doi：10. 12068/j. issn. 1005－3026. 2026. 20269016

耗散非双曲型混沌系统的发展
——从洛伦茨系统谈起

陈关荣
（香港城市大学 电机工程系，香港 999077）

摘 要：本文从经典的洛伦茨（Lorenz）系统出发，综合介绍了一批由简单的三维、一阶、低次（主要是二次或三次）光滑多项式常微分方程组描述的耗散混沌系统. 这些系统或者没有平衡点，或者仅具有稳定的平衡点，或者有无穷多个平衡点，因而是非双曲型的. 这些新发现的系统对混沌理论研究提出了新的理论挑战和新的研究课题. 经典的双曲型混沌系统在相空间中具有鞍型平衡点，对应着稳定和不稳定流形，其吸引和排斥的动力学特性引导系统的解轨道作拉伸、压缩和折叠，最终生成复杂的混沌行为. 这类系统具有有限多个平衡点，可以在其上作局部线性化，计算和分析相应的雅可比矩阵特征根，从而得到一系列完全的理论结果和计算方法. 但是非双曲型系统可能没有平衡点或者具有无限多个平衡点，使得经典的分岔分析无法进行，因而亟须发展一套新的理论和方法. 本文列举了一些代表性的例子，进而指出了发展非双曲型混沌理论研究的迫切需求.

关 键 词：混沌；平衡点；洛伦茨系统；三维一阶光滑多项式系统；非双曲型混沌系统
中图分类号：TP 13 **文献标志码**：A **文章编号**：1005-3026（2026）07-0001-08

Development of Dissipative Nonhyperbolic Chaotic Systems: Starting from Lorenz System

CHEN Guan-rong
（Department of Electrical Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong 999077, China. Corresponding author: CHEN Guan-rong, E-mail: eegchen@cityu.edu.hk）

Abstract: This paper begins with the classic Lorenz system, collectively introducing a group of simple three-dimensional, first-order, lower-degree (mainly, quadratic or cubic) smooth polynomial ordinary differential equations describing dissipative chaotic systems. These systems may have no equilibrium points, only stable equilibrium points, or infinitely many equilibrium points, therefore are nonhyperbolic. These recent discoveries present new challenges and research topics for the study of advanced chaos theory. Classical hyperbolic chaotic systems possess saddle-node equilibrium points in the phase space, corresponding to stable and unstable manifolds. Their attractive and repulsive dynamics guide the system's solution trajectories through stretching, compression and folding, ultimately generating complex chaotic behavior. These systems have a finite number of equilibrium points, allowing for local linearization and the computation and analysis of the corresponding Jacobian matrix eigenvalues, leading to a complete set of theoretical results and computational methods. However, nonhyperbolic systems may have no equilibrium points or have an infinite number of equilibrium points, rendering classical bifurcation analysis impossible. Therefore, new theory and methodology are urgently needed. This paper presents some representative examples, highlighting the pressing need for new research into nonhyperbolic chaos theory.

收稿日期：2026-05-05
作者简介：陈关荣（1948—），男，广东广州人，香港城市大学讲座教授，欧洲科学院院士，世界科学院院士，IEEE Life Fellow.
通信作者：陈关荣，E-mail：eegchen@cityu.edu.hk.

Key words: chaos; equilibrium point; Lorenz system; three-dimensional first-order smooth polynomial system; nonhyperbolic chaotic system

经典的洛伦茨混沌系统由三维一阶二次光滑多项式常微分方程组描述,其主要特征是它的平衡点是鞍点型的,即其上的雅可比矩阵特征根同时具有负实部和正实部,分别对应着相空间中的稳定流形和不稳定流形,因而被分类为双曲型动力系统.洛伦茨系统是耗散系统,其产生混沌的机制是稳定流形和不稳定流形在相空间中的复杂缠绕,约束了它的解轨线的运动行为,在演化过程中既不收敛,也不发散,又非周期,进而呈现各种混沌状态.

耗散双曲型混沌系统的研究从洛伦茨系统的发现以来经历了半个多世纪的发展,理论日臻完善,分析技术和仿真手段也渐趋成熟.但是,近年来越来越多的耗散非双曲型混沌系统的发现向传统的混沌理论和分析方法提出了巨大的挑战.例如,它们可能没有平衡点,因此谈不上雅可比矩阵特征根,不存在相应的稳定流形和不稳定流形,令分岔分析无从入手;或者它们的平衡点是稳定的,似乎不可能产生解轨线折叠的复杂运动行为;甚至可能有无穷多个平衡点.然而,这些系统确实是混沌的,可以通过所有已知的检测标准来验证,如全局有界且具有正的最大李雅普诺夫指数,具有正熵、分数维数、连续功率谱等,并且可以产生混沌吸引子.本文综合介绍近年来陆续发现的一批简单的三维、一阶、低次(主要是二次或三次)光滑多项式常微分方程组描述的耗散非双曲型混沌系统,旨在为进一步发展耗散非双曲型混沌系统的基本理论研究作一个简单的导引.

1 非双曲型混沌系统

洛伦茨系统由下面的三维一阶二次多项式常微分方程组描述[1]:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=a(y-x),\\ \dot{y}&=cx-xz-y,\\ \dot{z}&=xy-bz.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中,x,y,z为系统变量,是时间的函数.当常数系数$a=10,b=\dfrac{8}{3},c=28$时,系统是混沌的,具有1个两涡卷的吸引子,如图1所示.

洛伦茨系统有3个平衡点:(0, 0, 0),$\left(6\sqrt{2},6\sqrt{2},27\right),\left(-6\sqrt{2},-6\sqrt{2},27\right)$,其中原点是鞍点、另外2个是鞍焦点,系统的雅可比矩阵特征根为$(0.39,-6.33\pm10.6\,\mathrm{i})$,因此是双曲型的,即同时具有正实部和负实部的特征根,分别对应着相空间中的稳定流形和不稳定流形.其他不具有这类特征根情形的混沌系统称为非双曲型的.

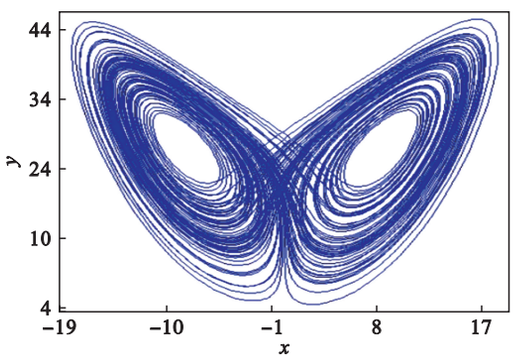


图1 洛伦茨系统混沌吸引子(本文自绘)

Fig. 1 Chaotic attractor of Lorenz system (drawn by authors)

众所周知,相空间中稳定流形和不稳定流形的复杂纠缠是导致混沌的基本途径.图2是洛伦茨混沌系统的稳定流形和不稳定流形数值仿真示意图[2].

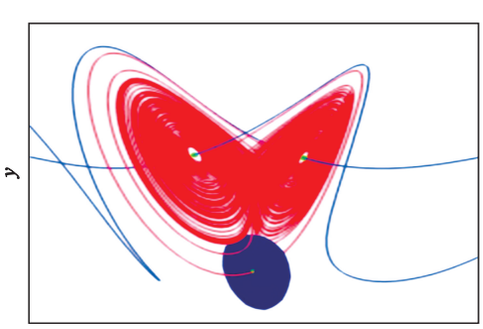


图2 洛伦茨混沌系统的稳定流形(红色)和不稳定流形(蓝色)(取自文献[2])

Fig. 2 Stable manifold (red) and unstable manifold (blue) of Lorenz chaotic system (from reference [2])

下面,本文讨论各种三维一阶二次或三次光滑多项式混沌系统,从没有平衡点的例子讲起,到具有1个、2个、3个等,再到具有无穷多个平衡点的例子,大部分是新近发现的非双曲型混沌系统.

1.1 没有平衡点的混沌系统

本节主要介绍没有平衡点的混沌系统[3]:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=z,\\ \dot{z}&=-y+3y^2-x^2-xz-a.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中系数$a>0$,因此系统没有平衡点.但是,此系统是混沌的,存在1个混沌吸引子,如图3所示.

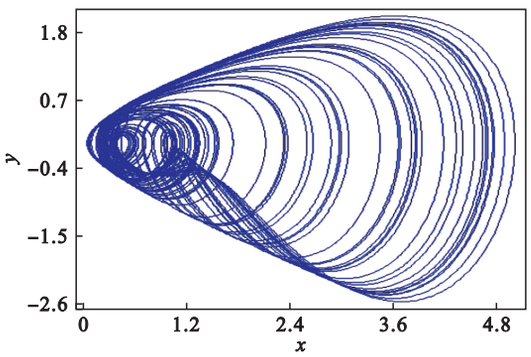


图3　没有平衡点混沌系统的吸引子,a=0.01(取自文献[3])

Fig. 3　Attractor of chaotic system without equilibrium points,a=0.01(from reference [3])

更多的例子可以从文献[4]中找到,如表1所示.此外,还有几个类似且没有永恒点(perpetual point)的例子可以从文献[5]中找到.

表1　没有平衡点的混沌系统例子(取自文献[4])

Table 1　Examples of chaotic systems without equilibrium points(from reference[4])

公式	a
$\dot{x}=y$ $\dot{y}=-x-zy$ $\dot{z}=y^2-a$	1.0
$\dot{x}=-y$ $\dot{y}=x+z$ $\dot{z}=2y^2+xz-a$	0.35
$\dot{x}=y$ $\dot{y}=z$ $\dot{z}=-y+0.1x^2+1.1xz+a$	1.0
$\dot{x}=-0.1y+a$ $\dot{y}=x+z$ $\dot{z}=xz-3y$	1.0
$\dot{x}=2y$ $\dot{y}=-2x-z$ $\dot{z}=-y^2+z^2+a$	2.0
$\dot{x}=y$ $\dot{y}=z$ $\dot{z}=-y-xz-yz-a$	0.75
$\dot{x}=y$ $\dot{y}=-x+z$ $\dot{z}=-0.8x^2+z^2+a$	2.0
$\dot{x}=y$ $\dot{y}=-x-yz$ $\dot{z}=xy+0.5x^2-a$	1.3
$\dot{x}=y$ $\dot{y}=-x-yz$ $\dot{z}=-xz+7x^2-a$	0.55
$\dot{x}=z$ $\dot{y}=z-y$ $\dot{z}=-0.9y-xy+xz+a$	0.6

续表1

公式	a
$\dot{x}=y$ $\dot{y}=-x+z$ $\dot{z}=z-2xy-1.8xz-a$	1.0
$\dot{x}=z$ $\dot{y}=x-y$ $\dot{z}=-4x^2+8xy+yz+a$	0.1
$\dot{x}=-y$ $\dot{y}=x+z$ $\dot{z}=xy+xz+0.2yz-a$	0.4
$\dot{x}=y$ $\dot{y}=z$ $\dot{z}=x^2-y^2+2xz+yz+a$	1.0
$\dot{x}=y$ $\dot{y}=z$ $\dot{z}=x^2-y^2+xy+0.4xz+a$	1.0
$\dot{x}=-0.8x-0.5y^2+xz+a$ $\dot{y}=-0.8y-0.5z^2+yx+a$ $\dot{z}=-0.8z-0.5x^2+zy+a$	1.0
$\dot{x}=-y-z^2+2.3xy+a$ $\dot{y}=-z-x^2+2.3yz+a$ $\dot{z}=-x-y^2+2.3zx+a$	2.0

1.2　1个平衡点的混沌系统

本节介绍只有1个平衡点的混沌系统,并且该平衡点是稳定的[6]:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=yz+a,\\ \dot{y}&=x^2-y,\\ \dot{z}&=1-4x.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

此系统具有唯一的平衡点$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16},-16a\right)$,当系数$a>0$时该平衡点是稳定的,因为其雅可比矩阵特征根具有负实部.例如,当$a=0.05$时,平衡点处雅可比矩阵的特征根为(−0.607 46, −0.196 27±0.610 76i).在这种稳定条件下,系统却可以生成1个混沌吸引子,如图4所示.

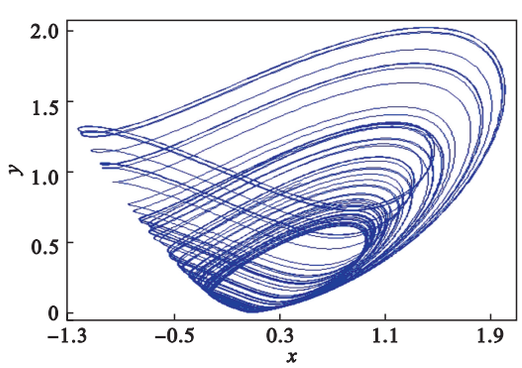


图4　具有1个稳定平衡点混沌系统的吸引子,$a=0.006$(取自文献[6])

Fig. 4　Attractor of chaotic system with one stable equilibrium point,$a=0.006$(from reference[6])

更多的例子可以从文献[7]中找到,如表2所示.

表2 具有1个稳定平衡点的混沌系统例子(取自文献[7])

Table 2 Examples of chaotic systems with one stable equilibrium point(from reference[7])

公式	平衡点	特征值
$\dot{x}=y$	0	−1. 954 8
$\dot{y}=z$	0	−0. 022 6
$\dot{z}=-x-0.6y-2z+z^2-0.4xy$	0	±0. 714 9i
$\dot{x}=y$	0	−0. 510 3
$\dot{y}=z$	0	−0. 019 8
$\dot{z}=-0.5x-y-0.55z-1.2z^2-xz-yz$	0	±0. 989 6i
$\dot{x}=y$	0	−3. 964 1
$\dot{y}=z$	0	−0. 017 9
$\dot{z}=-3.4x-y-4z+y^2+xy$	0	±0. 925 9i
$\dot{x}=y$	−1	−1. 694 2
$\dot{y}=z$	0	−0. 002 9
$\dot{z}=-x-1.7z+y^2+0.6xy-1$	0	±0. 768 3i
$\dot{x}=y$	−2. 7	−0. 960 0
$\dot{y}=z$	0	−0. 020 0
$\dot{z}=-x-z-z^2+0.4xy-2.7$	0	±1. 020 4i
$\dot{x}=y$	−1	−1. 052 6
$\dot{y}=z$	0	−0. 023 7
$\dot{z}=-x-2.9z^2+xy+1.1xz-1$	0	±0. 974 4i
$\dot{x}=y$	0	−2. 000 0
$\dot{y}=-x+yz$	0	−0. 250 0
$\dot{z}=-2z-8xy+xz-1$	−0. 5	±0. 968 2i
$\dot{x}=y$	0	−1. 000 0
$\dot{y}=-x+yz$	0	−0. 050 0
$\dot{z}=-z-0.7x^2+y^2-0.1$	−0. 1	±0. 998 7i
$\dot{x}=y$	0	−2. 000 0
$\dot{y}=-x+yz$	0	−0. 075 0
$\dot{z}=2x-2z+y^2-0.3$	−0. 15	±0. 997 2i
$\dot{x}=y$	0	−2. 000 0
$\dot{y}=-x+yz$	0	−0. 025 0
$\dot{z}=x-0.3y-2z+xz-0.1$	−0. 05	±0. 999 7i
$\dot{x}=y$	0	−12. 000 0
$\dot{y}=-x+yz$	0	−0. 041 7
$\dot{z}=-y-12z+x^2+9xz-1$	−1/12	±0. 999 1i
$\dot{x}=y$	0	−66. 000 0
$\dot{y}=-x+yz$	0	−0. 007 6
$\dot{z}=-66z+y^2+35xz-1$	−1/66	±1. 000 0i
$\dot{x}=y$	0	−4. 900 0
$\dot{y}=-x+yz$	0	−0. 102 0
$\dot{z}=-4.9z+0.4y^2+xy-1$	−1/4. 9	±0. 994 8i
$\dot{x}=z$	0	−0. 608 2
$\dot{y}=x+z$	−0. 7	−0. 045 9
$\dot{z}=-y-3z^2+xy+yz-0.7$	0	±1. 281 4i
$\dot{x}=-z$	0	−1. 061 8
$\dot{y}=x-z$	−10/9	−0. 024 7
$\dot{z}=0.9y+0.2x^2+xz+yz+1$	0	±0. 920 3i

续表2

公式	平衡点	特征值
$\dot{x}=-z$	0	−1. 054 9
$\dot{y}=-x+z$	0	−0. 172 6
$\dot{z}=-7y-1.4z+x^2+xz-yz$	0	±2. 570 2i
$\dot{x}=z$	0. 57/3. 1	−1. 000 0
$\dot{y}=x-y$	0. 57/3. 1	−0. 009 2
$\dot{z}=-3.1x-0.3xz+0.2yz+0.57$	0	±1. 760 7i
$\dot{x}=z$	0	−1. 000 0
$\dot{y}=-y+z$	0	−0. 050 0
$\dot{z}=-2.1x-0.1z-y^2+0.11xz+0.5yz$	0	±1. 448 3i
$\dot{x}=z$	−0. 3	−1. 376 6
$\dot{y}=-y+z$	0	−0. 066 7
$\dot{z}=-x-2xy+1.7xz-0.3$	0	±0. 849 7i
$\dot{x}=z$	0	−0. 854 3
$\dot{y}=-y-z$	0	−0. 072 8
$\dot{z}=-11x+2y-2y^2-z^2-yz$	0	±3. 587 5i
$\dot{x}=z$	0	−0. 887 5
$\dot{y}=-y-z$	0	−0. 056 3
$\dot{z}=-7.1x+y-2y^2+xz-yz$	0	±2. 827 9i
$\dot{x}=z$	−0. 15	−1. 000 0
$\dot{y}=-y-z$	0	−0. 075 0
$\dot{z}=-6x-2y^2+xz-yz-0.9$	0	±2. 448 3i
$\dot{x}=-z$	0. 5	−0. 906 0
$\dot{y}=-y-z$	0	−0. 047 0
$\dot{z}=4x-0.2z^2+xy-2$	0	±2. 100 6i

1.3　2个平衡点的混沌系统

本节介绍具有2个平衡点的混沌系统,广为人知的是罗斯勒(Rőssler)系统:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-y-z,\\ \dot{y}&=x+ay,\\ \dot{z}&=b+z(x-c).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

当系数$a=b=0.2, c=5.7$时,系统是混沌的,具有1个单涡卷的吸引子,如图5所示.容易检验,罗斯勒系统是双曲型的.

具有2个稳定平衡点的混沌系统[8]如式(5)所示:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=a(y-x),\\ \dot{y}&=-xz-cy,\\ \dot{z}&=-b+xy.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

此系统具有2个平衡点$\left(\sqrt{b}, \sqrt{b}, -c\right)$和$\left(-\sqrt{b}, -\sqrt{b}, -c\right)$,并且当$a=10, b=100, c=11.2$时,它有1个混沌吸引子如图6所示,此时2个平衡点处雅可比矩阵的特征根为(−20.977 8, −0.111 1±9.763 5i),因而都是稳定的.

1.4　3个平衡点的混沌系统

本节考虑具有3个平衡点的混沌系统.最熟悉的当属洛伦茨系统,如前所述它是双曲型的.

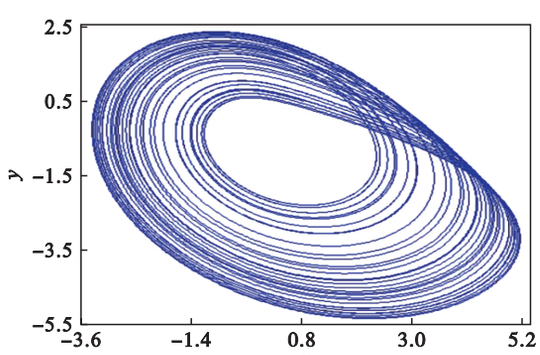


图5　罗斯勒系统的混沌吸引子(本文自绘)

Fig. 5　Chaotic attractor of Rössler system (drawn by authors)

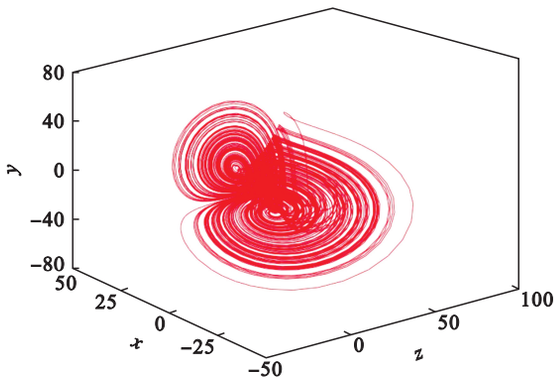


图6 具有2个稳定平衡点混沌系统的吸引子(取自文献[8])

Fig. 6 Attractor of chaotic system with two stable equilibrium points(from reference[8])

具有3个平衡点的混沌系统,其中1个是鞍点,另外2个是稳定的平衡点[9]:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=a\left(y-x\right),\\ \dot{y}&=cx-xz,\\ \dot{z}&=-bz+xy.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

当$a=b=35, c=3$时,系统存在1个混沌吸引子,如图7所示.

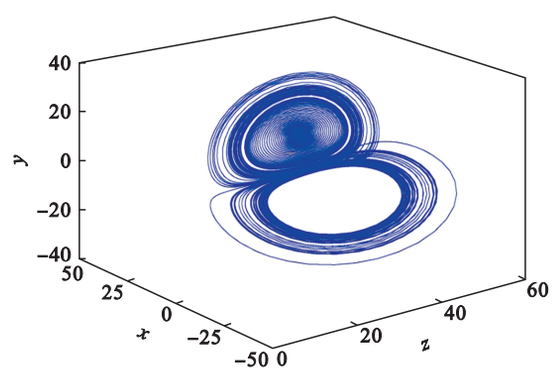


图7 具有1个鞍点和2个稳定平衡点混沌系统的吸引子(取自文献[9])

Fig. 7 Attractor of chaotic system with one saddle point and two stable equilibrium points (from reference [9])

理论上,可以按意愿构造出三维一阶的混沌系统(不一定是多项式系统),使其具有任意指定有限个数的平衡点(平衡点的稳定性是任意的)[3,10].

1.5 无穷多个平衡点的混沌系统

本节介绍具有无穷多个平衡点的三维一阶二次或三次多项式混沌系统.

这种类型的混沌系统的无穷多个平衡点可以落在三维相空间中的1条曲线上[11]:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-x+xz,\\ \dot{z}&=-x-axy-bxz.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

它的整条z轴都是平衡点.该系统具有1个混沌吸引子,如图8所示.

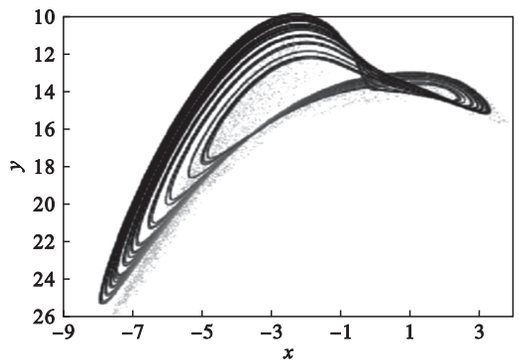


图8 具有1条曲线平衡点混沌系统的吸引子,a=1.62,b=0.2(取自文献[11])

Fig. 8 Attractor of chaotic system with one curve equilibrium point,a=1.62,b=0.2 (from reference[11])

事实上,这种具有落在1条曲线上的无穷多个平衡点的混沌系统还有很多,如表3所列[11].

表3 具有落在1条曲线上的无穷多个平衡点的混沌系统(取自文献[11])

Table 3 Chaotic systems with infinitely many equilibrium points falling on one curve(from reference[11])

公式	a,b	平衡点
$\dot{x}=y$	a=15	0
$\dot{y}=-x+yz$	b=1	0
$\dot{z}=-x-axy-bxz$		z
$\dot{x}=y$	a=17	0
$\dot{y}=-x+yz$	b=1	0
$\dot{z}=-y-axy-bxz$		z
$\dot{x}=y$	a=18	0
$\dot{y}=-x+yz$	b=1	0
$\dot{z}=x^2-axy-bxz$		z
$\dot{x}=y$	a=4	0
$\dot{y}=-x+yz$	b=0. 6	0
$\dot{z}=-axy-bxy-yz$		z
$\dot{x}=y$	a=1. 5	0
$\dot{y}=-ax+yz$	b=5	0
$\dot{z}=-x^2-y^2-bxz$		z
$\dot{x}=y$	a=0. 04	0
$\dot{y}=-x+yz$	b=0. 1	0
$\dot{z}=-ay^2-xy-bxz$		z
$\dot{x}=z$	a=1. 85	0
$\dot{y}=x+yz$	b=0. 3	y
$\dot{z}=-ax^2-xy-byz$		0
$\dot{x}=z$	a=3	0
$\dot{y}=-x-yz$	b=1	y
$\dot{z}=ax^2-xy-bxz$		0
$\dot{x}=z$	a=1. 62	x
$\dot{y}=-ay+xz$	b=0. 2	0
$\dot{z}=z-bz^2+xy$		0

这种类型的混沌系统的无穷多个平衡点甚至可以落在三维相空间中的1个曲面上[12]:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=xy,\\ \dot{y}&=xz,\\ \dot{z}&=x\left(-x+ay^2-xz\right).\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

这个混沌系统的平衡点是整个(y,z)平面,它有1个吸引子,如图9所示.

类似地,这种具有落在1个曲面上的无穷多个平衡点的混沌系统还有很多,如表4所列[12].

上述所论及的非双曲型混沌系统的具体分析和研究总结在文献[13]中.

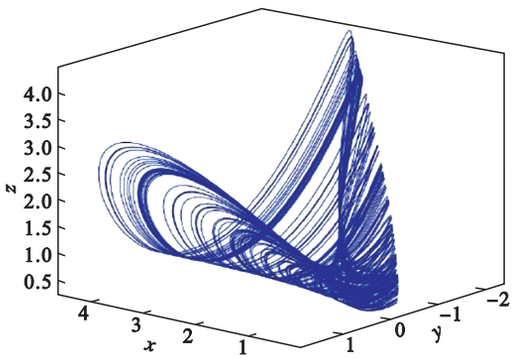


图9　具有1个曲面平衡点混沌系统的吸引子,a=2(取自文献[12])

Fig. 9　Attractor of chaotic system with one surface equilibrium point,a=2(from reference[12])

表4　具有落在1个曲面上的无穷多个平衡点的混沌系统(取自文献[12])

Table 4　Chaotic systems with infinitely many equilibrium points falling on one surface (from reference[12])

公式	a,b,c	平衡点
$\dot{x}=f\times y$	a=1. 54	$(0,y,z)$
$\dot{y}=f\times z$		
$\dot{z}=f\times(-x+ay^2-xz)$		
$f=x$		
$\dot{x}=f\times y$	a=1	$(0,y,z)$
$\dot{y}=f\times(-x+az)$	b=3	
$\dot{z}=f\times(by^2-xz)$		
$f=x$		
$\dot{x}=f\times(y^2+axy)$	a=2	$(0,y,z)$
$\dot{y}=f\times(-z)$	b=1	$\left(\sqrt{\frac{b}{a}},-\sqrt{ab},0\right)$
$\dot{z}=f\times(b+xy)$		$\left(-\sqrt{\frac{b}{a}},\sqrt{ab},0\right)$
$f=x$		
$\dot{x}=f\times(-y)$	a=2	$(x,y,0)$
$\dot{y}=f\times(x+z)$	b=0. 35	
$\dot{z}=f\times(ay^2+xz-b)$		
$f=z$		
$\dot{x}=f\times(-az)$	a=0. 4	$(0,y,z)$
$\dot{y}=f\times(b+z^2-xy)$	b=1	$(x,0,z)$
$\dot{z}=f\times(x^2-xy)$		$\left(\sqrt{b},\sqrt{b},0\right)$
$f=xy$		$\left(-\sqrt{b},-\sqrt{b},0\right)$
$\dot{x}=f\times(y+ayz)$	a=2	$(0,y,z)$
$\dot{y}=f\times(bz+y^2+cz^2)$	b=8	$(x,0,z)$
$\dot{z}=f\times(x^2-y^2)$	c=7	$(x,y,0)$
$f=xyz$		(±1. 5, 1. 5, −0. 5)
		(±1. 5, −1. 5, −0. 5)
$\dot{x}=f\times(ay)$	a=0. 4	$x^2+y^2+z^2=1$
$\dot{y}=f\times(xz)$	b=6	(0, 0, 0)
$\dot{z}=f\times(-z-x^2-byz)$		
$f=1-x^2-y^2-z^2$		
$\dot{x}=f\times(az+y^2)$	a=1	$x^2+y^2+z^2=1$
$\dot{y}=f\times(-y+bx^2)$	b=5	(0, 0, 0)
$\dot{z}=f\times(-xy)$		
$f=1-x^2-y^2-z^2$		

续表 4

公式	a,b,c	平衡点
$\dot{x}=f\times(y^2-axy)$	a=5	$x^2+y^2=1$
$\dot{y}=f\times(xz)$	b=7	(−0. 075 6, −0. 378 1, 0)
$\dot{z}=f\times(1-by^2)$		(0. 075 6, 0. 378 1, 0)
$f=1-x^2-y^2$		
$\dot{x}=f\times(a-z^2)$	a=0. 1	$y^2-x^2=1$
$\dot{y}=f\times(xz)$	b=1	(0, 0, −0. 316 2)
$\dot{z}=f\times(y+bxz)$		(0, 0, 0. 316 2)
$f=1+x^2-y^2$		
$\dot{x}=f\times(yz)$	a=1	$x^2+y^2=-z$
$\dot{y}=f\times(x-axz)$	b=0. 6	$(0,y,0)$
$\dot{z}=f\times(x-bz^2)$		(0. 6, 0. 1)
$f=z+x^2+y^2$		
$\dot{x}=f\times(yz)$	a=0. 1	$y^2-x^2=z$
$\dot{y}=f\times(-ax)$	b=6	(0, 0, 0)
$\dot{z}=f\times(-z+by^2+xz)$		
$f=z+x^2-y^2$		

2 结　　语

本文综合介绍了近年来陆续发现的一批简单三维、一阶、低次(主要是二次或三次)光滑多项式常微分方程组描述的耗散非双曲型混沌系统.这些混沌系统都可以通过所有已知的检测标准来验证,如全局有界且具有正的最大李雅普诺夫指数,具有正熵、分数维数、连续功率谱等,并且它们都可以产生混沌吸引子.由于它们可能没有平衡点,故此谈不上雅可比矩阵特征根,因而不存在相应的稳定流形和不稳定流形,另外也作不了分岔分析;或者它们的平衡点是稳定的,直观上应该是全局收敛的,不可能产生解轨线折叠的复杂运动行为;或者它们具有无穷多个平衡点.但是,它们确实是经典意义下的混沌系统.这些新发现给传统耗散动力系统的混沌理论和分析带来了巨大的挑战.本文期望能以这些简单例子引起读者的兴趣和关注,共同为发展耗散非双曲型混沌系统的基本理论研究作出新的努力和贡献.

参考文献:

[1] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, 20(2): 130−141.

[2] Krauskopf B, Osinga H M, Doedel E J, et al. A survey of methods for computing (un)stable manifolds of vector fields [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, 15(3): 763−791.

[3] Wang X, Chen G R. Constructing a chaotic system with any number of equilibria[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 71(3): 429−436.

[4] Jafari S, Sprott J C, Hashemi Golpayegani S M R. Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria[J]. *Physics Letters A*, 2013, 377(9): 699−702.

[5] Jafari S, Soheylifar A, Bayani A, et al. Hidden attractor in a dynamical system without fixed point and perpetual points [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2026, 36(9): 2630021.

[6] Wang X, Chen G R. A chaotic system with only one stable equilibrium[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(3): 1264−1272.

[7] Molaie M, Jafari S, Sprott J C, et al. Simple chaotic flows with one stable equilibrium [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, 23(11): 1350188.

[8] Yang Q G, Wei Z C, Chen G R. An unusual 3D autonomous quadratic chaotic system with two stable node-foci[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, 20(4): 1061−1083.

[9] Yang Q G, Chen G R. A chaotic system with one saddle and two stable node-foci [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, 18(5): 1393−1414.

[10] Wang X, Chen G R. A gallery of Lorenz-like and Chen-like attractors [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, 23(4): 1330011.

[11] Jafari S, Sprott J C. Simple chaotic flows with a line equilibrium[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2013, 57: 79−84.

[12] Jafari S, Sprott J C, Pham V T, et al. Simple chaotic 3D flows with surfaces of equilibria[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(2): 1349−1358.

[13] Wang X, Kuznetsov N V, Chen G R. Chaotic systems with multistability and hidden attractors[M]. Berlin: Springer, 2021.