研究论文|Research Article
数理基础科学|Mathematics and Physics
引用格式:赵亚双,许少鹏. 一类具有退化的混合问题的局部解 [J]. 海南大学学报(自然科学版中英文),2026,44(4):440−450.
Citation: Zhao Yashuang, Xu Shaopeng. Local solutions of a class of mixed problems with degeneracy[J]. Natural Science of Hainan University, 2026, 44(4): 440−450.
Open Access

一类具有退化的混合问题的局部解

赵亚双, 许少鹏 ✉
(海南大学 数学与统计学院,海南 海口 570228)

摘　要: 对于退化的抛物方程,抛物方程标准理论的可解性不再适用,因此本文通过逼近问题研究了一类退化的半线性混合问题的解。首先构建混合问题的逼近问题,利用 Schauder 不动点定理证明了逼近问题的局部解,并将得到的解进行延拓,证明逼近问题全局解的存在性,再建立了同时满足混合问题和逼近问题的比较原理,最后通过对混合问题的初值施加某些适当的限制条件,利用比较原理、抛物方程的内部 Schauder 估计和 Arzelà-Ascoli 定理等证明混合问题存在唯一的局部经典解。

关键词: 退化;抛物方程;比较原理;Schauder 不动点定理;逼近问题
中图分类号: O175.29　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1004-1729(2026)04-0440-11
DOI: 10.65658/j.hndk.2026011801　　CSTR: 32403.14.hndk.2026011801

Local solutions of a class of mixed problems with degeneracy

Zhao Yashuang, Xu Shaopeng ✉
(School of Mathematics and Statistics, Hainan University, Haikou 570228, China)

Abstract: This paper studies the existence and uniqueness of local classical solutions to a class of degenerate semi-linear mixed problems. For degenerate parabolic equations, the standard solvability theory for parabolic equations does not apply. To address this issue, an approximation problem is constructed for the degenerate mixed problem, and solutions to the mixed problem are obtained *via* solutions to the approximation problem. First, the Schauder fixed point theorem is employed to obtain a local solution to the approximation problem. This solution is then extended to establish the existence of a global solution for the approximation problem. Subsequently, a comparison principle is established that simultaneously satisfies both the mixed problem and the approximating equation. Finally, by imposing certain appropriate constraints on the initial conditions of the mixed problem, the comparison principle, the internal Schauder estimate for the parabolic equation, and the Arzelà-Ascoli theorem are utilised to prove the existence of a unique local classical solution to the mixed problem.

Keywords: degeneracy; parabolic equations; comparison principle; Schauder fixed point theorem; approximation problems

Received: 2026−01−18; **Revised:** 2026−03−04; **Accepted:** 2026−03−05.
✉ **Corresponding author(s):** Xu Shaopeng, E-mail: xuxsp@126.com.

0 引 言

抛物方程作为偏微分方程的重要分支,在热传导、扩散现象、金融数学及环境科学等领域具有广泛的应用价值。抛物方程结合边界条件和初值条件组成的混合问题,是偏微分方程适定性研究和数值计算与理论分析的重要课题。例如,在材料热传导模拟中,复杂介质往往需要同时考虑抛物方程与其他类型方程的相互作用,或处理非均匀边界条件。混合问题的研究可追溯至 20 世纪 70 年代 Babuška[1] 和 Brezzi[2] 提出的混合有限元理论,通过引入中间变量降低方程阶数。此外,越来越多的学者开始研究退化的抛物方程,例如,Zhigun[3] 研究了退化的抛物−抛物趋化方程的全局熵解;Le[4] 证明了具有超线性扩散速率和 logistic 源项的退化趋化方程全局解的存在性。

本文基于伤口的凝血现象,构造了一类扩散退化的半线性混合问题,并研究了在$(s,t)\in(0,\mathrm{L}]\times(0,\mathrm{T_{max}})$中混合问题解的存在性和唯一性,$\mathrm{T_{max}}$表示该混合问题的最大存在时间。该混合问题:

$$\begin{cases} w_t(s,t)=s^{\beta}w_{ss}+w_s(w-\mathrm{M}s)\left[s^{\delta}(w-\mathrm{M}s)^2\right]^{\mathrm{q}}, & s\in(0,\mathrm{L}),t\in(0,\mathrm{T_{max}}) \\ w(0,t)=0,w(\mathrm{L},t)=\mathrm{ML}, & t\in(0,\mathrm{T_{max}}) \\ w(s,0)=w_0(s), & s\in(0,\mathrm{L}) \end{cases} \tag{1}$$

其中,$\mathrm{L},\beta\in\mathbf{R}$是正常数,$\delta,\mathrm{q}\geqslant 0$,$\mathrm{M}=\frac{1}{\mathrm{L}}\int_0^{\mathrm{L}}w_{0s}(s,t)\mathrm{d}s>0$。

本文证明了存在$\mathrm{T}>0$,在$(s,t)\in(0,\mathrm{L}]\times(0,\mathrm{T})$中,混合问题(1)存在唯一的经典解,主要定理如下。

定理 1 假设$\mathrm{L},\beta\in\mathbf{R}$是正常数,$\theta\in(0,1)$,$\delta,\mathrm{q}\geqslant 0$,且$w_0\in C^{2+\theta}([0,\mathrm{L}])$满足

$$w_0(0)=0,w_0(\mathrm{L})=\mathrm{ML}\text{和}w_{0s}\geqslant 0$$

$$w_{0ss}(s)\leqslant 0,s\in(0,\mathrm{L})$$

$$w_{0ss}(0)=0,w_{0s}(\mathrm{L})=0,w_{0ss}(\mathrm{L})=0$$

则存在$\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T_{max}})$使得(1)存在唯一的局部经典解$w$,且

$$w\in C^0([0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}))\cap C^{2,1}((0,\mathrm{L}]\times(0,\mathrm{T}))$$

综上所述,本文首先构造了混合问题的逼近问题,然后构造一个同时满足混合问题和逼近问题的比较原理,再通过 Schauder 不动点定理证明逼近问题解的存在性,利用 Schauder 估计、比较原理和 Arzelà-Ascoli 定理证明混合问题局部解的存在性,最后通过对初值添加某些适当的条件,证明w_s的有界性,利用比较原理得混合问题存在唯一的经典解。

1 逼近问题

由于混合问题(1)是半线性的退化问题,且标准理论不包含退化问题的可解性研究。但文献 [5] 已经利用了逼近问题和拟线性抛物方程的标准理论研究混合问题的存在性问题,因此参考文献 [5] 中的解决方案构建了逼近问题:

$$\begin{cases} w_{\varepsilon t}(s,t)=s^{\beta}w_{\varepsilon ss}+w_{\varepsilon s}(w_\varepsilon-\mathrm{M}(s-\varepsilon))\left[s^{\delta}(w_\varepsilon-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^2\right]^{\mathrm{q}}, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L}),t>0 \\ w_\varepsilon(\varepsilon,t)=0,w_\varepsilon(\mathrm{L},t)=\mathrm{ML}, & t>0 \\ w_\varepsilon(s,0)=w_{0\varepsilon}(s), & s\in(\varepsilon,\mathrm{L}) \end{cases} \tag{2}$$

其中,$\varepsilon\in(0,\mathrm{L})$且

$$w_{0\varepsilon}(s):=w_0\left(\frac{\mathrm{L}(s-\varepsilon)}{\mathrm{L}-\varepsilon}\right),s\in[\varepsilon,\mathrm{L}] \tag{3}$$

逼近问题(2)将在混合问题(1)的研究中发挥重要作用。

2 比较原理

由于论证的是扩散退化问题,标准的比较原理并不适用。此外,由于缺乏文献[6−7]中比较原理的某些条件,且不满足文献[5]中比较原理的形式。因此,证明抛物方程比较原理的一个变体,恰好也适用于逼近问题(2)。

引理1 令$\mathrm{T}>0$, $\mathrm{l},\mathrm{L}\geqslant 0$, 其中$\mathrm{l}<\mathrm{L}$。假设$\overline{w}(s,t)$和$\underline{w}(s,t)$属于$C^0([\mathrm{l},\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}])\cap C^{2,1}((\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}])$, 且要么$\overline{w}_s\in L^\infty((\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}))$, 要么$\underline{w}_s\in L^\infty((\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}))$。此外, 如果对于$\forall\beta,\mathrm{a}\in\mathbf{R}$和$\forall\mathrm{b},\mathrm{c},\delta,\mathrm{q},\mathrm{M}\geqslant 0$, 有

$$\overline{w}_t\geqslant \mathrm{b}s^{\beta}\overline{w}_{ss}+\mathrm{c}\overline{w}_s(\overline{w}-\mathrm{M}(s-\mathrm{a}))\left[s^{\delta}(\overline{w}-\mathrm{M}(s-\mathrm{a}))^2\right]^{\mathrm{q}},(s,t)\in(\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}) \tag{4}$$

$$\underline{w}_t\leqslant \mathrm{b}s^{\beta}\underline{w}_{ss}+\mathrm{c}\underline{w}_s(\underline{w}-\mathrm{M}(s-\mathrm{a}))\left[s^{\delta}(\underline{w}-\mathrm{M}(s-\mathrm{a}))^2\right]^{\mathrm{q}},(s,t)\in(\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}) \tag{5}$$

对于任意的$s\in(\mathrm{l},\mathrm{L})$, 有

$$\underline{w}(s,0)\leqslant\overline{w}(s,0) \tag{6}$$

对于任意的$t\in(0,\mathrm{T})$, 有

$$\underline{w}(\mathrm{l},t)\leqslant\overline{w}(\mathrm{l},t)和\underline{w}(\mathrm{L},t)\leqslant\overline{w}(\mathrm{L},t) \tag{7}$$

则$\underline{w}(s,t)\leqslant\overline{w}(s,t)$, $(s,t)\in[\mathrm{l},\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T})$。

证明 不妨假设$\overline{w}_s\in L^\infty((\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}))$, 定义函数

$$\overline{f}:=\overline{w}-\mathrm{M}(s-\mathrm{a}),\underline{f}:=\underline{w}-\mathrm{M}(s-\mathrm{a}),(s,t)\in[\mathrm{l},\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}] \tag{8}$$

则$\overline{f}_s\in L^\infty((\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}))$。因为函数$\overline{w}$和$\underline{w}$属于$C^0([\mathrm{l},\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}])$, 故函数$\overline{f}$和$\underline{f}$也属于$C^0([\mathrm{l},\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}])$。由于$\delta,\mathrm{q}\geqslant 0$, 于是存在正常数$\mathrm{C}_2,\mathrm{C}_3$使得

$$\mathrm{c}(2\mathrm{q}+1)\left(\left|\overline{f}_s\right|+\mathrm{M}\right)s^{\delta\mathrm{q}}\mathrm{C}_1^{2\mathrm{q}}\leqslant\mathrm{C}_2,(s,t)\in(\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}) \tag{9}$$

$$\mathrm{c}s^{\delta\mathrm{q}}\left|\underline{f}\right|^{2\mathrm{q}+1}\leqslant\mathrm{C}_3,(s,t)\in(\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}) \tag{10}$$

其中, C_1是待定的常数。

对于$\forall\varepsilon>0$, 定义函数

$$z(s,t):=\underline{w}(s,t)-\overline{w}(s,t)-\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2t},(s,t)\in[\mathrm{l},\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}] \tag{11}$$

由此可知

$$z(s,t)<0,(s,t)\in(\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}) \tag{12}$$

否则, 由式(6)和(7)可得$z(s,0)<0, z(\mathrm{l},t)<0$和$z(\mathrm{L},t)<0$, 因此可以推测出存在$(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)\in(\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T})$使得

$$\max_{(s,t)\in(\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{t}_0]}z(s,t)=z(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)=0 \tag{13}$$

特别的, $z_t(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)\geqslant 0$ 且$z_s(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)=0$。

此外, 因为$\overline{w}$和$\underline{w}$属于$C^{2,1}((\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}])$且$z_s(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)=0$, 故对于$\forall s\in(\mathrm{l},\mathrm{L})$, $z_{ss}(s,\mathrm{t}_0)$存在且有

$$z_s(s,\mathrm{t}_0)=\int_{\mathrm{s}_0}^{s}z_{ss}(\sigma,\mathrm{t}_0)\mathrm{d}\sigma \tag{14}$$

由于$z(\cdot,\mathrm{t}_0)$在s_0处取得最大值, 式(14)表明存在$(s_j)_{j\in\mathbf{N}}\subset(\mathrm{s}_0,\mathrm{L})$,使得当$j\to\infty$时, 有$s_j\searrow\mathrm{s}_0$且

$$z_{ss}(s_j,\mathrm{t}_0)\leqslant 0,j\in\mathbf{N} \tag{15}$$

否则, 由式(14)可知对于任意的$s\in(\mathrm{s}_0,\mathrm{L})$, 有$z_s(s,\mathrm{t}_0)>0$, 这显然与式(13)矛盾。

因为$z_{ss}(s_j,\mathrm{t}_0)\leqslant 0$且$z_{ss}=\underline{w}_{ss}-\overline{w}_{ss}$, 可得$\underline{w}_{ss}(s_j,\mathrm{t}_0)\leqslant\overline{w}_{ss}(s_j,\mathrm{t}_0)$。从而通过式(9)、(10)和中值定理可得

$$z_t(s_j,\mathrm{t}_0)=\underline{w}_{\mathrm{t}}(s_j,\mathrm{t}_0)-\overline{w}_{\mathrm{t}}(s_j,\mathrm{t}_0)-2\mathrm{C}_2\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}\leqslant \mathrm{b}s_j^{\beta}\underline{w}_{ss}(s_j,\mathrm{t}_0)+\mathrm{c}\underline{w}_s(s_j,\mathrm{t}_0)\left(\underline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a})\right)\left[s_j^{\delta}\left(\underline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a})\right)^2\right]^{\mathrm{q}}-$$
$$\mathrm{b}s_j^{\beta}\overline{w}_{ss}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{c}\overline{w}_s(s_j,\mathrm{t}_0)(\overline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a}))\left[s_j^{\delta}(\overline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a}))^2\right]^{\mathrm{q}}-2\mathrm{C}_2\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}\leqslant$$
$$\mathrm{c}\underline{w}_s(s_j,\mathrm{t}_0)\left(\underline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a})\right)\left[s_j^{\delta}\left(\underline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a})\right)^2\right]^{\mathrm{q}}-$$
$$\mathrm{c}\overline{w}_s(s_j,\mathrm{t}_0)(\overline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a}))\left[s_j^{\delta}(\overline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a}))^2\right]^{\mathrm{q}}-2\mathrm{C}_2\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}=$$
$$\mathrm{c}(\underline{w}_s(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M})\left(\underline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a})\right)\left[s_j^{\delta}\left(\underline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a})\right)^2\right]^{\mathrm{q}}-$$
$$\mathrm{c}(\overline{w}_s(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M})(\overline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a}))\left[s_j^{\delta}(\overline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a}))^2\right]^{\mathrm{q}}+$$
$$\mathrm{cM}\left(\underline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a})\right)\left[s_j^{\delta}\left(\underline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a})\right)^2\right]^{\mathrm{q}}-$$
$$\mathrm{cM}(\overline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a}))\left[s_j^{\delta}(\overline{w}(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(s_j-\mathrm{a}))^2\right]^{\mathrm{q}}-2\mathrm{C}_2\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}=$$
$$s_j^{\delta\mathrm{q}}\left[\mathrm{c}\underline{f}^{2\mathrm{q}+1}(s_j,\mathrm{t}_0)\underline{f}_s(s_j,\mathrm{t}_0)-\mathrm{c}\overline{f}^{2\mathrm{q}+1}(s_j,\mathrm{t}_0)\overline{f}_s(s_j,\mathrm{t}_0)+\mathrm{cM}\underline{f}^{2\mathrm{q}+1}(s_j,\mathrm{t}_0)-\right.$$
$$\left.\mathrm{cM}\overline{f}^{2\mathrm{q}+1}(s_j,\mathrm{t}_0)\right]-2\mathrm{C}_2\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}=\mathrm{c}s_j^{\delta\mathrm{q}}\underline{f}^{2\mathrm{q}+1}(s_j,\mathrm{t}_0)\left(\underline{f}_s(s_j,\mathrm{t}_0)-\overline{f}_s(s_j,\mathrm{t}_0)\right)+$$
$$\mathrm{c}s_j^{\delta\mathrm{q}}\left(\overline{f}_s(s_j,\mathrm{t}_0)+\mathrm{M}\right)\left(\underline{f}^{2\mathrm{q}+1}(s_j,\mathrm{t}_0)-\overline{f}^{2\mathrm{q}+1}(s_j,\mathrm{t}_0)\right)-2\mathrm{C}_2\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}\leqslant$$
$$\mathrm{c}s_j^{\delta\mathrm{q}}\left|\underline{f}(s_j,\mathrm{t}_0)\right|^{2\mathrm{q}+1}\left|\underline{f}_s(s_j,\mathrm{t}_0)-\overline{f}_s(s_j,\mathrm{t}_0)\right|+$$
$$\mathrm{c}s_j^{\delta\mathrm{q}}(2\mathrm{q}+1)\mathrm{C}_1^{2\mathrm{q}}\left(\left|\overline{f}_s(s_j,\mathrm{t}_0)\right|+\mathrm{M}\right)\left|\underline{f}(s_j,\mathrm{t}_0)-\overline{f}(s_j,\mathrm{t}_0)\right|-2\mathrm{C}_2\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}\leqslant$$
$$\mathrm{C}_3\left|\underline{f}_s(s_j,\mathrm{t}_0)-\overline{f}_s(s_j,\mathrm{t}_0)\right|+\mathrm{C}_2\left|\underline{f}(s_j,\mathrm{t}_0)-\overline{f}(s_j,\mathrm{t}_0)\right|-2\mathrm{C}_2\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}$$

其中, C_1是正常数并且满足$|f_\delta|\leqslant \mathrm{C}_1$, $f_\delta\in C^0([\mathrm{l},\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}])\cap C^{2,1}((\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}])$指$\overline{f}$和$\underline{f}$之间的某函数。

因为$z_s(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)=0$和$z_s=\underline{w}_s-\overline{w}_s$, 可得$\underline{w}_s(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)=\overline{w}_s(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)$。因此

$$\underline{f}_s(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)=\underline{w}_s(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}=\overline{w}_s(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}=\overline{f}_s(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)$$

于是让$j\to\infty$可得

$$z_t(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)\leqslant \mathrm{C}_2\left|\underline{f}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)-\overline{f}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)\right|-2\mathrm{C}_2\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}$$

由于$\overline{f}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)=\overline{w}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(\mathrm{s}_0-\mathrm{a})$和$\underline{f}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)=\underline{w}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)-\mathrm{M}(\mathrm{s}_0-\mathrm{a})$, 有

$$\underline{f}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)-\overline{f}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)=\underline{w}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)-\overline{w}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)$$

又$z(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)=\underline{w}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)-\overline{w}(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)-\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}=0$, 故

$$z_t(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)\leqslant \mathrm{C}_2\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}-2\mathrm{C}_2\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2\mathrm{t}_0}<0$$

这与$z_t(\mathrm{s}_0,\mathrm{t}_0)\geqslant 0$矛盾, 因此, 式(12)成立, 即

$$z(s,t)=\underline{w}(s,t)-\overline{w}(s,t)-\varepsilon e^{2\mathrm{C}_2 t}<0,(s,t)\in(\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T})$$

最后, 让$\varepsilon\searrow 0$有

$$\underline{w}(s,t)\leqslant\overline{w}(s,t),(s,t)\in(\mathrm{l},\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T})$$

再结合式(6)和(7)可得结论成立。

证毕。

3 局部存在性和唯一性

由于混合问题(1)的退化性, 故首先通过逼近问题(2)研究混合问题(1)的不完整形式。

引理 2 假设$\mathrm{L},\beta\in\mathbf{R}$是正常数, $\theta\in(0,1)$, $\delta,\mathrm{q}\geqslant 0$, 且$w_0\in C^{1+0}([0,\mathrm{L}])$满足

$$w_0(0)=0, w_0(\mathrm{L})=\mathrm{ML}\text{和}w_{0s}\geqslant 0 \tag{16}$$

则存在$w\in C_{loc}^{1,\frac{1}{2}}((0,\mathrm{L}]\times[0,\infty))\cap C_{loc}^{2,1}((0,\mathrm{L}]\times(0,\infty))$是

$$\begin{cases} w_t(s,t)=s^{\beta}w_{ss}+w_s(w-\mathrm{M}s)\left[s^{\delta}(w-\mathrm{M}s)^2\right]^{\mathrm{q}}, & s\in(0,\mathrm{L}),t>0\\ w(\mathrm{L},t)=\mathrm{ML}, & t>0\\ w(s,0)=w_0(s), & s\in(0,\mathrm{L}) \end{cases} \tag{17}$$

的解,且满足

$$0\leqslant w(s,t)\leqslant \mathrm{ML},(s,t)\in(0,\mathrm{L}]\times[0,\infty)$$

此外,对于$\forall t\in[0,\infty)$, $w(\cdot,t)$在$(0,\mathrm{L}]$上单调递增。因此,对于固定的$t\geqslant 0$,可以通过

$$w(0,t):=\lim_{s\searrow 0}w(s,t)\geqslant 0 \tag{18}$$

将$w(\cdot,t)$连续延拓至$s=0$。

证明 对于$\varepsilon\in(0,\mathrm{L})$,定义$w_{0\varepsilon}(s)\in C^{1+0}([\varepsilon,\mathrm{L}])$满足式(3)。由式(16)可得在$[\varepsilon,\mathrm{L}]$中有

$$w_{0\varepsilon}(\varepsilon)=0, w_{0\varepsilon}(\mathrm{L})=\mathrm{ML}, w_{0\varepsilon s}(s)\geqslant 0$$

和$w_{0\varepsilon}(s)\leqslant w_0(s), w_{0\varepsilon}(s)\nearrow w_0(s), s\in[\varepsilon,\mathrm{L}]$,且当$\varepsilon\searrow 0$时,在$C_{loc}^1((0,\mathrm{L}])$中有$w_{0\varepsilon}(s)\to w_0(s)$。

定义$\widetilde{w}_{\varepsilon}(s,t):=\overline{w}_{0\varepsilon}(s)+\int_0^t s^{\beta}\overline{w}_{\varepsilon ss}+\overline{w}_{\varepsilon s}(\overline{w}_{\varepsilon}-\mathrm{M}(s-\varepsilon))\left[s^{\delta}(\overline{w}_{\varepsilon}-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^2\right]^{\mathrm{q}}\mathrm{d}t$,其中$\widetilde{w}_{\varepsilon}(\varepsilon,t)=0,\widetilde{w}_{\varepsilon}(\mathrm{L},t)=\mathrm{ML}$且$\widetilde{w}_{0\varepsilon}(s):=w_0\left(\dfrac{\mathrm{L}(s-\varepsilon)}{\mathrm{L}-\varepsilon}\right)$。

定义一个有界凸闭集$A:=\left\{\overline{w}_{\varepsilon}\in\chi\middle|\|\overline{w}_{\varepsilon}\|_{\chi}\leqslant \mathrm{C}_m\right\}$,其中$\dfrac{1}{3}\mathrm{C}_m\geqslant\mathrm{ML}$,

$$\chi:=C^0([\varepsilon,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}])\cap C^{2,1}([\varepsilon,\mathrm{L}]\times(0,\mathrm{T}])$$

且

$$\|\overline{w}_{\varepsilon}\|_{\chi}=\|\overline{w}_{\varepsilon}\|_{C^0([\varepsilon,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}])}+\|\overline{w}_{\varepsilon}\|_{C^{2,1}([\varepsilon,\mathrm{L}]\times(0,\mathrm{T}])}$$

其中,T是待定的常数。考虑映射$F\overline{w}_{\varepsilon}:=\widetilde{w}_{\varepsilon}$,其中$\overline{w}_{\varepsilon}\in A$,且$\widetilde{w}_{\varepsilon}$是逼近问题(2)的解,则

$$\begin{aligned}\|\widetilde{w}_{\varepsilon}\|_{\chi}\leqslant&\left\|\overline{w}_{0\varepsilon}(s)+\int_0^t s^{\beta}|\overline{w}_{\varepsilon ss}|+|\overline{w}_{\varepsilon s}||\overline{w}_{\varepsilon}-\mathrm{M}(s-\varepsilon)|\left[s^{\delta}(\overline{w}_{\varepsilon}-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^2\right]^{\mathrm{q}}\mathrm{d}t\right\|_{\chi}\leqslant\\ &\frac{1}{3}\mathrm{C}_m+\mathrm{L}^{\beta}\mathrm{C}_m\mathrm{T}+\mathrm{C}_m(\mathrm{C}_m+\mathrm{ML})^{2q+1}\mathrm{L}^{\delta q}\mathrm{T}\leqslant\mathrm{C}_m\end{aligned}$$

其中,$\mathrm{T}=\dfrac{1}{3\left(\mathrm{L}^{\beta}+(\mathrm{C}_m+\mathrm{ML})^{2q+1}\mathrm{L}^{\delta q}\right)}$充分小。因此,算子$F$是自身到自身的映射,且在$A$上一致有界。此外,对于$\forall\tilde{\varepsilon}>0$,存在

$$\tilde{\delta}=\frac{\tilde{\varepsilon}}{3\left[\mathrm{L}^{\beta}\mathrm{T}+\mathrm{L}^{\delta q}(\mathrm{C}_m+\mathrm{ML})^{2q+1}\mathrm{T}+(2q+1)\mathrm{L}^{\delta q}\mathrm{C}_m(\mathrm{C}_m+\mathrm{ML})^{2q}\mathrm{T}\right]}$$

且$\overline{w}_{\varepsilon 1},\overline{w}_{\varepsilon 2}\in\chi$,满足$\|\overline{w}_{\varepsilon 1}-\overline{w}_{\varepsilon 2}\|_{\chi}<\tilde{\delta}$,由中值定理得

$$\begin{aligned}|\tilde{w}_{\varepsilon 1}-\tilde{w}_{\varepsilon 2}|\leqslant&\int_0^t s^{\beta}|\overline{w}_{\varepsilon 1ss}-\overline{w}_{\varepsilon 2ss}|\mathrm{d}t+\int_0^t s^{\delta q}\left[|\overline{w}_{\varepsilon 1s}||\overline{w}_{\varepsilon 1}-\mathrm{M}(s-\varepsilon)|^{2q+1}-|\overline{w}_{\varepsilon 2s}||\overline{w}_{\varepsilon 2}-\mathrm{M}(s-\varepsilon)|^{2q+1}\right]\mathrm{d}t\leqslant\\ &\mathrm{L}^{\beta}\tilde{\delta}\mathrm{T}+\mathrm{L}^{\delta q}\int_0^t|\overline{w}_{\varepsilon 1s}-\overline{w}_{\varepsilon 2s}||\overline{w}_{\varepsilon 1}-\mathrm{M}(s-\varepsilon)|^{2q+1}+|\overline{w}_{\varepsilon 2s}|\left[|\overline{w}_{\varepsilon 1}-\mathrm{M}(s-\varepsilon)|^{2q+1}-|\overline{w}_{\varepsilon 2}-\mathrm{M}(s-\varepsilon)|^{2q+1}\right]\mathrm{d}t\leqslant\\ &\mathrm{L}^{\beta}\tilde{\delta}\mathrm{T}+\mathrm{L}^{\delta q}\tilde{\delta}(\mathrm{C}_m+\mathrm{ML})^{2q+1}\mathrm{T}+(2q+1)\mathrm{L}^{\delta q}\mathrm{C}_m(\mathrm{C}_m+\mathrm{ML})^{2q}\tilde{\delta}\mathrm{T}\leqslant\tilde{\varepsilon}\end{aligned}$$

因此,Schauder不动点定理保证了存在一个$\overline{w}_{\varepsilon}\in A$满足$F\overline{w}_{\varepsilon}:=\overline{w}_{\varepsilon}$,所以式(2)存在一个解$\overline{w}_{\varepsilon}\in C^0([\varepsilon,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}])\cap C^{2,1}([\varepsilon,\mathrm{L}]\times(0,\mathrm{T}])$。为了得到逼近问题(2)的一个全局解,可以在$[0,T]$外对逼近问题(2)进行如下延拓,

$$\begin{cases}\hat{w}_{\varepsilon t}(s,t)=s^{\beta}\hat{w}_{\varepsilon ss}+\hat{w}_{\varepsilon s}(\hat{w}_{\varepsilon}-\mathrm{M}(s-\varepsilon))\left[s^{\delta}(\hat{w}_{\varepsilon}-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2}\right]^{\mathrm{q}}, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L}),t>\mathrm{T}\\ \hat{w}_{\varepsilon}(\varepsilon,t)=0,\hat{w}_{\varepsilon}(\mathrm{L},t)=\mathrm{ML}, & t>\mathrm{T}\\ \hat{w}_{\varepsilon}(s,\mathrm{T})=w_{\varepsilon}(s,\mathrm{T}), & s\in(\varepsilon,\mathrm{L})\end{cases}\tag{19}$$

显然, 可以对方程组(19)再次使用 Schauder 不动点定理, 一直重复进行如上步骤, 可得逼近问题(2)存在一个解$w_{\varepsilon}\in C^{0}([\varepsilon,\mathrm{L}]\times[0,\infty))\cap C^{2,1}([\varepsilon,\mathrm{L}]\times(0,\infty))$。

在$(s,t)\in[\varepsilon,\mathrm{L}]\times[0,\infty)$中使用引理 1, 可得$0\leqslant w_{\varepsilon}(s,t)\leqslant\mathrm{ML}$。因为

$$\left(\frac{\mathrm{L}(s-\varepsilon)}{\mathrm{L}-\varepsilon}\right)_{\varepsilon}=\frac{-\mathrm{L}(\mathrm{L}-\varepsilon)+\mathrm{L}(s-\varepsilon)}{(\mathrm{L}-\varepsilon)^{2}}\leqslant 0\text{且}w_{0s}\geqslant 0$$

故$w_{0\varepsilon}$关于ε单调递减, 取$\varepsilon_1\in(0,\mathrm{L})$, $\varepsilon_2\in(0,\mathrm{L})$, 且$\varepsilon_1<\varepsilon_2$, 于是有

$$w_{0\varepsilon_1}(s)\geqslant w_{0\varepsilon_2}(s)$$

$$w_{\varepsilon_1}(\mathrm{L},t)=w_{\varepsilon_2}(\mathrm{L},t)=\mathrm{ML}$$

$$w_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2,t)=w_{\varepsilon_1}(\varepsilon_1,t)\leqslant w_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2,t)$$

由引理 1 可得

$$w_{\varepsilon_2}(s,t)\leqslant w_{\varepsilon_1}(s,t),s\in[\varepsilon_2,\mathrm{L}]$$

即$(w_{\varepsilon})_{\varepsilon\in(0,\mathrm{L})}$关于$\varepsilon$是单调递减的, 所以当$\varepsilon\searrow 0$时, 在$(s,t)\in(0,\mathrm{L}]\times[0,\infty)$中存在函数$0\leqslant w(s,t)\leqslant\mathrm{ML}$使得$w_{\varepsilon}\nearrow w$。参考文献 [8] 可知逼近问题(2)的解在弱解的意义下可以提升正则性,有$w_{\varepsilon}\in W_{2}^{4,1}((\varepsilon,\mathrm{L})\times(0,\infty))$。于是取

$$a^{(1)}(s,w_{\varepsilon})=\beta s^{\beta-1}+s^{\delta\mathrm{q}}(w_{\varepsilon}-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}+1}$$

$$b^{(1)}(s,w_{\varepsilon})=\delta\mathrm{q}s^{\delta\mathrm{q}-1}(w_{\varepsilon}-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}+1}-\mathrm{M}(2\mathrm{q}+1)s^{\delta\mathrm{q}}(w_{\varepsilon}-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}}$$

$$c^{(1)}(s,w_{\varepsilon})=(2\mathrm{q}+1)s^{\delta\mathrm{q}}(w_{\varepsilon}-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}}\geqslant 0$$

则由$w_{0\varepsilon s}(s)\geqslant 0$且在$\{\varepsilon\}\times(0,\infty)$和$\{\mathrm{L}\}\times(0,\infty)$处有$w_{\varepsilon s}\geqslant 0$,于是$w_{\varepsilon s}$满足方程

$$\begin{cases}w_{\varepsilon st}(s,t)=s^{\beta}w_{\varepsilon sss}+a^{(1)}(s,w_{\varepsilon})w_{\varepsilon ss}+b^{(1)}(s,w_{\varepsilon})w_{\varepsilon s}+c^{(1)}(s,w_{\varepsilon})w_{\varepsilon s}^{2}, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L}),t>0\\ w_{\varepsilon s}(\varepsilon,t)\geqslant 0,w_{\varepsilon s}(\mathrm{L},t)\geqslant 0, & t>0\\ w_{\varepsilon s}(s,0)=w_{0\varepsilon s}(s)\geqslant 0, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L})\end{cases}$$

定义函数$h^{(1)}(s,t)\in W_{2}^{2,1}((\varepsilon,\mathrm{L})\times(0,\infty))$满足方程

$$\begin{cases}h_{t}^{(1)}(s,t)=s^{\beta}h_{ss}^{(1)}+a^{(1)}(s,w_{\varepsilon})h_{s}^{(1)}+b^{(1)}(s,w_{\varepsilon})h^{(1)}, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L}),t>0\\ h^{(1)}(\varepsilon,t)=w_{\varepsilon s}(\varepsilon,t)\geqslant 0,h^{(1)}(\mathrm{L},t)=w_{\varepsilon s}(\mathrm{L},t)\geqslant 0, & t>0\\ h^{(1)}(s,0)=w_{0\varepsilon s}(s)\geqslant 0, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L})\end{cases}\tag{20}$$

方程组(20)存在弱解, 通过极值原理知该方程的最小值在边界取得, 即

$$h^{(1)}(s,t)\geqslant 0,(s,t)\in(\varepsilon,\mathrm{L})\times(0,\infty)$$

定义$h^{(2)}(s,t):=w_{\varepsilon s}(s,t)-h^{(1)}(s,t)$, 可得

$$\begin{cases}h_{t}^{(2)}(s,t)\geqslant s^{\beta}h_{ss}^{(2)}+a^{(1)}(s,w_{\varepsilon})h_{s}^{(2)}+b^{(1)}(s,w_{\varepsilon})h^{(2)}, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L}),t>0\\ h^{(2)}(\varepsilon,t)=0,h^{(2)}(\mathrm{L},t)=0, & t>0\\ h^{(2)}(s,0)=0, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L})\end{cases}\tag{21}$$

因为方程组(21)存在弱上解, 从而由极值原理得$w_{\varepsilon s}-h^{(1)}\geqslant 0$, 即

$$w_{\varepsilon s} \geqslant h^{(1)} \geqslant 0, (s,t) \in (\varepsilon, \mathrm{L}) \times (0, \infty)$$

最后通过抛物方程的内部 Schauder 估计[8] 和 Arzelà-Ascoli 定理可得,当$\varepsilon \searrow 0$时, 在$C_{loc}^{1,\frac{1}{2}}((0,\mathrm{L}]\times[0,\infty))$和$C_{loc}^{2,1}((0,\mathrm{L}]\times(0,\infty))$中有$w_\varepsilon \to w$, w就是式(17)的经典解。

通过研究式(17)的性质, 并给式(17)补充$w(0,t)$的定义,将$w(\cdot,t)$连续延拓至$s=0$, 从而在局部证明了混合问题(1)存在解$w \in C^0([0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}))\cap C^{2,1}((0,\mathrm{L}]\times(0,\mathrm{T}))$。

证毕。

引理 3 假设$\mathrm{L},\beta \in \mathbf{R}$是正常数, $\theta \in (0,1)$, $\delta, \mathrm{q} \geqslant 0$且$w_0 \in C^{1+\theta}([0,\mathrm{L}])$满足式(16), 则存在$\mathrm{T}^* \geqslant 0$和$y\colon [0,\mathrm{T}^*) \to \mathbf{R}$使得引理 2 中得到的$w$满足

$$w(s,t) \leqslant y(t) \cdot s, (s,t) \in (0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}^*) \tag{22}$$

此外, 对于$\forall t \in (0,\mathrm{T}^*)$有

$$w(s,t) \in C^0([0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}^*)) \tag{23}$$

证明 定义$y_0 := \|w_{0s}\|_{L^\infty(0,\mathrm{L})}$, 并且让$y \in C^1([0,\mathrm{T}^*))$指 ODE 方程

$$\begin{cases} y'(t) = \mathrm{L}^{(\delta+2)\mathrm{q}} y^{2\mathrm{q}+2}(t), t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{24}$$

的解, 其中$\mathrm{T}^* > 0$表示该 ODE 方程的最大存在时间。

对于$\forall \varepsilon \in (0,\mathrm{L})$和$\forall \mathrm{T} \in (0,\mathrm{T}^*)$, 假设

$$\overline{w}(s,t) := y(t) \cdot s, (s,t) \in [\varepsilon,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}]$$

则在$(\varepsilon,\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T})$中有

$$\begin{aligned} &\overline{w}_t - s^\beta \overline{w}_{ss} - \overline{w}_s(\overline{w} - \mathrm{M}(s-\varepsilon))\left[s^\delta(\overline{w} - \mathrm{M}(s-\varepsilon))^2\right]^{\mathrm{q}} = \\ &\quad y'(t)s - s^\beta \cdot 0 - y(t)(y(t)s - \mathrm{M}(s-\varepsilon))\left[s^\delta(y(t)s - \mathrm{M}(s-\varepsilon))^2\right]^{\mathrm{q}} = \\ &\quad y'(t)s - y^2(t)s\left[s^\delta(y(t)s - \mathrm{M}(s-\varepsilon))^2\right]^{\mathrm{q}} + y(t)\mathrm{M}(s-\varepsilon)\left[s^\delta(y(t)s - \mathrm{M}(s-\varepsilon))^2\right]^{\mathrm{q}} \geqslant \\ &\quad y'(t)s - y^2(t)s^{\delta\mathrm{q}+1}(y(t)s - \mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}} \geqslant [y'(t) - L^{(\delta+2)\mathrm{q}} y^{2\mathrm{q}+2}(t)]\, s = 0 \end{aligned}$$

且初值和边界满足

$$w_\varepsilon(s,0) = w_{0\varepsilon}(s) \leqslant w_0(s) = \int_0^s w_{0s}(s)\mathrm{d}s \leqslant \|w_{0s}\|_{\mathrm{L}^\infty(0,\mathrm{L})} \cdot s = y_0 s = \overline{w}(s,0), s \in (\varepsilon,\mathrm{L})$$

$$w_\varepsilon(\varepsilon,t) = 0 \leqslant y(t) \cdot \varepsilon = \overline{w}(\varepsilon,t), t \in (0,\mathrm{T})$$

此外, $y_0 s \geqslant w_\varepsilon(s,0) = w_{0\varepsilon}(s)$, 故

$$y_0 \geqslant \frac{1}{s} w_{0\varepsilon}(s) \geqslant \frac{1}{\mathrm{L}} w_{0\varepsilon}(s), \quad s \in (\varepsilon,\mathrm{L})$$

且由$w_{0\varepsilon s}(s) \geqslant 0, s \in [\varepsilon,\mathrm{L}]$, 故$0 \leqslant w_{0\varepsilon}(s) \leqslant w_{0\varepsilon}(\mathrm{L}) = \mathrm{ML}$, 因此$y_0 \geqslant \frac{1}{\mathrm{L}}\mathrm{ML}=\mathrm{M}$, 于是

$$w_\varepsilon(\mathrm{L},t) = \mathrm{ML} \leqslant y_0 \mathrm{L} \leqslant y(t) \cdot \mathrm{L} = \overline{w}(\mathrm{L},t), t \in (0,\mathrm{T})$$

因此, 应用引理 1 有

$$w_\varepsilon(s,t) \leqslant \overline{w}(s,t) = y(t) \cdot s, (s,t) \in [\varepsilon,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}] \tag{25}$$

让$\mathrm{T} \nearrow \mathrm{T}^*$, 且不等式(25)的右端与$\varepsilon$无关, 由$\varepsilon \in (0,\mathrm{L})$的任意性, 让$\varepsilon \searrow 0$,可得

$$w(s,t) \leqslant y(t) \cdot s$$

故对于$\forall t \in (0,\mathrm{T}^*)$, 通过$w(0,t) = 0$有

$$w(s,t)\in C^0([0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}^*))$$

证毕。

引理 2 和引理 3 在$(s,t)\in[0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}^*)$中证明了混合问题(1)解的存在性。下面研究混合问题(1)解的唯一性,但在证明唯一性的过程中,需要使用引理 1 证明的比较原理,因此需要研究w_s的有界性。

由引理 3 可知$w(s,t)\leqslant y(\mathrm{T})\cdot s,(s,t)\in(0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T})$, 因此, $\liminf\limits_{s\searrow 0} w_s(s,t)\leqslant y(\mathrm{T})$。故只需要$w_{ss}(s,t)\leqslant 0$, 则可得到$w_s$的有界性。为了得到$w_s$的有界性,将对初值$w_0$施加更好的限制,让$w_0$关于$s$具有凸性,再采用弱解的极值原理,通过初边值条件研究$w_{ss}(s,t)$在$(s,t)\in(0,\mathrm{L})\times(0,\infty)$内部的情况。

引理 4　假设$\mathrm{L},\beta\in\mathbf{R}$是正常数, $\theta\in(0,1)$, $\delta,\mathrm{q}\geqslant 0$且$w_0\in C^{2+\theta}([0,\mathrm{L}])$满足式(16),此外假设

$$w_{0ss}(s)\leqslant 0, s\in(0,\mathrm{L}) \tag{26}$$

$$w_{0ss}(0)=0, w_{0s}(\mathrm{L})=0, w_{0ss}(\mathrm{L})=0 \tag{27}$$

则$w\in C^{2,1}((0,\mathrm{L}]\times[0,\infty))$并且满足

$$w_{ss}(s,t)\leqslant \mathrm{C}, (s,t)\in(0,\mathrm{L})\times[0,\infty) \tag{28}$$

证明　由引理 2 知逼近问题(2)存在解$w_\varepsilon\in C^0([\varepsilon,\mathrm{L}]\times[0,\infty))\cap C^{2,1}([\varepsilon,\mathrm{L}]\times(0,\infty))$。要证明$w\in C^{2,1}((0,\mathrm{L}]\times[0,\infty))$, 关键在$t=0$时的边界情况。通过式(27)可得

$$w_{0\varepsilon ss}(\varepsilon)=0, w_{0\varepsilon s}(\mathrm{L})=0, w_{0\varepsilon ss}(\mathrm{L})=0 \tag{29}$$

因此有

$$\varepsilon^\beta w_{0\varepsilon ss}(\varepsilon)+w_{0\varepsilon s}(\varepsilon)(w_{0\varepsilon}(\varepsilon)-\mathrm{M}(\varepsilon-\varepsilon))\left[\varepsilon^\delta(w_{0\varepsilon}(\varepsilon)-\mathrm{M}(\varepsilon-\varepsilon))^2\right]^{\mathrm{q}}=0$$

$$\mathrm{L}^\beta w_{0\varepsilon ss}(\mathrm{L})+w_{0\varepsilon s}(\mathrm{L})(w_{0\varepsilon}(\mathrm{L})-\mathrm{M}(\mathrm{L}-\varepsilon))\left[\mathrm{L}^\delta(w_{0\varepsilon}(\mathrm{L})-\mathrm{M}(\mathrm{L}-\varepsilon))^2\right]^{\mathrm{q}}=0$$

故相容性条件满足,由 Schauder 估计[8]可得$w_\varepsilon\in C^{2,1}((0,\mathrm{L}]\times[0,\infty))$, 令$\varepsilon\searrow 0$则有$w\in C^{2,1}((0,\mathrm{L}]\times[0,\infty))$。此外,取

$$a^{(2)}(s,w_\varepsilon)=2\beta s^{\beta-1}+s^{\delta\mathrm{q}}(w_\varepsilon-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}+1}$$

$$\begin{aligned}b^{(2)}(s,w_\varepsilon,w_{\varepsilon s})=&\beta(\beta-1)s^{\beta-2}+2\delta\mathrm{q}s^{\delta\mathrm{q}-1}(w_\varepsilon-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}+1}+2(2\mathrm{q}+1)s^{\delta\mathrm{q}}(w_{\varepsilon s}-\mathrm{M})(w_\varepsilon-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}}+\\&(2\mathrm{q}+1)s^{\delta\mathrm{q}}w_{\varepsilon s}(w_\varepsilon-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c^{(2)}(s,w_\varepsilon,w_{\varepsilon s})=&\delta\mathrm{q}(\delta\mathrm{q}-1)w_{\varepsilon s}s^{\delta\mathrm{q}-2}(w_\varepsilon-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}+1}+2(2\mathrm{q}+1)\delta\mathrm{q}s^{\delta\mathrm{q}-1}w_{\varepsilon s}(w_{\varepsilon s}-\mathrm{M})(w_\varepsilon-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}}+\\&2\mathrm{q}(2\mathrm{q}+1)s^{\delta\mathrm{q}}w_{\varepsilon s}(w_{\varepsilon s}-\mathrm{M})^2(w_\varepsilon-\mathrm{M}(s-\varepsilon))^{2\mathrm{q}-1}\end{aligned}$$

则由$w_{0\varepsilon ss}(s)\leqslant 0$, $w_{0\varepsilon ss}(\varepsilon)=0$和$w_{0\varepsilon ss}(\mathrm{L})=0$, 有$w_{\varepsilon ss}$满足方程

$$\begin{cases}w_{\varepsilon sst}(s,t)=s^\beta w_{\varepsilon ssss}+a^{(2)}(s,w_\varepsilon)w_{\varepsilon sss}+b^{(2)}(s,w_\varepsilon,w_{\varepsilon s})w_{\varepsilon ss}+c^{(2)}(s,w_\varepsilon,w_{\varepsilon s}), & s\in(\varepsilon,\mathrm{L}),t>0\\ w_{\varepsilon ss}(\varepsilon,t)=0, w_{\varepsilon ss}(\mathrm{L},t)=0, & t>0\\ w_{\varepsilon ss}(s,0)=w_{0\varepsilon ss}(s)\leqslant 0, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L})\end{cases}$$

定义函数$\theta^{(1)}(s,t)\in W_2^{2,1}((\varepsilon,\mathrm{L})\times(0,\infty))$, 满足方程

$$\begin{cases}\theta_t^{(1)}(s,t)=s^\beta\theta_{ss}^{(1)}+a^{(2)}(s,w_\varepsilon)\theta_s^{(1)}+b^{(2)}(s,w_\varepsilon,w_{\varepsilon s})\theta^{(1)}+c^{(2)}(s,w_\varepsilon,w_{\varepsilon s}), & s\in(\varepsilon,\mathrm{L}),t>0\\ \theta^{(1)}(\varepsilon,t)=w_{\varepsilon ss}(\varepsilon,t)=0, \theta^{(1)}(\mathrm{L},t)=w_{\varepsilon ss}(\mathrm{L},t)=0, & t>0\\ \theta^{(1)}(s,0)=w_{0\varepsilon ss}(s)\leqslant 0, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L})\end{cases} \tag{30}$$

方程(30)存在弱解,通过弱解的极值原理[9]知对于任意的$\mathrm{T}_1<\infty$, 有

$$\theta^{(1)}(s,t)\leqslant \mathrm{C}(\mathrm{T}_1), (s,t)\in(\varepsilon,\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}_1)$$

定义$\theta^{(2)}(s,t):=w_{\varepsilon ss}(s,t)-\theta^{(1)}(s,t)$, 可得

$$\begin{cases}\theta_t^{(2)}(s,t)=s^{\beta}\theta_{ss}^{(2)}+a^{(2)}(s,w_{\varepsilon})\theta_s^{(2)}+b^{(2)}(s,w_{\varepsilon},w_{\varepsilon s})\theta^{(2)}, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L}),t>0\\ \theta^{(2)}(\varepsilon,t)=0,\theta^{(2)}(\mathrm{L},t)=0, & t>0\\ \theta^{(2)}(s,0)=0, & s\in(\varepsilon,\mathrm{L})\end{cases}\tag{31}$$

方程组(31)存在弱解, 从而由极值原理得$w_{\varepsilon ss}=\theta^{(1)},(s,t)\in[\varepsilon,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}_1)$, 其中$\mathrm{T}_1<\infty$是任意的常数。因此, $w_{\varepsilon ss}(s,t)\leqslant\mathrm{C},(s,t)\in(0,\mathrm{L})\times[0,\mathrm{T}_1)$。由$\varepsilon\in(0,\mathrm{L})$的任意性, 让$\varepsilon\searrow 0$则有式(28)。

证毕。

由于只能得到$w_{ss}(s,t)\leqslant\mathrm{C}$, 为了证明$w_s$的有界性, 在下文中构造了函数$f^{(1)}(s,t)$, 如果该函数有界, 则函数$w_s$有界。

引理5 假设$\mathrm{L},\beta\in\mathbf{R}$是正常数, $\theta\in(0,1)$, $\delta,\mathrm{q}\geqslant 0$且$w_0\in C^{2+\theta}([0,\mathrm{L}])$满足式(16)、(26)和(27)。通过引理2和引理3中w的定义, 让w指混合问题(1)的解, 则对于引理3中定义的$\mathrm{T}^*>0$, 可得对于$\forall\mathrm{T}\in(0,\mathrm{T}^*)$, 存在$\mathrm{C}_4=\mathrm{C}_4(\mathrm{T})$使得

$$w_s(s,t)\leqslant\mathrm{C}_4,(s,t)\in(0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}]\tag{32}$$

证明 让$0<\mathrm{T}<\mathrm{T}^*$, 引理3保证了存在$\mathrm{C}_5=\mathrm{C}_5(\mathrm{T})>0$使得

$$w(s,t)\leqslant y(\mathrm{T})\cdot s\leqslant\mathrm{C}_5 s,(s,t)\in(0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T})$$

因此, 对于$t\in(0,\mathrm{T})$, 定义$f^{(1)}(s,t):=w-\mathrm{C}s^2$, 则有

$$\varlimsup_{\substack{s\searrow 0\\ k\to\infty}}\frac{f^{(1)}(s_k+s,t)-f^{(1)}(s_k,t)}{s}\leqslant\varlimsup_{s\searrow 0}\frac{\mathrm{C}_5 s-0}{s}=\mathrm{C}_5$$

其中, s_k是一列接近0的点列。因此, $\liminf\limits_{s\searrow 0}f_s^{(1)}(s,t)\leqslant\mathrm{C}_5$。由引理4知

$$w_{ss}(s,t)\leqslant\mathrm{C},(s,t)\in(0,\mathrm{L})\times[0,\mathrm{T}_1)$$

从而可得, 对于$\forall t\in[0,\mathrm{T})$有$f_{ss}^{(1)}=w_{ss}-2\mathrm{C}<0$, 故$f_s^{(1)}$关于$s$单调递减, 因此

$$f_s^{(1)}=w_s-2\mathrm{C}s\leqslant\mathrm{C}_5,(s,t)\in(0,\mathrm{L})\times[0,\mathrm{T})$$

于是有

$$w_s(s,t)\leqslant\mathrm{C}_4,(s,t)\in(0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T})$$

其中, $\mathrm{C}_4=\mathrm{C}_5+2\mathrm{CL}$。

证毕。

引理6 假设$\mathrm{L},\beta\in\mathbf{R}$是正常数, $\theta\in(0,1)$, $\delta,\mathrm{q}\geqslant 0$且$w_0\in C^{2+\theta}([0,\mathrm{L}])$满足式(16)。若$w_s$在$(0,\mathrm{L})\times[0,\mathrm{T})$中有界, 则

$$w\in C^0([0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T}))\cap C^{2,1}((0,\mathrm{L}]\times(0,\mathrm{T}))$$

是混合问题(1)的唯一解。

证明 由引理2和引理3可知w是混合问题(1)在$[0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T})$中的一个经典解。因为$w_s$在$(0,\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T})$中有界, 即$w_s\in L^{\infty}((0,\mathrm{L})\times(0,\mathrm{T}))$。假设$w_1$也是混合问题(1)的一个解, 通过引理1可得

$$w(s,t)=w_1(s,t),(s,t)\in[0,\mathrm{L}]\times[0,\mathrm{T})$$

证毕。

定理1 假设$\mathrm{L},\beta\in\mathbf{R}$是正常数, $\theta\in(0,1)$, $\delta,\mathrm{q}\geqslant 0$, 且$w_0\in C^{2+\theta}([0,\mathrm{L}])$满足

$$w_0(0)=0,w_0(\mathrm{L})=\mathrm{ML}\text{和}w_{0s}\geqslant 0$$

$$w_{0ss}(s)\leqslant 0,s\in(0,\mathrm{L})$$

$$w_{0ss}(0)=0,w_{0s}(\mathrm{L})=0,w_{0ss}(\mathrm{L})=0$$

则存在$T \in (0, T_{max})$使得(1)存在唯一的局部经典解w, 且

$$w \in C^0([0,L]\times[0,T)) \cap C^{2,1}((0,L]\times(0,T))$$

证明 因为$w_0 \in C^{2+\theta}([0,L])$且满足

$$w_0(0) = 0, w_0(L) = ML和w_{0s} \geqslant 0$$

由引理 2 和引理 3 知在$(s,t) \in [0,L]\times[0,T^*)$中混合问题(1)存在解

$$w \in C^0([0,L]\times[0,T)) \cap C^{2,1}((0,L]\times(0,T))$$

于是, 由

$$w_{0ss}(s) \leqslant 0, s \in (0,L)和w_{0ss}(0) = 0, w_{0s}(L) = 0, w_{0ss}(L) = 0$$

引理 4 和引理 5 证明了$w_s \in L^\infty((0,L)\times(0,T))$。从而引理 6 可证明混合问题(1)存在唯一的局部经典解。

证毕。

4 结 论

本文研究了一类退化的半线性混合问题局部解的存在性和唯一性。首先通过逼近问题、Schauder 不动点定理、内部 Schauder 估计和 Arzelà-Ascoli 定理证明了混合问题存在局部解, 然后通过比较原理证明了混合问题的局部解唯一。

参考文献:

[1] Babuška I. Error-bounds for finite element method[J]. Numerische Mathematik, 1971, 16(4): 322−333.

[2] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers[J]. Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, 1974, 8(R2): 129−151.

[3] Zhigun A. Global entropy solutions to a degenerate parabolic-parabolic chemotaxis system for flux-limited dispersal[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2024, 79: 104132.

[4] Le M. Global existence of solutions to some degenerate chemotaxis systems with superlinear growth in cross-diffusion rates and logistic sources[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2024, 80: 104168.

[5] Flüchter G. Solutions to a chemotaxis system with spatially heterogeneous diffusion sensitivity[J]. Journal of Differential Equations, 2025, 424: 1−29.

[6] Winkler M. How unstable is spatial homogeneity in Keller-Segel systems?A new critical mass phenomenon in two- and higher-dimensional parabolic-elliptic cases[J]. Mathematische Annalen, 2019, 373(3/4): 1237−1282.

[7] Bellomo N, Winkler M. Finite-time blow-up in a degenerate chemotaxis system with flux limitation[J]. Transactions of the American Mathematical Society, Series B, 2017, 4(2): 31−67.

[8] Lieberman G M. Second order parabolic differential equations[M]. Singapore: World Scientific, 1996: 108−357.

[9] 陈亚浙. 二阶抛物型偏微分方程 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2003: 116−127.

作者贡献声明

赵亚双提出研究的问题、设计研究方案、确定理论框架、撰写初稿、修订内容和润色语言。许少鹏提供学术指导、把握研究方向、提出关键修改意见、调整论文逻辑和提供经费支持。

利益冲突声明

作者声明, 其不存在已知的可能影响本论文所报告工作的竞争性经济利益或个人关系。

AI使用声明

本文的英文题名、摘要和关键词均采用DeepSeek翻译生成,并进行了部分修改。

伦理声明

不适用:本研究未涉及人类或动物实验。

电子补充材料

补充材料可在本文的在线版本中获取 https://doi.org/10.65658/j.hndk.2026011801。

数据可用性

不适用。

致谢/Acknowledgements

本文得到海南省自然科学基金(125RC625)支持。

This paper is supported by Hainan Provincial Natural Science Foundation of China (125RC625).

作者简介

赵亚双(1999—),女,四川南充人,海南大学2023级数学专业硕士研究生。E-mail: zhao.yass@foxmail.com。

许少鹏(1984—),男,湖南湘潭人,海南大学数学与统计学院讲师,博士,研究方向:偏微分方程及其应用。E-mail: xuxsp@126.com。

(责任编辑:高　喆,英文校对:马　力)

This is an open access article under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0, https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

© The Author(s) 2026. Published by Journal Editorial Department of Hainan University.