

有限厚度弹性地基支撑梁的屈曲

淡志良, 张亮, 吴剑

(重庆大学航空航天学院, 400044 重庆)

摘 要: 柔性基底支撑平板常见于自然界或工程中, 如皮肤、沥青道路等, 屈曲是其常见的失效形式之一。地基的侧向支撑作用有助于提高平板的稳定性, 当地基厚度相对屈曲波长较厚时, 现有的弹性模型无法准确揭示地基的厚度效应, 临界屈曲应变的解析解还未给出。为此, 本研究针对基底支撑平薄板, 基于线弹性理论, 提出了有限厚度弹性地基模型, 研究了地基支撑无限长梁的屈曲。探讨了地基在刚性基底上黏结与滑动两种情况, 得出了临界屈曲应变及临界屈曲波长与地基的杨氏模量、泊松比、厚度间的简洁显式关系, 分析了地基厚度对临界屈曲波长及临界屈曲应变的影响。开展有限元分析验证此模型, 结果显示相对已有的解析模型, 本模型预测结果与有限元结果吻合得更好, 当地基厚度大于 $1/\pi$ 屈曲波长时, 其相对误差小于 10%。

关键词: 弹性地基; 有限厚度; 屈曲; 屈曲应变; 有限元

中图分类号: O343 **文献标志码:** A **DOI:** 10.11776/j.issn.1000-4939.2026.01.009

文章编号: 1000-4939(2026)01-0102-08 **CSTR:** 32414.14.cjam.issn.1000-4939.2026.01.009

Buckling of a beam supported by elastic foundation of finite thickness

DAN Zhiliang, ZHANG Liang, WU Jian

(College of Aerospace Engineering, Chongqing University, 400044 Chongqing, China)

Abstract: Flat plates supported by flexible substrate are commonly found in nature or in engineering, such as skin and asphalt roads, and buckling is one of their common forms of failure. The lateral support effect of the foundation helps to improve the stability of the flat plates. When the foundation is thick compared to the buckling wavelength, the existing elastic model cannot accurately reveal the thickness effect of the foundation, and the analytical solution of the critical buckling strain is not yet given. Therefore, in this paper, a finite-thickness elastic foundation model is proposed for a flat and thin plate supported by the foundation, and the buckling of a beam with infinite length is studied using the theory of linear elasticity. Two cases of bonded and sliding of the foundation on the rigid substrate are explored, and the concise explicit relationships of the critical buckling strain and critical buckling wavelength with Young's modulus, Poisson's ratio and thickness of the foundation are derived, and the influence of the foundation thickness on the critical buckling wavelength and critical buckling strain is analyzed. The finite element analysis is carried out to verify the model, and the prediction results show that the results of the model are in better a-

收稿日期: 2024-03-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 12272068); 重庆市自然科学基金资助项目 (No. CSTB2022NSCQ-MSX0364)

通信作者: 吴剑, 副教授. E-mail: jwu@cqu.edu.cn

引用格式: 淡志良, 张亮, 吴剑. 有限厚度弹性地基支撑梁的屈曲[J]. 应用力学学报, 2026, 43(1): 102-109.

DAN Zhiliang, ZHANG Liang, WU Jian. Buckling of a beam supported by elastic foundation of finite thickness[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2026, 43(1): 102-109.

greement with the finite element results than the existing analytical model, and the relative error between the model and the finite element is less than 10% when the foundation thickness is greater than $1/\pi$ of the buckling wavelength, and the model can reveal the supporting effect of elastic foundation more accurately.

Key words: elastic foundation; finite thickness; buckling; buckling strain; finite element

弹性地基模型用于描述地基表面受力与变形间的关系。由线性弹簧描述的 Winkler 模型^[1]逐渐发展为双参数模型^[2-3]、三参数模型^[4-5]及半空间弹性地基模型等。由于模型的简洁性,这些弹性地基模型在各种弹性问题中得到广泛应用。文献[6]研究了结合在弹性地基上的薄板屈曲,文献[7]基于 KERR 地基模型研究了结合到薄弹性层上的梁的屈曲。然而在这两项研究中,前者不适用于地基厚度相对较大的情况;而后者仅提供了临界屈曲应变和地基厚度之间的隐式关系。

在机械、土木、航空航天、材料、生物等工程领域中的很多材料,如聚合物、玻璃纤维、生物材料中的皮肤、肌肉组织等,其压缩强度相对其杨氏模量很高,故失稳是其组成结构失效的主要原因。由此将其简化为黏结在弹性地基上的梁的屈曲成为研究热点。大量学者^[8-12]对此类问题进行了研究。例如,文献[13]研究了土壤上支撑梁的屈曲稳定性;文献[14-15]研究了弹性地基上功能梯度梁的屈曲力;文献[16]分析了基底上弹性薄膜的起皱和屈曲脱层;文献[17]研究了弹性地基夹层梁的热过屈曲;文献[18-19]研究了热应力对 Winkler 地基上板的屈曲;文献[20-21]研究了半空间弹性地基的梁屈曲。显然,弹性地基提供的侧向力增加了梁的稳定性,其支撑效果取决于弹性地基的力学性能与厚度。若将地基用线弹性模型描述,将面临求解困难的挑战。弹性地基模型是针对线弹性模型做出简化,而合理简化的弹性地基模型是支撑梁屈曲精确分析的重要保障。已有的弹性地基模型,如 Winkler 地基模型未考虑地基的泊松比效应,且无法应用于较厚的弹性地基;半空间弹性地基模型则无法描述地基的厚度效应;多参数地基模型则由于其复杂性面临参数确定困难等挑战。

本研究提出了有限厚度弹性地基模型,该模型可以较为准确地揭示弹性地基的支撑作用,依据此模型可得出临界屈曲应变、屈曲波长、弹性地基的杨氏模量、泊松比及厚度间的简洁显式关系,为工程中的支撑梁屈曲问题分析提供理论基础。

1 解析模型

一无限宽薄平板完美黏结在厚度为 h 的弹性地基上表面,如图 1 所示。梁和地基接触界面不发生分离和滑动情况,并且本研究对象为宏观工程中的梁,故表面能可忽略。板的两端承受温度或机械载荷引发的轴向压缩力 N (每单位宽度)。二维模型中,上方无限宽薄平板可视为细长梁,可用 Euler-Bernoulli 梁模拟,而下方弹性地基遵从线弹性平面应变本构关系。 x 轴与 y 轴的原点设置在弹性地基上表面,即弹性地基上表面的初始坐标为 $y=0$ 。梁的弯曲刚度可以表示为 $D=E_b h_b^3/[12(1-\nu_b^2)]$,其中 E_b 是梁的杨氏模量, ν_b 是梁的泊松比, h_b 是梁的厚度。弹性地基的杨氏模量为 E ,泊松比为 ν 。弹性地基下表面在刚性基底上黏结或滑动。假设屈曲后梁的形状遵从三角函数形式,即

$$u_y = V_0 \sin(mx) \quad (1)$$

其中: u_y 是梁的垂直位移; V_0 是定义屈曲形状幅值大小的实常数; m 是与屈曲波长 λ 相关的正实常数,即 $\lambda = 2\pi/m$ 。根据材料力学假设,只考虑梁的垂直位移,而梁的轴向位移被忽略。

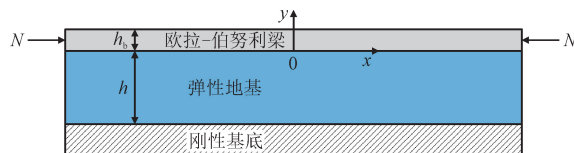


图1 弹性地基上黏结梁的平面几何模型

Fig. 1 Planar geometric model of bonded beam on elastic foundation

1.1 弹性地基模型的建立

根据式(1)所定义的梁屈曲形状,假设弹性地基区域内的应力函数为

$$\Phi = \sin(mx)f(y) \quad (2)$$

其中, $f(y)$ 为关于 y 的实值函数。当弹性地基在刚性基底上黏结时,在弹性地基下表面 $y=-h$ 处,边界条件为 $u_x = u_y = 0$,结合式(2),并考虑 $hm \gg 1$,可得地基上表面应力-位移关系梁的垂直位移(具体推导过程见附录 A)。

$$u_y = \frac{\sigma_y}{Em} \left[\frac{(3-\nu)(1+\nu)}{2} - \frac{2(1+\nu)^3 h^2 m^2}{(3-\nu)} e^{-2mh} \right] \quad (3)$$

另一方面如果弹性地基在刚性基底上滑动时,弹性地基下表面 $y=-h$ 处,边界条件为 $u_x=0, \tau_{xy}=0$,可得应力-应变关系为

$$u_y = \frac{\sigma_y}{Em} \left[\frac{(3-\nu)(1+\nu)}{2} - 2(1+\nu)^2 h m e^{-2mh} \right] \quad (4)$$

1.2 梁的控制微分方程

假设梁的轴力 N 为实常数,根据力和力矩平衡,梁的向上垂直挠度 u_y 、屈曲力 N 和弹性地基提供的侧向法向应力 σ_y 之间的微分关系可以表示为^[6,22]

$$\sigma_y = -D \frac{d^4 u_y}{dx^4} - N \frac{d^2 u_y}{dx^2} \quad (5)$$

上述梁的控制微分方程适用于 Euler-Bernoulli 梁。将式(4)代入参考文献[21]中的式(4)中,并结合该文献中的式(2)、式(3),本研究的模型可扩展应用于 Timoshenko 梁的稳定性分析中。但是, Timoshenko 梁模型由于其复杂性,常用于高梁弯曲、稳定性问题分析,而高梁自身稳定性强不易失稳;且本研究对象为无限长梁的屈曲,故 Euler-Bernoulli 梁模型在本研究中可满足精度要求,且相关结果更为简洁。

1.3 临界屈曲力

为了得到屈曲力 N 的解析形式,将式(3)代入式(5)中,并考虑 $hm \gg 1$,得到屈曲力为

$$N = \frac{2E}{m(3-\nu)(1+\nu)} + Dm^2 + \frac{8E(1+\nu)h^2 m}{(3-\nu)^3} e^{-2mh} \quad (6)$$

对 N 取极值可得临界 m 为

$$m_{cr} = \sqrt[3]{\frac{E}{D(3-\nu)(1+\nu)}} + \frac{8}{3} h^3 \sqrt[3]{\frac{E^4(1+\nu)^2}{(3-\nu)^{10} D^4}} e^{\left(-2\sqrt[3]{\frac{Eh^3}{D(3-\nu)(1+\nu)}}\right)} \quad (7)$$

进而可得临界屈曲波长为

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi}{m_{cr}} \quad (8)$$

将 m_{cr} 代入式(6),可得临界屈曲力为

$$N_{cr} = 3 \sqrt[3]{\frac{E^2 D}{(3-\nu)^2(1+\nu)^2}} + 8Eh \sqrt[3]{\frac{Eh^3(1+\nu)^2}{D(3-\nu)^{10}}} e^{\left(-2\sqrt[3]{\frac{Eh^3}{D(3-\nu)(1+\nu)}}\right)} \quad (9)$$

对于弹性地基在刚性基底滑动的情况,依照同样的步骤,将式(4)代入式(5)中,可得屈曲力的表达式为

$$N^S = \frac{2E}{m(3-\nu)(1+\nu)} + Dm^2 + \frac{8Eh}{(3-\nu)^2} e^{-2mh} \quad (10)$$

其对应的临界 m 为

$$m_{cr}^S = \sqrt[3]{\frac{E}{D(3-\nu)(1+\nu)}} + \frac{8Eh^2}{3D(3-\nu)^2} e^{\left(-2h\sqrt[3]{\frac{E}{D(3-\nu)(1+\nu)}}\right)} \quad (11)$$

临界屈曲波长为

$$\lambda_{cr}^S = \frac{2\pi}{m_{cr}^S} \quad (12)$$

临界屈曲力 N_{cr}^S 为

$$N_{cr}^S = 3 \sqrt[3]{\frac{E^2 D}{(3-\nu)^2(1+\nu)^2}} + \frac{8Eh}{(3-\nu)^2} e^{\left(-2h\sqrt[3]{\frac{E}{D(3-\nu)(1+\nu)}}\right)} \quad (13)$$

当 $hm \gg 1$ 时,式(9)和式(13)首项完全相同,即当地基的厚度趋于无限厚时,地基地部的边界条件不会影响临界屈曲力,与常理相符。然而,由于厚度效应,不同边界条件下,临界屈曲力的高阶项有所不同,且 N_{cr} 的高阶项远大于 N_{cr}^S 的高阶项,即有限厚度下黏结地基梁的临界屈曲应力更大,与常理相符。

2 结果及分析

为了验证上节中推导的公式的准确性,本节建立了有限元分析(finite element analysis, FEA)模型,并将本研究模型与有限元结果及已有的半空间弹性地基模型^[20]作对比,进行分析讨论。值得一提的是,当地基厚度趋近无限大时,本研究模型与半空间弹性地基模型也不完全相同,因为本模型假设梁的轴向位移为零,而半空间模型中假设地基上表面切应力为零。从后面的对比中可发现,当地基趋近无限厚时,本模型与有限元结果吻合得更好。

2.1 有限元模型

本节利用 ABAQUS 软件开展研究。在 ABAQUS 中建立了地基-梁系统二维实体模型,地基和梁完美黏结在一起。为了与本研究基于线弹性理论所提出的解析模型对比,有限元模型中梁和地基均为均质

线弹性材料,其泊松比为0.3,热膨胀系数 α 为 $10^{-5}/\text{K}$;地基和梁的杨氏模量比初步设置为0.01。在分析步中采用线性扰动中屈曲分析步,通过获取一阶模态特征值计算梁的临界屈曲应变数值解。弹性地基在刚性基底上黏结或滑动。当弹性地基在基底上黏结时,则在梁及地基左右两端固定其轴向位移,对整个系统施加温度载荷使其产生屈曲,温升设置为100 K,此时临界屈曲应变数值解为

$$\varepsilon_{\text{cr}} = n\Delta T\alpha \quad (14)$$

式中: n 为仿真结果中的一阶模态特征值; ΔT 为施加的温升量。当弹性地基在基底上滑动时,则限制系统左端的轴向位移,右端施加均匀的压缩位移令其屈曲,压缩位移设置为 $-S/L$,此时临界屈曲应变数值解为

$$\varepsilon_{\text{cr}}^S = n \frac{S}{L} \quad (15)$$

式中: S 为施加的压缩位移; L 为梁的长度。故本研究考虑了工程中两种最为常见的屈曲原因:温度或机械力。有限元模型选用四边形四节点型线性平面应变单元,网格尺寸为 $0.1h_b$,其与网格尺寸 $0.05h_b$ 的有限元模型模拟结果相对误差小于0.1%。

2.2 结果对比

图2和图3分别表示无量纲化的临界 m 值随着弹性地基的杨氏模量及厚度的变化情况。从两图均可看出,无论是黏结地基还是滑动地基,本模型中的 m_{cr} 值及其变化规律与有限元结果可取得合理的一致性,相对误差小于10%。相对于已有模型,本模型精度更高,且本模型可考虑地基的厚度效应。

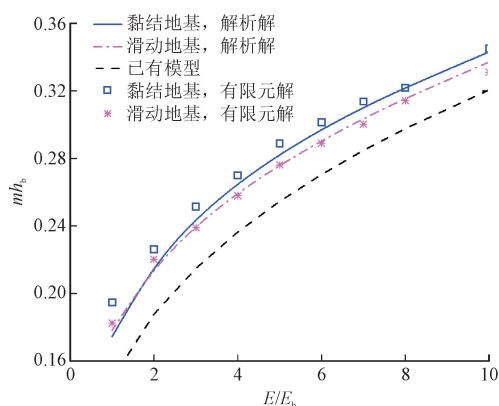


图2 无量纲化临界 m 值随地基杨氏模量 E 的变化规律

Fig. 2 Variation of critical m value with Young's modulus E of the foundation

由图2可知, m_{cr} 随杨氏模量 E 的增加而增加,故临界屈曲波长随地基杨氏模量的增加而减小,这

与文献[20]中获得的结果一致。由图3可知,临界屈曲波长随地基厚度的增加而增加,并且逐渐趋于一个非零常值,而已有的半空间弹性地基模型是一个恒定值,与厚度无关。当 $h/h_b \geq 12$ 时,地基的厚度效应不明显,但解析解由于对问题进行了简化,与有限元解存在误差,误差接近1.5%;当 $h/h_b < 12$ 时,地基厚度效应明显,已有模型在求解 m 值中忽略了高阶项,导致误差偏大。

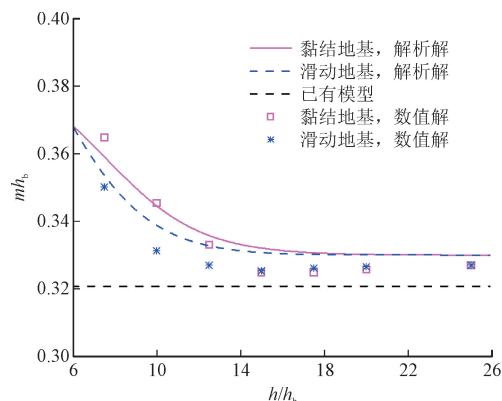


图3 无量纲化临界 m 值随地基厚度 h 的变化规律

Fig. 3 Variation of critical m value with foundation thickness h

图4可知,临界屈曲应变 $N_{\text{cr}}/(E_b h_b)$ 随地基的弹性模量 E 的增加而增加,并且黏结地基的临界屈曲应变略大于滑动地基。当杨氏模量比 E/E_b 大于0.001时,本研究模型的临界屈曲应变与数值解相对误差小于10%。由于在本研究模型中忽略了梁的轴向位移,从图中可知随地基杨氏模量的增加,临界屈曲应变相对误差也在增加。与已有模型中梁的临界屈曲应变相比,本模型更接近数值解,相对误差更小。从图5可以看出,临界屈曲应变 $N_{\text{cr}}/(E_b h_b)$ 首先随地基厚度 h 的增加而迅速减小,当 h 远大于 h_b 时趋于一正常数,这一结论与文献[7]中的数值解相一致。文献[7]的数值解考虑了地基的厚度效应,故其结果可用来与本解析模型预测结果进行对比,验证了解析模型的合理性。而与已有的半空间弹性地基模型^[20]的对比,证实了本研究所提出的解析模型相对于已有解析模型,具有精度更高的优点。当 $h/h_b < 12$ 时,地基厚度效应明显,本模型预测的临界屈曲应变比已有模型更接近数值解,并且相对误差低于10%。而从 $h/h_b \geq 12$ 开始,地基的厚度效应可忽略,但由于假设不同,本模型解更接近于有限元解,本模型相对误差为6%,已有模型相对误差为11%。当地基厚度远大于梁厚度时,黏结地基的临界屈曲应变与滑动地基一致,这同样与考虑厚度效

应的文献[7]中的分析一致,而在半空间弹性地基模型^[20]中黏结地基和滑动地基则没有区别。

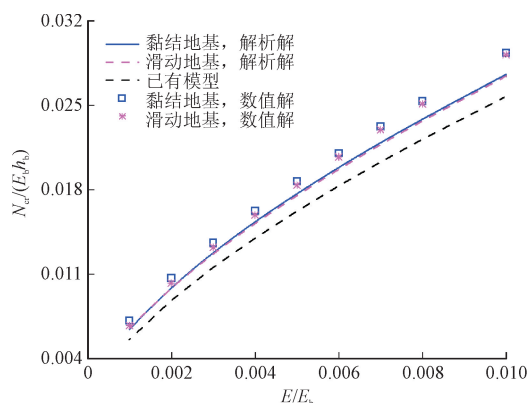


图4 临界屈曲应变随地基杨氏模量 E 的变化规律

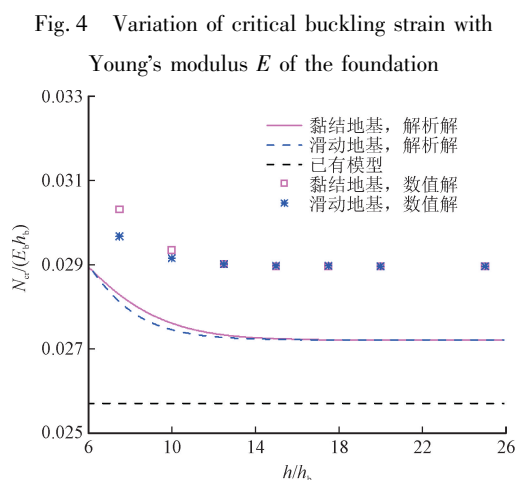


图5 临界屈曲应变随地基厚度 h 的变化规律

Fig. 5 Variation of critical buckling strain with foundation thickness h

在本模型中,重点利用 $hm \gg 1$ 这一假设展开简化。为了分析 hm 对临界屈曲应变的影响及本模型的成立条件,研究了在 $h/h_b = 10$ 时,临界屈曲应变随 hm 的变化规律(图6);在 $E/E_b = 0.01$ 时,临界屈曲应变随 hm 的变化规律(图7)。在图6中,当地基厚度不变,增加其杨氏模量时,临界屈曲应变随着 hm 增加而增加;在图7中,当地基杨氏模量不变,增加其厚度时,临界屈曲应变随着 hm 增加而减小。当 $hm < 4$,即基地厚度小于 $2/\pi$ 倍的屈曲波长时,地基支撑的厚度效应较为明显;当地基厚度大于 $2/\pi$ 倍的屈曲波长时,厚度效应可以忽略,但本模型结果仍与有限元结果吻合度较高,相对误差接近6%,而已有的模型忽略厚度效应,且相对误差更大,表明本模型更具优势。从整体上看,当 $hm \geq 2$ 时,即地基厚度大于屈曲波长的 $1/\pi$ 时,2种情况下临界屈曲应变与数值解的相对误差均低于10%,这表明,利用

本模型时若 $hm \geq 2$,可确保本模型所预测的临界屈曲应变的准确性。

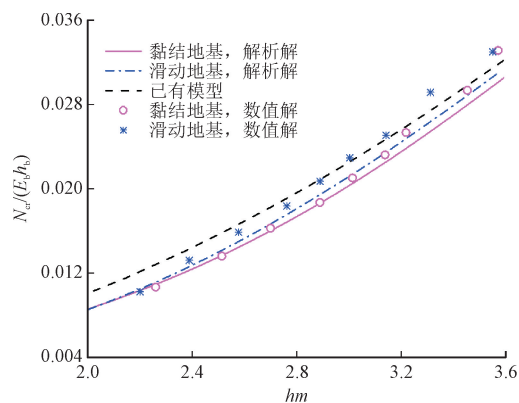


图6 临界屈曲应变随 hm ($h/h_b = 10$) 的变化规律

Fig. 6 Variation of critical buckling strain with hm ($h/h_b = 10$)

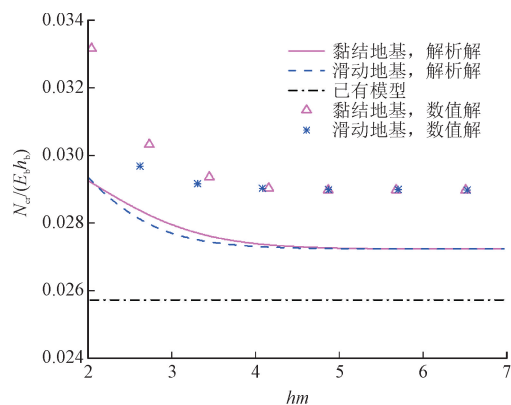


图7 临界屈曲应变随 hm ($E/E_b = 0.01$) 的变化规律

Fig. 7 Variation of critical buckling strain with hm ($E/E_b = 0.01$)

3 结论

本研究针对弹性地基梁的屈曲,提出了有限厚度弹性地基模型,并基于本模型得出了梁的临界屈曲应变与地基厚度的简洁显式关系。结果显示,当地基厚度小于 $2/\pi$ 倍的屈曲波长时,地基支撑的厚度效应较为明显。当地基厚度趋于无限厚时,本模型在形式上与已有的半空间弹性地基模型相一致,但本模型预测结果与有限元结果更为接近。当地基厚度大于 $2/\pi$ 倍的屈曲波长,本模型结果与有限元结果吻合度高,相对误差接近6%。理论结果显示临界屈曲波长随着地基厚度的增加而减小,临界屈曲应变随着地基的厚度增加而减小,与有限元结果相一致。表明本模型可较准确地揭示弹性地基的支撑作用,可为皮肤、复合材料纤维、橡胶管道、地板等的失稳提供理论基础。

参考文献:

- [1] ELISHAKOFF I, TONZANI G M, ZAZA N, et al. Contrasting three alternative versions of Timoshenko-Ehrenfest theory for beam on Winkler elastic foundation—simply supported beam[J]. Journal of applied mathematics and mechanics, 2018, 98(8): 1334-1368.
- [2] NAZARIMOFRAD E, BARKHORDAR A. Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading[J]. Mechanics of advanced materials and structures, 2016, 23(10): 1144-1148.
- [3] VACCARO M S, PINNOLA F P, MAROTTI DE SCIARRA F, et al. Elastostatics of Bernoulli-Euler beams resting on displacement-driven nonlocal foundation[J]. Nanomaterials, 2021, 11(3): 573.
- [4] KERR A D. A study of a new foundation model[J]. Acta mechanica, 1965, 1(2): 135-147.
- [5] REISSNER E. A note on deflections of plates on a viscoelastic foundation[J]. Journal of applied mechanics, 1958, 25(1): 144-145.
- [6] MUKHERJEE B, DILLARD D A. On buckling of a thin plate on an elastomeric foundation[J]. International journal of mechanical sciences, 2018, 149: 429-435.
- [7] ZHANG L, WU G T, WU J. A Kerr-type elastic foundation model for the buckling analysis of a beam bonded on an elastic layer[J]. Journal of applied mathematics and mechanics, 2019, 99(10): e201900162.
- [8] 郭春霞, 王亚升, 何芳社. 考虑轴向力的双参数弹性地基有限长梁的静力问题[J]. 应用力学学报, 2017, 34(3): 470-475.
GUO Chunxia, WANG Yasheng, HE Fangshe. Static problems of two parameter elastic foundation finite-length beams with axial force[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2017, 34(3): 470-475 (in Chinese).
- [9] WANG C J, ZHANG S, NIE S, et al. Buckling of a stiff thin film on a bi-layer compliant substrate of finite thickness[J]. International journal of solids and structures, 2020, 188-189: 133-140.
- [10] 李清禄, 曾跃平. 非线性弹性地基梁在随动载荷作用下的屈曲和振动[J]. 应用力学学报, 2016, 33(6): 1022-1026.
LI Qinglu, ZENG Yueping. Buckling and vibration of nonlinear elastic foundation beams subjected to follower force[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2016, 33(6): 1022-1026 (in Chinese).
- [11] WANG Z K, VAN DER HEIJDEN G H M. Shock sensitivity in the localised buckling of a beam on a nonlinear foundation; the case of a trenched subsea pipeline[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2020, 143: 104044.
- [12] RAO C K, RAO L B. Torsional post-buckling of thin-walled open section clamped beam supported on Winkler-Pasternak foundation[J]. Thin-walled structures, 2017, 116: 320-325.
- [13] OBARA P. Vibrations and stability of Bernoulli-Euler and Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation[J]. Archives of civil engineering, 2014, 60(4): 421-440.
- [14] 卢港伟, 葛仁余, 夏雨, 等. 弹性地基上 Euler-Bernoulli 梁的临界荷载计算[J]. 安徽工程大学学报, 2021, 36(3): 47-53.
LU Gangwei, GE Renyu, XIA Yu, et al. Critical load calculation of Euler-Bernoulli beam on elastic foundation[J]. Journal of Anhui Polytechnic University, 2021, 36(3): 47-53 (in Chinese).
- [15] PANAHAHANDEH-SHAHRAKI D, AMIRI RAD A. Buckling of cracked functionally graded plates supported by Pasternak foundation[J]. International journal of mechanical sciences, 2014, 88: 221-231.
- [16] MEI H X, LANDIS C M, HUANG R. Concomitant wrinkling and buckle-delamination of elastic thin films on compliant substrates[J]. Mechanics of materials, 2011, 43(11): 627-642.
- [17] 钮鹏, 李旭, 李世荣, 等. 弹性地基上复合材料夹层梁的热过屈曲[J]. 工程力学, 2017, 34(增刊1): 26-30.
NIU Peng, LI Xu, LI Shirong, et al. The thermal buckling of composite sandwich beams on elastic Foundations[J]. Engineering mechanics, 2017, 34(S1): 26-30 (in Chinese).
- [18] 薛治国, 张博, 孙宝印, 等. 热环境下弹性地基板屈曲路径和振动特性研究[J]. 科学技术与工程, 2022, 22(16): 6393-6399.
XUE Zhiguo, ZHANG Bo, SUN Baoyin, et al. Post-buckling paths and vibration characteristics of a plate resting on the elastic foundation in thermal environment[J]. Science technology and engineering, 2022, 22(16): 6393-6399 (in Chinese).
- [19] WEN C Q, TANG L, YANG G T. Buckling and post-buckling of pinned Euler beams on weakened Winkler foundation under thermal loading[J]. Journal of thermal stresses, 2020, 43(5): 529-542.
- [20] CHEN X, HUTCHINSON J W. Herringbone buckling patterns of compressed thin films on compliant substrates[J]. Journal of applied mechanics, 2004, 71(5): 597-603.
- [21] FALOPE F O, LANZONI L, RADI E. Buckling of a Timoshenko beam bonded to an elastic half-plane: effects of sharp and smooth beam edges[J]. International journal of solids and structures, 2020, 185-186: 222-239.
- [22] TIMOSHENKO S, WOINOWSKY-KRIEGER S. Theory of plates and shells[M]. New York: McGraw-hill, 1959.

(编辑 李坤璐)

附录 A

黏结地基上表面的应力-应变关系推导过程如下。

根据弹性力学知识,弹性地基区域内的应力函数应满足以下双调和函数,即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right)\Phi = 0 \quad (\text{A1})$$

将式(2)代入式(A1)可得 Φ 表达式

$$\Phi = \sin(mx) [(A + Cy)e^{my} + (B + Dy)e^{-my}] \quad (\text{A2})$$

式中, A, B, C 和 D 是 4 个待定实值函数。根据弹性力学的知识,可得应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma_y &= m^2 \sin(-mx) [(A + Cy)e^{my} + (B + Dy)e^{-my}], \\ \sigma_x &= m^2 \sin(mx) \left[\left(A + Cy + \frac{2C}{m}\right)e^{my} + \left(B + Dy - \frac{2D}{m}\right)e^{-my} \right], \\ \tau_{xy} &= -m^2 \cos(mx) \left[\left(A + Cy + \frac{C}{m}\right)e^{my} - \left(B + Dy - \frac{D}{m}\right)e^{-my} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

利用式(A3)中的 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} , 在平面应变下, 可得位移分量为

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{E} m \cos(mx) \left\{ \left[(1+\nu)A + (1+\nu)Cy + \frac{2C}{m} \right] e^{my} + \left[(1+\nu)B + (1+\nu)Dy - \frac{2D}{m} \right] e^{-my} \right\}, \\ u_y &= -\frac{1}{E} m \sin(mx) \left\{ \left[(1+\nu)A + (1+\nu)Cy - \frac{(1-\nu)C}{m} \right] e^{my} - \left[(1+\nu)B + (1+\nu)Dy + \frac{(1-\nu)D}{m} \right] e^{-my} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

在弹性地基上表面 $y=0$ 处, 有

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -p_0 \sin(mx), u_x = 0, \\ u_y &= -\frac{1}{E} m \sin(mx) \left[(1+\nu)(A-B) - \frac{(1-\nu)(C+D)}{m} \right] \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

此外, 当弹性地基下表面在基底上黏结时, 在 $y=-h$ 处, 有

$$u_x = u_y = 0 \quad (\text{A6})$$

将式(A3)、式(A4)代入式(A5)中可得

$$\begin{aligned} A + B &= p_0/m^2, \\ A + B &= \frac{2D - 2C}{m(1+\nu)} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

将式(A3)、式(A4)代入式(A6)中可得

$$\left[(1+\nu)A - (1+\nu)Ch + \frac{2C}{m} \right] e^{-mh} + \left[(1+\nu)B - (1+\nu)Dh - \frac{2D}{m} \right] e^{mh} = 0 \quad (\text{A8})$$

以及

$$\left[(1+\nu)A - (1+\nu)Ch - \frac{(1-\nu)C}{m} \right] e^{-mh} - \left[(1+\nu)B - (1+\nu)Dh + \frac{(1-\nu)D}{m} \right] e^{mh} = 0 \quad (\text{A9})$$

从式(A7)~式(A9)可得

$$\begin{aligned}
 C = & -\frac{p_0(1+\nu)}{2m} + \frac{-\frac{(3-\nu)}{2(1+\nu)m}e^{-2mh}\frac{p_0(1+\nu)}{2m} + \frac{p_0(3-\nu)}{4m^2} + \frac{hp_0(1+\nu)}{2m}}{\frac{(3-\nu)}{2(1+\nu)m}e^{2mh} - \frac{(3-\nu)}{2(1+\nu)m}e^{-2mh} + 2h}, \\
 D = & \frac{-\frac{(3-\nu)}{2(1+\nu)m}e^{-2mh}\frac{p_0(1+\nu)}{2m} + \frac{p_0(3-\nu)}{4m^2} + \frac{hp_0(1+\nu)}{2m}}{\frac{(3-\nu)}{2(1+\nu)m}e^{2mh} - \frac{(3-\nu)}{2(1+\nu)m}e^{-2mh} + 2h} \quad (A10)
 \end{aligned}$$

以及

$$A - B = \frac{(3-\nu)D}{2(1+\nu)m}e^{2mh} + \frac{(3-\nu)C}{2(1+\nu)m}e^{-2mh} + (C-D)h - \frac{C+D}{2m} \quad (A11)$$

结合式(A10)及式(A11),考虑 $hm \gg 1$,利用等价无穷小,并忽略 e^{-4hm} 及以上高阶项,可得

$$A - B = \frac{p_0}{m^2} - \frac{4p_0(1+\nu)hm}{m^2(3-\nu)}e^{-2mh} - \frac{2p_0(1+\nu)^2h^2m^2}{m^2(3-\nu)}e^{-2mh} - \frac{2p_0}{m^2}e^{-2mh} \quad (A12)$$

以及

$$C + D = -\frac{p_0(1+\nu)}{2m} + \frac{p_0(1+\nu)}{m}e^{-2mh} + \frac{2(1+\nu)^2hmp_0}{m(3-\nu)}e^{-2mh} \quad (A13)$$

由式(A5)、式(A12)及式(A13),并忽略 hm^{-2hm} 及以上高阶项,最终得到黏结地基上表面应力-应变关系式(3)。对于滑动地基下表面 $y=-h$ 处, $u_x=0, \tau_{xy}=0$,采用同样的计算方法,可得滑动地基上表面应力-应变关系式(4)。