}_{2n-1}^S)\cdot\det(\boldsymbol{N}^S)=\pm1$。进一步有$K_{2n}$在$\theta$分解下的彩虹生成树数目

$$RST(\theta)=\sum_{S\subseteq E,|S|=2n-1}\left|\det(\boldsymbol{M}_{2n-1}^S)\cdot\det(\boldsymbol{N}^S)\right|\geqslant\left|\sum_{S\subseteq E,|S|=2n-1}\det(\boldsymbol{M}_{2n-1}^S)\cdot\det(\boldsymbol{N}^S)\right|=\left|\det(\boldsymbol{B}_{2n-1})\right|=\det(\theta)。$$

定理5得证。

注3 定理5中完全图K_{2n}的路分解$\theta:=\{P_1,\cdots,P_{2n-1}\}$不必满足$P_i(i\in\{1,2,\cdots,2n-1\})$是长度为$n$的路,只需确保该分解$\theta$恰包含$2n-1$条路。用定理5的证明思路同样可以得到完全图$K_{2n+1}$在由长度为大于等于4的偶数的圈组成的圈分解$\theta:=\{C_1,C_2,\cdots,C_{2n}\}$下彩虹生成树数目的下界。

3 结束语

本文证实了完全图K_{2n+1}在特定的圈分解下和K_{2n}在特定路分解下均能够包含彩虹生成树和边不交彩虹生成树,并证明了存在与对应分解相关的不变量作为K_{2n+1}在特定圈分解下和K_{2n}在特定路分解下彩虹生成树数目的下界。研究结果为进一步考虑更一般图在特定子图分解下不同结构彩虹子图的存在性及确定相应彩虹子图数目下界提供了理论支撑。后续值得进一步考虑完全图K_{2n+1}在哪些圈分解下和K_{2n}在哪些路分解下能够包含更多边不交彩虹生成树,以及探究目前无法用定理5的证明方法确定的K_{2n+1},在圈的个数大于$2n$的偶圈分解和包含奇圈的圈分解下及K_{2n}在路的个数大于$2n-1$的路分解下,彩虹生成树数目的下界问题。

参考文献:

[1]KIRCHHOFF G. Über die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung derlinearen verteilung galvanischer Ströme geführt wird[J]. Annual Review of Physical Chemistry, 1847, 72: 497-508.

[2]ALBIN N, KOTTEGODA K, POGGI-CORRADINI P. An exact-arithmetic algorithm for spanning tree modulus [J]. Networks, 2025, 85(4): 412-424.
[3]DING C, WEI P, SHI Y, et al. Sampling and active learning methods for network reliability estimation using K-terminal spanning tree[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2024, 250: 110309.
[4]GONG H L, JIN X A. A simple formula for the number of the spanning trees of line graphs[J]. Journal of Graph Theory, 2018, 88(2): 294-301.
[5]HU J, LI H, MAEZAWA S. Maximum properly colored trees in edge-colored graphs [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2022, 44: 154-171.
[6]BAI X Q, LI B, XU C D, et al. Fast algorithm for the rainbow disconnection coloring of 2-trees[J]. Journal of the Operations Research Society of China, 2023, 14: 149-161.
[7]AIGNER-HOREV E, HEFETZ D, LAHIRI A. Rainbow trees in uniformly edge-colored graphs[J]. Random Structures & Algorithms, 2023, 62(2): 287-303.
[8]GE J, DONG F M. Spanning trees in complete bipartite graphs and resistance distance in nearly complete bipartite graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2020, 283: 542-554.
[9]NELSEN L M. Applications of geometric and spectral methods in graph theory[D]. Denver: University of Denver, 2019.
[10]XU M, CHEN H. Tree-Invent: A novel multipurpose molecular generative model constrained with a topological tree [J]. Journal of Chemical Information and Modeling, 2023, 63(22): 7067-7082.
[11]BRADSHAW P. Rainbow spanning trees in random subgraphs of dense regular graphs[J]. Discrete Math, 2024, 347(6): 113960.
[12]BRUALDI R, HOLLINGSWORTH S. Multicolored trees in complete graphs [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1996, 68: 310-313.
[13]KRUSSEL J, MARSHALL S, VERRALL H. Spanning trees orthogonal to one-factorizations of K_{2n}[J]. Ars Combinatoria: A Canadian Journal of Combinatorics, 2000, 57: 77-82.
[14]ALON N, BRUALDI R A, SHADER B L. Multicolored forests in bipartite decompositions of graphs[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1991, 53(1): 143-148.
[15]LIU J Q, SCHWENK A J. The color-degree matrix and the number of multicolored trees in star decompositions [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1994, 60(2): 207-221.
[16]BONDY J A, MURTY U S R. 吴望名等译. 图论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
[17]WELSH D J A. Matroid theory [M]. New York: Dover Publications, 2010.
[18]TARSI M. Decomposition of a complete multigraph into simple paths: nonbalanced handcuffed designs[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1983, 34(1): 60-70.
[19]张远达. 线性代数原理[M]. 上海: 上海教育出版社, 1980.
[20]WHITNEY H. Non-separable and planar graphs [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1931, 17(2): 125-127.

[责任编辑　毕　伟]

Rainbow spanning trees in complete graphs with cycle-decompositions and path- decompositions

ZHANG Tao, GUO Zhiwei*, LI Li, SHI Xiaoyun

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan' an 716000, China)

Abstract: The existence of rainbow spanning trees in complete graphs with specific subgraph-decompositions is considered. Based on matroid theory and using Rado theorem, it is proved that both a complete graph on an odd number of vertices with a specific cycle-decomposition and a complete graph on an even number of vertices with a specific path-decomposition contain rainbow spanning trees and edge-disjoint rainbow spanning tree. Moreover, the lower bounds on the numbers of rainbow spanning trees in a complete graph on an odd number of vertices with a specific cycle-decomposition and a complete graph on an even number of vertices with a specific path-decomposition are established, by introducing color-degree matrices of complete graphs with specific subgraph-decompositions and using the Cauchy-Binet theorem. The results enrich the existence theory of rainbow spanning trees and edge-disjoint rainbow spanning trees in complete graphs with specific subgraph-decompositions, and complete the results of lower bounds on the numbers of rainbow spanning trees in complete graphs with specific subgraph-decompositions.

Key words: complete graph; cycle- (path-) decomposition; rainbow spanning tree; matroid theory; color-degree matrix