



田野,中国科学院院士,中国数学会常务理事,中国科学院数学与系统科学研究院研究员、晨兴数学中心教授。四川大学杰出校友(89级本科,93级硕士),2003年博士毕业于哥伦比亚大学,2006年回国工作。主要研究领域为数论中椭圆曲线的算术理论,在千禧年难题BSD猜想中取得重要进展。晨兴数学奖金奖、拉马努金奖、中国数学会陈省身奖及国家自然科学基金二等奖获得者。曾受邀在2022年国际数学家大会做45分钟报告。

柯召的学术贡献及其后续影响

田野^{1,2}, 张起帆³

(1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100101; 2. 中国科学院晨兴数学中心, 北京 100101;
3. 四川大学数学学院, 成都 610065)

摘要: 柯召先生的数学生涯横跨二次型、丢番图方程和极值组合。他往往从一个朴素而锋利的问题出发,在可借助的现成理论并不多的时候,把问题逼近到最硬的算术关节上。值此四川大学建校130周年之际,本文梳理了柯先生的学术生平、学术传承,以及他的几类代表性贡献:二次型部分将平方和表示问题自然地通向整数格嵌入、不可分解型和低秩障碍;丢番图方程部分在共同因子、素因子指数和 Jacobi 符号之间找到证明的入口;组合数学部分把 Erdős-Ko-Rado 定理放回极值集合论的开端。本文还简要回顾了川大组合数学的传统以及今日 AI 辅助数学探索的语境中加以考察。文章希望在保留数学细节的同时呈现一代学者治学、育人和开风气的历史温度。

关键词: 柯召; 二次型; 丢番图方程; EKR 定理

中图分类号: O112 **文献标志码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.260247

The academic contributions and successive influence of KE Zhao

TIAN Ye^{1,2}, ZHANG Qifan³

(1. Institute of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China;
2. Chenxing Mathematical Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China;
3. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: KE Zhao's (Ko Chao's) mathematical career spanned quadratic forms, Diophantine equations, and extremal combinatorics. He characteristically began with a simple yet incisive question and, at a time when little ready-made theory was available, pushed the problem toward its most resistant arithmetic core. On the occasion of Sichuan University's 130th anniversary, this article reviews Ko's academic life, intellectual lineage, and several representative strands of his work. In the theory of quadratic forms, problems concerning representations as sums of squares lead naturally to embeddings of integral lattices, indecomposable forms, and low-rank obstructions. In the study of Diophantine equations, his proofs find their point of entry in the interplay among common divisors, exponents of prime factors, and Jacobi symbols. In combinatorics, the Erdős-Ko-Rado theorem is situated at the origins of extremal set theory. The article also briefly surveys the

收稿日期: 2026-07-31 修回日期: 2026-09-03 接受日期: 2026-09-07

作者简介: 田野(1971—),男,四川内江人,中国科学院院士,研究员,博士生导师,中国数学会常务理事,主要研究领域为数论。
E-mail: ytian@math.ac.cn

通信作者: 张起帆. E-mail: zhangqifan@scu.edu.cn

tradition of combinatorics at Sichuan University and reconsiders Ko's work in the contemporary context of AI-assisted mathematical exploration. While preserving the mathematical details, it seeks to convey the historical and human texture of a generation of scholars—their ways of doing mathematics, educating students, and opening new intellectual directions.

Keywords: KE Zhao (Ko Chao); quadratic forms; Diophantine equation; EKR theorem

1 柯召的老师、学生和定理

柯召(KE Zhao, Ko Chao)先生的数学贡献不容易用一个学科名称收束。他的一生,一头连着中国近代数论初兴的年代,一头连着四川大学数学传统的形成。他留下的也不只是若干篇经典论文,更有一种做数学的方式:问题要看准,论证要干净,工具不求炫目,却要用在刀口上。今天,在四川大学建校130周年之际,作为柯召先生的后辈,我们重读柯先生的论文,最深刻的体会是看到他如何将研究中的问题带入课堂、带入学生的训练,并在川大的数学研究中慢慢沉淀成一种气质。

近代数论是由杨武之先生传入中国的。准确地说,1928年杨先生留美归国到厦门大学任教开启了中国近代数论研究新篇章。后来华罗庚、柯召和闵嗣鹤三位先生都在杨先生的影响下走上数论研究道路,只是各自走出的方向并不相同,形成的学术传统也各有面貌。其中,柯先生是三人中最早直接接触杨先生的一位。1928年,杨先生应聘厦门大学,柯先生恰好考入厦门大学数学系。后来,杨先生转赴清华大学任教,柯先生也于1931年转入清华大学数学系三年级,并于1933年毕业。在清华学习期间,他从杨先生的课程中学习基础数论和群论,并在杨先生指导下完成了关于不定方程的本科毕业论文。这篇论文后来得到数论大师 Mordell 的赏识,也为他赴英国投身 Mordell 门下埋下伏笔。

在南开大学任助教两年之后,柯先生于1935年获得庚款资助赴英国,在曼彻斯特大学跟随 Mordell 学习和研究二次型。1938年归国后,他出任四川大学教授。从此以后,柯召的名字便同四川大学、同西部地区的数学教育紧紧连在一起。他长期扎根川大,潜心治学,奖掖后学,以数十年如一日的坚持为川渝地区的数学文化奠下重要根基。柯召先生的生平与中国数学学科建设的历史背景,可参看白苏华《柯召传》及相关纪念资料^[1-3]。

柯先生的代表性科研工作大致可从三条彼此相关的线索来读,它们共同彰显柯先生处理数学

问题的风格:喜欢从具体问题入手,却不满足于局部算例;重视古典方法,却常常能够在古典工具中找到新的组织方式。

首先是二次型。把正定二次型表示为线性型平方和看上去像是一个关于“写法”的问题,实际上很快会触到有理系数与整系数之间的鸿沟。对有理系数情形,柯先生给出了 Mordell 上界定理的简洁证明,并证明所需项数 $n+3$ (n 表变元个数) 在任意维数下不能再少^[4-5]。在整系数情形,他又定出 $n \leq 5$ 时的精确项数,并指出从6元开始表示可能根本不存在^[4, 6-8]。用今天的术语来说,这些结果可解释为低秩正定整数格嵌入标准格 I_r 的精确边界,以及秩为6时由 E_6 型障碍触发的结构相变^[9-11]。这类工作的重要性不只是“给出常数”,而是划清了“有理可表示”与“整系数可表示”之间的界线。

其次是丢番图方程。柯先生研究过指数方程 $x^r y^s = z^t$ 。Erdős 猜测方程没有非平凡解,柯先生则证明互素情形确实没有非平凡解,并构造出一般情形下的无穷多组解^[12]。这个结果很特别:它不是随手举出一个反例,而是发现了公因子可以怎样补偿指数上的不平衡,并由此引出 Mills、Schinzel、Dem'yanenko 及 Uchiyama 等的后续分类问题^[13-16]。他关于 $x^2 = y^n + 1$ 的论文则解决了 Catalan 猜想中指数为2的边界情形。该结果后来常被称作“柯召定理”,其利用 Jacobi 符号与二次互反律技巧的证明方法则被称为“柯方法”^[17-20]。这一工作展示了古典初等数论方法的魅力和力量。此外,当因式分解、互素性和互反律被安排到恰当位置时,也能推进相邻方幂这样深的问题的研究。完整的 Catalan 猜想的证明要进入分圆域和代数数论深处,这恰好反衬出柯先生工作的边界和分量^[21-22]。

第三是组合数学。1961年, Erdős、Ko 和 Rado 合作发表了交集定理,后来以 Erdős-Ko-Rado 定理闻名,成为极值集合论的基本出发点之一^[23-25]。它的形式很朴素:有限子集族若两两相交,规模最多有多大? 出人意料的是,后来这个问题不断生长,

并进入极值组合、代数组合、有限几何、编码理论及理论计算机科学的研究领域。今天,在谈论 AI 辅助的数学研究时,人们也容易重新注意到这类问题的特点:对象有限、构造可检查,但真正困难的是上界和结构。

本文的主体围绕以上三类贡献展开。本文将几个有代表性的数学问题为中心说明柯先生究竟证明了什么,这些结果在当时为什么困难,又如何在后来的数学发展和川大数学传统中继续发挥作用。

柯先生长期任教于四川大学,他的数学贡献自然带有鲜明的传承色彩。上世纪四十年代,朱福祖先生就读于四川大学,在柯先生影响下对二次型产生兴趣,并于八十年代在华东师范大学培养出江迪华、徐飞、秦厚荣等优秀学生。上世纪五六十年代,柯先生培养了两个代表性的研究生陆文端和郑德勋,其中陆文端在不定方程的商高猜想方面做出了不错的工作,后被国家派到苏联改学微分方程,并从柯先生手中接过了四川大学数学所所长的重任;郑德勋则在不定方程、二次型及应用数学等方面都有成果,发挥了承上启下的作用。

柯先生最主要的三个学生是上世纪六十年代初本科毕业留校任教的孙琦、魏万迪和李德琅,他们大体分别继承并拓展了柯先生的三个核心方向:孙琦老师延续不定方程和数论应用传统;魏万迪老师发展组合数学、组合设计和图论;李德琅老师则在二次型与代数数论方向做出突出工作。这三条线索并非彼此孤立:不定方程训练同余与构造能力;二次型训练局部-整体和结构分类眼光;组合数学训练离散结构中的极值判断,三者共同构成川大数学传统中极有辨识度的一种基本功。

单从学术看,柯先生成就最高的学生应该是上世纪八十年代的研究生万大庆和陈永川。他们是柯先生年事已高时分别与孙琦老师和魏万迪老师合招的,稍晚几年的袁平之也类似,是柯先生和孙琦老师合招、实际由孙琦老师指导的。因此,将他们三位视为柯召先生一脉的再传弟子更合适。孙琦和魏万迪两位老师培养了很多优秀学生,他们大多出国深造,这里列举其中几位已回国工作的学生——万大庆、陈永川和向青。

万大庆上世纪八十年代出国留学,最近回国任教,在重庆大学创办了离散数学中心。他的学

术经历尤其能说明柯先生的研究风格在现代数学中的自然延续。万大庆早期研究有限域上的置换多项式,后来转向函数域算术和 p -进方法,并在 Dwork 猜想等深层问题上取得重要成果^[26-28]。从问题的表面看,这些工作已经离柯先生早年的二次型和初等不定方程很远,但若看他怎样选择问题,怎样在问题压力下调动新工具,则仍能见到一种很强的 Mordell-柯风格:问题要具体而尖锐,计算要服务于结构,最后还要把局部信息合成清楚的全局判断。如果说 Mordell 和柯召代表了经典数论中“以问题统摄技巧”的一种传统,那么万大庆的若干工作正可以看作这种传统在有限域、函数域和 p -进算术中的现代延续。

陈永川也是上世纪八十年代出国的。在出国潮盛行的上世纪九十年代,他就回国工作并创办南开大学组合数学中心,培养了很多学生,并当选中国科学院院士。他的学生王健是研究极值集论的优秀青年专家,今年刚被引进到四川大学工作。在今年举行的纪念 Erdős-Ko-Rado 定理发表 65 周年学术研讨会上,组合数学专家王军教授称其到川大工作是 Erdős-Ko-Rado 定理回到了故乡。

向青是上世纪九十年代出国的,是很有国际影响力的组合数学和有限几何研究专家,曾获柯克曼奖,现为南方科技大学讲席教授。袁平之一直在国内工作,从孙琦老师手中接过接力棒,成为不定方程尤其是柯方法的主要继承者之一。

2 二次型方面的贡献

2.1 关于正定二次型

设

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{Z}$$

是一个正定二次型。一个自然的问题是:能否把 f 写成若干个线性型平方之和:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=1}^r (b_{v1} x_1 + \dots + b_{vn} x_n)^2,$$

若能表,将最小的项数 r 记为 R_n ,问 R_n 应该是多少? 这里的系数 b_{vi} 只要求是有理数还是必须是整数看似只是条件的轻重不同,实际上却把问题分成了两种完全不同的算术世界。柯先生的工作恰好在这两侧都留下了决定性的结果。

先看有理系数情形。Landau 早年曾证明,二元情形可取 $R_2 \leq 5$ 。Mordell 在 1930 年代证明,对

任意 n ,任意有理正定二次型都可表示为 $n+3$ 个有理线性型平方之和,即 $R_n \leq n+3$,但这个数目是否最优还需要补上关键下界^[29]。柯先生1937年的论文用 $R_2=5$ 给出了 $R_n \leq n+3$ 的一个简洁证明,1938年的短文又补上最后一块拼图,证明对任意 n , $n+3$ 都不能再减,于是有

$$R_n = n+3 \quad (\text{有理系数,对一切 } n).$$

这篇短文中的反例十分干净。取

$$f = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + bx_n^2,$$

其中 b 不能表示为三个有理数平方之和,例如 $b=4^a(8\beta+7)$ 。若 f 能由 $n+2$ 个有理线性型平方表示,则会迫使 b 成为三个有理数平方之和,矛盾^[5]。这就把任意维数的最优性问题压缩到三平方定理的有理形式上。虽然证明不长,但这却正好显示出柯先生处理经典问题时的长处:不绕弯子,直接找到不可越过的障碍。

整系数情形便复杂得多。最低维的 $R_1=4$ 恰是Lagrange四平方定理,Mordell已证得二元正定整数二次型可写成五个整数线性型平方和^[30],并猜测整系数下仍有 $R_n = n+3$ 。柯先生在1937年前后的工作中证明

$$R_5=8, R_4=7, R_3=6, R_2=5,$$

也就是说,当 $n \leq 5$ 时整系数猜想成立, $R_n = n+3$ 仍是精确值^[4,6]。证明使用的技巧是对低维、小行列式正定型的细致控制,特别是行列式为1的正定二次型类数问题^[31-32]。

然而,到了六元情形,规律突然断裂。文献中常用的六元例外型可写为

$$E(x_1, \cdots, x_6) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^6 x_i \right)^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_6.$$

这个型并不能表示为任意多个整系数线性型平方之和。柯先生进一步分析了六元分解问题,Erdős-Ko的后续论文也把“不能分解为两个正定或半正定型之和”作为独立结构问题来研究^[7-8]。于是,对同一个平方和问题,在两种系数要求下呈现出完全不同的面貌:有理系数时 $R_n = n+3$ 对一切 n 成立;整系数时 $R_n = n+3$ 只在低维成立,从六元开始表示本身就可能不存在。

柯先生在这里做出的并不只是低维计算。他把一个表面上的平方和项数问题推进成为一个关于整数结构能否分解的问题,对有理情形给出精确常数,对整数情形则揭示结构障碍。这道界线,

正是后来研究者用格论语言重读其工作的入口。用今天的语言,“把正定整数二次型写成 r 个整数线性型平方和”就是整数格嵌入问题。若 $Q_A(x) = x^T A x$,且

$$Q_A(x) = L_1(x)^2 + \cdots + L_r(x)^2,$$

$$L_i \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n],$$

把 L_i 的系数写成矩阵 $M \in M_{r \times n}(\mathbb{Z})$,则 $A = M^T M$ 。这等价于与 A 对应的整数格 L_A 等距嵌入标准格 $I_r = \langle 1, \cdots, 1 \rangle$ 。因此,Mordell-Ko问题也可以说成:一个给定秩的正定整数格,至少要嵌入到多高维的标准格中? Icaza和Kim-Oh后来的 $g_{\mathbb{Z}}(n)$ 问题正是沿着这一语言的继续发展^[9-11]。经过这样翻译之后,柯先生工作的难度反而更加清楚。整数条件不能由实数正交化或有理对角化替代,它要求矩阵精确分解为 $A = M^T M$,一个很小的同余障碍或行列式障碍都足以使表示失败。更何况柯先生处理的是三、四、五、六个变量,恰是低维例外最密集的地方。当时,现代读者所熟悉的O'Meara、Riehm、Hsia-Kitaoka-Kneser等关于局部表示、genus、spinor genus的工具尚未形成可直接调用的体系^[33-34],他只能靠Hermite约化、行列式估计、伴随型、余子式分析和显式代数计算等手段把无限多的二次型压缩成可处理的有限情形。

秩六例外型的意义也正是在这里。它不是简单地说明“ $n+3$ 少了一点”,而是第一次清楚显示:从 $n=5$ 到 $n=6$,问题的性质已经改变:局部到整体、genus到class、可分解到不可分解之间都在这一低秩处出现断裂。Kim-Oh后来证明, $g_{\mathbb{Z}}(6)=10$,说明柯召关于六元可表示者九平方的设想需要修正。但柯先生所揭示的秩六障碍本身正是后代理论必须解释的第一个断裂点^[10-11]。这也是他的二次型工作至今仍能被现代整数格理论吸收的原因。

2.2 Meyer定理与不定二次型

柯先生在二次型方面的兴趣并不止于正定情形。1940年,他的论文《On the Meyer's theorem and the decomposition of quadratic forms》讨论了Meyer定理及二次型分解^[35]。Meyer定理可表述为:

定理 2.1 (Meyer) 每个变量数大于四、行列式非零、整系数的不定二次型都非平凡地表示零,即存在不全为零的整数向量 x ,使得 $f(x)=0$ 。

柯先生在该文开头特别说明,传统证明依赖

较深的三元不定二次型算术理论,而他希望寻找一种新的证明方式,这样的证明也许能启发三次型的类似问题。虽然他同时指出这种推广看来仍十分困难,但这个动机很能说明他的眼光:他并非只是重证一个定理,而是在问一种证明方法能不能迁移。

在该文中,柯先生运用自己关于正定偶二次型,特别是行列式为 1 的正定二次型的结果给出了 Meyer 定理的新证明^[32,35]。值得注意的是,支撑这一新证明的正是支撑前述整系数平方和结果的同一组工具:小行列式正定二次型的类数控制。换言之,柯先生在二次型方向上的几项工作并非互不相干,而是共享一套关于低维、小行列式正定型的精细分析。这条路体现了二次型理论中常见的一种思想:通过分解、降维和局部结构控制,把不定情形的零点存在问题转化为较可控的正定或低维问题。这种思想后来在二次型、格理论以及相关算术问题中不断出现。

2.3 二次型贡献的后续影响

孙琦教授在《柯召文集》序言中把柯先生在二次型方面的主要贡献概括为四个方向:正定二次型表示平方和,二次型不可分解问题,正定么模二次型类数问题,以及二次型表示相同整数问题^[36]。这些方向细看并不分散,前面讨论的整系数平方和问题已经自然把它们连在了一起。

在整系数下,问一个二次型 f 能否表示为线性型平方和本质上就是问它能否被标准平方和型 $x_1^2 + \cdots + x_N^2$ 表示,也就是问相应的格 L 能否等距嵌入整格 $\mathbb{Z}^N$ 。当这种表示不存在时, f 便呈现出不可分解的性质。低维情形,若类数为 1,局部可表示往往可以拼成整体可表示。高维情形,同一亏格中出现多个类,原先的桥就会断裂。柯先生专门研究了行列式为 1 的正定二次型类数,使这条线索能够同后来的格论语言相接^[31-32,37],正是依靠其平方和问题研究的深厚技术根基。由此可见,柯先生在 1930 年代给出的并不是一个孤立常数。用今天的说法,“用平方和型表示二次型”属于二次型相互表示问题,它同亏格、类数、局部-整体原理以及格几何相连^[37-38]。柯先生已经以相当古典的方式触到这一现代主题的门槛:有理系数与整系数之间的界线后来正可被用于 Hsia-Kitaoka-Kneser 表示理论、Icaza 和 Kim-Oh 的 $g_{\mathbb{Z}}(n)$ 研究,以及标准格嵌入问题的重新说明^[9, 11, 34]。

《柯召文集》所列的第四个研究方向在川大数学传统中也有清晰的接续。不同二次型何时表示同一组整数是经典二次型理论中的老问题。对不定二元二次型, Legendre 曾给出判据。1938 年, Delone 指出,其结论须排除完全平方数才正确。1979 年, Watson 又用新方法简化了 Delone 的论证,但问题仍未完全解结。柯先生的学生李德琅于 1982 年在一篇 5 页的论文中给出了完整刻画,说明哪些表示相同整数的不定二元二次型并不等价^[39]。这篇文章写于他在剑桥访问期间,与 Cassels 所在的二次型环境相呼应,也说明柯先生早年研究的经典问题后来可以借助代数数论与格论的思想得到更彻底的解释。柯先生的另一位后辈徐飞是我国二次型研究的年轻一代代表人物。基于文献[40],徐飞在文献[41]中引入了二次特征,并建立了旋量族的表示质量公式,从而把 Siegel 关于族表示质量的经典理论推进到更精细的旋量族层次。这是二次型表示理论中长期受到关注的一项进展。

二次型理论之所以在柯召一脉中留下深痕,还因为它本身是一处很好的训练场。它要求计算能力,也要求同余敏感性;要求局部-整体的眼光,也要求结构分类的耐心。从柯先生到孙琦、魏万迪、李德琅,再到后来的格、编码与有限域方向,二次型既是研究对象,也是一种基本功。柯先生关于二次型工作的生命力正在于此:一个看似古典的平方和问题,经他处理之后,既有精确答案又把后来现代理论的入口显露出来。

从整个二次型理论发展的角度, Bhargava 的工作可以被视为一个高峰:一方面从 Gauss 的二元二次型合成律出发发展出高等合成律与整数轨道方法,深刻联系了二次型、整数环、理想类与算术统计;另一方面与 Hanke 关于普适二次型的 290-定理一起又把正定整数二次型的表示问题推进到有限判定和显式分类的现代阶段^[42-43]。在这一历史脉络中, Mordell 和柯先生在正定整数二次型表示理论中具有重要的开创性意义。 Mordell 将 Waring 问题的思想移植到二次型本身,提出研究一个正定整数二次型能否表示为若干整数线性型平方和的问题^[29-30]。柯召随后又将该问题推进到三、四、五元情形,证明了相应的低维精确结果,并触及六维情形中开始出现的结构性障碍。用后来的格论语言说, Mordell-Ko 的工作实际上研究的

是整数格嵌入标准正交格的问题,其结果可概括为 $g(n)=n+3$ 对 $1 \leq n \leq 5$ 成立。这个结论是后续研究平方和线性型表示问题的基准^[9-10]。因此,Mordell 和柯先生对 Bhargava 工作的影响可以理解为问题范式上的先导:他们所揭示的低维例外、有限障碍、显式构造与整数格表示思想在 Conway-Schneeberger 15-定理以及 Bhargava-Hanke 证明的 290-定理中得到了更成熟、更系统的实现。

3 丢番图方程方面的贡献

3.1 对 Erdős 问题的反例构造

柯先生在丢番图方程方面有许多工作,其中一个颇具传奇色彩的例子是 $x^x y^y = z^z$ 。Erdős 问:是否存在 $x, y, z > 1$ 使得该方程成立^[16, 44]。1940 年,柯先生在一篇短文中给出了两个核心结果:若 $\gcd(x, y) = 1$, 则没有非平凡正整数解;在一般情形下,存在无穷多组非平凡解^[12]。证明的关键不是试算,而是把看似麻烦的公因子设计成调节指数失衡的参数,从而转化为构造无穷多解的核心自由度。设

$$x = Gu, y = Gv, z = Gw.$$

代入方程并取 G 次方根,可得等价条件

$$G^{u+v-w} u^u v^v = w^w.$$

若选择 $u + v - w = 1$, 则

$$G = \frac{w^w}{u^u v^v}.$$

因此,只需在平面 $u + v - w = 1$ 中找整点使 G 也为整即可。进一步,取

$$u = a^2, v = (a-1)^2, w = 2a(a-1),$$

便有

$$u + v - w = (a - (a-1))^2 = 1.$$

简单计算得

$$G = \frac{2^{2a(a-1)} (a-1)^{2(a-1)}}{a^{2a}}.$$

可见,要使 G 为整,只需 $a|2^{a-1}$, 即 $a = 2^n$, 从而得到

$$x = 2^{2a(a-1-n)} (a-1)^{2(a-1)} \cdot 2^{2n},$$

$$y = 2^{2a(a-1-n)} (a-1)^{2(a-1)} \cdot (a-1)^2,$$

$$z = 2^{2a(a-1-n)} (a-1)^{2(a-1)} \cdot 2^{n+1} (a-1).$$

例如,当 $n = 2$ 时,可得 $x = 2^{12} 3^6, y = 2^8 3^8, z = 2^{11} 3^7$ 。这个族还满足 $z^2 = 4xy$ 。

这项工作的可贵之处在于不是给出一个偶然反例,而是找到了一个有内在结构的参数化机制:互素情形的排除说明,素因子指数必须在 x, y, z 之

间高度同步;非互素情形的构造则反向利用大公因子 G 作为补偿指数差的自由参数。后来,Mills 明当 $4xy = z^2$ 时,非平凡解正是 Ko 族,并进一步按 $4xy$ 与 z^2 的相对大小进行分类^[16]。Schinzel、Dem'yanenko 和 Uchiyama 的结果又把问题推进到素因子支撑和固定参数 $Q = xy/z^2$ 的有限性研究^[13-15]。换句话说,柯召的构造留下的不是孤例,而是一条后续分类理论必须经过的边界线。

柯先生在方程 $x^x y^y = z^z$ 上的工作体现了数学创造中的一种开创性勇气:在互素情形已经表现出强烈“无解”迹象时,他没有停留在最自然、也最容易令人信服的判断上,而是进一步追问非互素情形中到底多出了什么结构。他敏锐地发现,公因子并不是可以简单约去的冗余量,而是能够调节指数平衡、产生无穷多组解的关键自由度。正是在这里,柯先生把看似麻烦的障碍转化为构造的资源,用初等而精巧的素因子分析、公因子分解和参数选择打破了“可能无解”的直觉,并为后来的分类研究提供了方向。对有志于数学学习的年轻人来说,这项工作的重要启发是:不要过早相信最顺手的归约,也不要把困难部分轻易视为噪音,真正的突破常常来自重新审视问题中被忽略的结构。数学勇气并不是盲目反对已有直觉,而是在严密推理中敢于追问“还有没有别的可能”,并把这种可能变成可验证、可推广的构造。这个例子说明,即使只使用朴素的工具,只要抓住了问题的核心自由度,也能做出具有持久影响的数学发现。

3.2 Catalan 猜想中的柯召定理

Catalan 猜想断言,8 与 9 是唯一相邻的两个大于 1 的整数方幂。等价地,方程

$$x^m = y^n + 1, x, y > 1, m, n > 1$$

除 $3^2 = 2^3 + 1$ 之外没有其他正整数解。柯先生关于方程 $x^2 = y^n + 1$ 的工作解决了 Catalan 猜想中的一个核心边界情形。其结论可表述如下:

定理 3.1 (柯召定理) 设 $x, y \in \mathbb{Z}, xy \neq 0$ 。若 $n > 1$, 则方程 $x^2 = y^n + 1$ 除 $n = 3, x = \pm 3, y = 2$ 之外没有其他整数解。

定理证明的真正难点是证明当 $p > 3$ 为奇素数时 $x^2 = y^p + 1$ 没有正整数解^[17-18]。Mordell 在专著《Diophantine Equations》中专门介绍这一结果,并称之为柯召定理。此外,2004 年 Mignotte 的论文也直接以“A New Proof of Ko Chao's Theorem”为题,可见该定理在 Catalan 问题研究中的重要

位置^[19-20]。

我们试证一下该结论。反设方程有正整数解,分解为

$$x^2 = (y+1)Q_p(y),$$

$$Q_p(y) = \frac{y^p + 1}{y + 1} = y^{p-1} - y^{p-2} + \dots - y + 1.$$

此时,应该关心 $\gcd(y+1, Q_p(y))$, 简单推导知 $\gcd(y+1, Q_p(y)) \mid p$, 这就可以分成两种情形讨论。 $\gcd(y+1, Q_p(y)) = 1$ 这种情形早已解决, 剩下的 $\gcd(y+1, Q_p(y)) = p$ 情形则长期悬而未决。我们来看柯先生是怎么解决它的。

首先,若有解,则可推出

$$2 \mid y, p \mid x, p \mid y+1,$$

并且由 $\gcd(y+1, Q_p(y)) = p$ 以及平方性可得到

$$y+1 = pu^2, Q_p(y) = pv^2,$$

其中 u, v 为整数^[20, 45]。接下来对原方程或派生出的等式中的一个造出矛盾即可。不同于初等数论的常见思路(找一个常数取同余),柯先生引入了随 y 变化的多项式值 $g(y)$, 对原方程或派生出的等式取模 $g(y)$, 并两端计算 Jacobi 符号: 只要两端算出不同的值就得出需要的矛盾。先看原方程, 只要

$$\left(\frac{y^p + 1}{g(y)} \right) = -1,$$

即可得到矛盾。这需要对 y 分类讨论。

1) 当 $y \equiv 2, 4, 6 \pmod{8}$ 时, 取 $g(y) = y^m - 1$, $m = 1$ 或 3 即可(略去计算)。

2) 当 $y \equiv 0 \pmod{8}$ 时, 你会发现 $\left(\frac{y^p + 1}{y^m - 1} \right) = 1$

对任何奇数 m 成立。此时, 注意最后一个方程: 取

$$Q_q(y) = \frac{y^q + 1}{y + 1} \text{ 并比较 Jacobi 符号 } \left(\frac{Q_p(y)}{Q_q(y)} \right).$$

一方面, 由 $Q_p(y) = pv^2$, 这个符号必须等于

$$\left(\frac{p}{Q_q(y)} \right).$$

但另一方面前者可通过类似辗转相除法计算出恒为 1, 而适当取 q 可以让后者为 -1 。这就得到了矛盾, 从而完成了证明。

从方法论上看, 这一证明把指数方程的求解问题转化为二次剩余符号的结构冲突, 展示了古典数论工具的组织能力: 分解 $\rightarrow$ 最大公因子控制 $\rightarrow$ 平方结构 $\rightarrow$ Jacobi 符号 $\rightarrow$ 互反律矛盾。后来,

Rotkiewicz 明确把柯召和 Terjanian 证明中的思想迁移到 Lehmer 数列研究中, 说明这种符号方法的影响并不限于方程 $x^2 = y^n + 1$ ^[45]。

3.3 从单一方程到 Catalan 问题的必要条件

1963 年, 柯先生在论文《关于 Catalan 问题》中进一步讨论

$$x^p = y^q + 1, x > 1, y > 1,$$

其中 p, q 为素数。在已知 p, q 较小情形无解之后, 真正困难的是 $p > q \geq 5$ 或 $q > p \geq 5$ 情形。柯先生在该文中证明: 若方程有整数解, 则存在整数 u, v , 使得

$$x = p^{q-1}(qv - 1)^q + 1,$$

$$y = q^{p-1}(pu + 1)^p - 1,$$

并且 u, v, p, q 必须满足一系列同余与整除条件^[46]。这些条件没有解决完整的 Catalan 猜想, 却把一个看似简单的相邻方幂问题转化为一套高度受限的同余系统。其意义正在这里: 它展示了经典初等方法在深问题中能推进到何处, 也让剩余困难显得更清楚。Mihăilescu 最终证明 Catalan 猜想时, 所用工具已进入分圆域、单位群和代数数论的深层结构^[21-22]。从这个角度看, 柯先生的工作处在古典方法达到高峰的位置: 它解决了重要边界情形, 也把问题剩余部分的深层性显露出来。

3.4 对后续数学的影响

柯先生在丢番图方程中的工作在之后有两层延续。直接层面, 他的 $x^2 = y^n + 1$ 定理与 Lebesgue 关于另一侧指数 2 的结果合在一起, 把 Catalan 猜想的主要困难压缩到两个指数均为奇素数的情形^[21, 47]。Chein、Mignotte 等后来给出新的证明或简化证明, 也说明这个命题已成为检验和展示不同数论方法的标准对象^[20, 48]。间接层面, 柯召方法进入了更广的 Lebesgue-Nagell 型方程和 Lucas-Lehmer 数列研究传统。方程 $x^2 + C = y^n$ 通常被归入 Lebesgue-Nagell 型或广义 Ramanujan-Nagell 型方程。柯召定理对应 $C = -1$ 。1993 年, Cohn 在研究该类方程时把它列为已有经典结果之一^[49]。Bugeaud-Mignotte-Siksek 后来系统处理若干 Lebesgue-Nagell 方程时, 所用技术已经远超柯先生的二次互反律方法^[50]。孙琦、袁平等系统研究了方程 $Ax^4 - By^2 = \pm C, C \in \{1, 2, 4\}$ 。这类方程与 Lucas-Lehmer 数列等经典数论问题相关, 他们的结果涵盖了某些国外学者的猜想, 且解决过程中需要用推广的柯方法和不定逼近方法。

柯先生的证明的精妙之处在于,他并未停留于对原方程作若干固定模数下的初等排除,而是从方程本身的因式分解结构出发构造出随假设解而变化的二次剩余条件,并通过雅可比符号的精细计算将这些条件组织成互反律意义下的矛盾。具体地说,方程 $x^2 - 1 = y^p$ 的可解性迫使若干由 y, p 及相关因子构成的数在适当模数下表现为平方剩余。而柯先生的关键观察在于,这些“必须为平方”的信息可以借助二次互反律重新翻转计算,最终导出同一符号同时应为 $+1$ 与 -1 的不相容结论。这种方法的高明之处正在于它不是机械地使用同余,而是将方程的乘法结构、由解诱导的模对象以及二次互反律的全局约束结合起来,从而把一个具体的指数型丢番图问题转化为一个二次角色不可能一致的问题。

从现代观点看,这一思想与 Wiles 利用椭圆曲线模性解决费马大定理的方法之间存在一种高低维的深层类比。柯先生的方法处在 GL_1 的层面:其核心对象是一维的二次角色或雅可比符号,支配原则是二次互反律这一阿贝尔互反律;Wiles 的方法则处在 GL_2 的层面:从假设存在的费马方程解出发构造 Frey 椭圆曲线,进而得到二维 Galois 表示,再通过椭圆曲线的模性、Ribet 定理和模性提升理论导出矛盾。二者的技术工具和理论高度当然不可混同,但证明范式具有显著的共同结构:都不是直接寻找或估计方程的整数解,而是从假设构造一个受全局互反律或模性原则约束的算术对象,再证明该对象的局部性质与全局约束不能相容。因此,柯召的方法虽然不是现代意义上的椭圆曲线模性方法,却在一维二次层面上已经体现出后来“模方法”的若干核心思想:由丢番图方程的假设解制造辅助算术对象,通过互反律或模性原则控制其全局一致性,并以此排除解的存在。正是在这个意义上,柯召的证明不只是一次高超的二次互反律应用,也可以被视为现代数论中“由解造对象、由结构判不可能”这一思想范式的早期而清晰的体现。

4 Erdős-Ko-Rado 定理与极值组合的发展

4.1 定理的基本形式和证明思路

1961年,Erdős、柯召和 Rado 发表论文《Intersection theorems for systems of finite sets》^[23]。这篇论文研究了有限集合的子集族在交集条件下的

最大规模,得到如下定理:

定理 4.1 (Erdős-Ko-Rado) 设 $m \geq 2k$, $\mathcal{A}$ 是 $[m] = \{1, \dots, m\}$ 的若干 k 元子集组成的族。若任意 $A, B \in \mathcal{A}$ 都满足 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $|\mathcal{A}| \leq \binom{m-1}{k-1}$ 。

当 $m > 2k$ 时,等号成立的典型情形是所有包含某个固定元素的 k 元子集所成的族。

这是原文主定理(后称 EKR 定理)的特殊形式。一般形式如下:可以要求任意两个集合的交至少有 r 个元素,并给出在 m 相对于 k, r 足够大时的最优上界

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{m-r}{k-r}.$$

极值例子是所有包含某个固定 r 元集合的 k 元子集^[51]。此类族后来常被称为“星形族”或平凡相交族。该定理的形式如此朴素,以至于第一次看到时容易低估它,但正是在这种朴素形式中,极值集合论后来许多问题的雏形已经出现。

我们强调定理 4.1 这种简单形式是因为有一个很有启发性的圆排列证明。在 EKR 定理的深处,不只在给出上界 $\binom{m-1}{k-1}$, 还在于说明达到上界的典型方式是星形族。固定一个点,取所有包含它的 k 元集,得到一个很自然的大相交族。定理证明的难点的是去证明没有更分散、更隐蔽的构造能够超过它。许多极值组合问题都有这样的性格:最优例子看起来简单,但证明其不可超越却并不简单。后来稳定性定理、反稳定性定理、junta 结构和容器方法等研究方向仍在反复追问同一类问题:若一个对象接近最优,它是否必须接近某种可以清楚描述的形状^[52]? 从这个意义上说,EKR 定理早早地把“数值上界”和“极值形状”放在了一起。

思考一下定理 4.1 的证明。EKR 问题可以用一句话说明:在所有 k 元子集中,最多能取多少个,使得任意两个都相交? 但是,可选集合族的总数为 $2^{\binom{m}{k}}$, 随 m, k 急剧增长。因此,验证某个候选族是否相交并不难,难的是证明所有候选族都不能比星形族更大。同时,相交条件又是全局约束:一个集合能否加入族中不只取决于它本身,还取决于它与同族中每一个集合的关系。正因如此,简单枚举或局部贪心并不能解释该定理。不使用原证明,Katona 给出了 EKR 定理的著名的圆排列证

明^[53]:把 $[m]$ 的元素排在圆周上,考虑圆周上的区间(元素紧挨着),它是特殊的子集。如果定理 4.1 中需要描述的子集族中每个子集都是区间,那么满足相交条件的最大规模就很好数,即有下列关键事实:

在一个固定圆排列中,两两相交的长度 k 区间的个数上界是 k 。

这个上界就容易给出定理 4.1 需要的 $|\mathcal{A}|$ 的上界。本质原因是,每个 $A \in \mathcal{A}$ 都在一定的圆排列 σ 下成为区间。具体来说,这样的 σ 有 $k!(m-k)!$ 个,把所有配对 (A, σ) 放到一起计数(利用楷体所述的事实)就得到

$$|\mathcal{A}|k!(m-k)! \leq k(m-1)!,$$

从而

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{m-1}{k-1}.$$

这个后来的短证明很能说明 EKR 定理的本质:真正关键的不是复杂计算,而是找到一种视角,把局部相交约束转化为全局计数不等式。

我们还应记住它的历史处境。Erdős 回忆说,这篇与柯先生合作的论文在 1938 年前后已经基本完成,但由于当时组合数学尚未引起广泛关注,论文直到 1961 年才发表^[54]。今天的读者背后已有压缩法、线性代数方法、图谱方法、Delsarte 方法、概率方法乃至计算搜索。而在当时许多语言和工具尚未标准化。EKR 定理的困难在于:在缺乏结构的当年,需要在巨大的离散空间中证明全局最优。它的意义也正是在于:它在一套成熟学科工具出现之前已经抓住了后来反复出现的一种结构性问题。

4.2 后续影响

EKR 定理发表后,“相交族最大规模”很快成为一个不断生长的问题网络。Hilton-Milner 定理研究不存在全局公共点的相交族最大规模,由此出现 EKR 极值结构之外的次优结构^[55]。Frankl-Wilson 和 Wilson 的工作把交集定理同线性代数、多项式方法和有限几何联系起来,影响组合设计和离散几何^[56-57]。Hsieh 把“集合相交”推广为“有限向量空间中的子空间相交”,成为 q -analog EKR 理论的重要早期代表^[58]。Ahlsvede-Khachatrian 的完整交集定理则解决了更一般的 t -相交族极值问题^[59]。

通过 Kneser 图, EKR 定理还可以看作最大独

立集问题。Kneser 图 $KG(m, k)$ 的顶点是 $[m]$ 的所有 k 元子集,两点相邻当且仅当对应集合互不相交,于是其相交族正是 $KG(m, k)$ 中的独立集。EKR 定理等价于

$$\alpha(KG(m, k)) = \binom{m-1}{k-1} (m \geq 2k),$$

并在 $m > 2k$ 时刻画最大独立集结构。这样一来,关联方案、Johnson 图、Hamming 图、Grassmann 图、特征值界和 Delsarte 线性规划等方法都能自然进入 EKR 型问题^[25]。

从理论计算机科学看, EKR 型问题又同布尔函数、影响量、junta 结构、错误纠正码、属性测试、约束满足和极值图论相连。背后的思想仍然是同一个:由局部限制定义的高维离散对象,若规模已经接近最大,是否必然要集中到少数坐标、少数参数或某种可描述的结构上去?这正是现代离散数学和计算复杂性中反复出现的问题类型^[60]。

4.3 EKR 定理在 AI 时代的意义

在极值组合学中,能够反复支配许多不同问题的基本构型并不容易出现。EKR 定理清楚揭示了其中一种非常重要的构型,即在局部相交约束下最大的集合族往往集中在一个共同中心周围。EKR 定理的重要性不只在于给出了一个相交集合族的最优上界,更在于它揭示了极值组合中一种反复出现的基本图像:局部相交条件并不只是限制数量,它还会迫使最大的对象向一个共同中心集中。固定一个元素而取所有包含它的 k 元子集看似是最自然、甚至最朴素的构造, EKR 定理的力量正在于证明,在适当范围内,这个朴素构造已经穷尽了最优可能。此后的许多 EKR 型问题,无论把集合换成子空间、置换、图的子结构或编码,追问的仍是同一类现象:局部相交约束在何种条件下决定全局最大规模,并进一步决定极值对象的形状。

在今天重读 EKR 定理,我们还可以看到一种新的时代意义。近年来, AI 在组合问题中显出力量并不是偶然的。组合数学中有一类问题,空间极大而对象有限,条件局部而目标全局,构造可以计算检验而最优性又不能靠穷举得到。EKR 定理正是这类问题的早期典范:任意两个集合相交,是极朴素的局部条件;最大的族却被迫集中到一个共同中心上。这样一个结果告诉人们,组合世界中并非只有杂乱的可能性,局部限制有时会逼出低复杂度、可描述、甚至近乎唯一的结构。今天,

虽然AI可以在巨大离散空间中寻找构造、发现模式、提出猜想,但EKR定理也提醒我们,极值组合的真正核心不只是找到大例子,而是解释为什么所有更复杂的例子都不能超过它。由此看来,EKR定理对AI时代的意义不在于直接提供某个算法,而在于它展示了一种极适合机器与人共同探索的数学形态:有限对象、清楚约束、可检验构造,以及最终必须回到严格上界和结构证明的创造过程。

4.4 EKR定理对川大数学研究传统的影响

EKR定理对柯召学术传统的意义,并不只是“有一篇著名合作论文”。柯先生与魏万迪合著的《组合论》是中国组合数学早期重要教材之一^[60]。魏万迪后来长期在组合设计、矩阵论与图论等方向工作,并培养出陈永川、高绪洪、向青等优秀学生。这些方向同EKR定理所代表的极值集论、有限结构和编码思想有天然联系。在这个意义上,EKR定理像一个枢纽:一端连接Erdős、Rado所代表的国际组合数学传统,另一端连接柯先生在四川大学开辟的组合、有限域、编码和应用数学脉络。一个定理的生命力,有时正体现在这里:它离开最初发表的页面,不断进入新的对象和新的问题,成为后人学习、推广和创造的起点。

5 数论应用、编码理论与有限域研究

柯先生并不把数论视为封闭的纯理论。他长期重视数论与组合数学在应用中的作用,曾参与国防应用数学相关工作,并推动数论应用方向的人才培养。由于部分工作有保密背景,许多具体内容无法公开详述,但他的研究团队曾多次获得国防应用奖,也为有关部门培养了大量数学人才^[3]。

进入二十世纪八十年代以后,有限域逐渐成为柯先生及其学生们后继研究中的一个重要共同对象。有限域既是代数数论和函数域算术的基本舞台,也是编码、密码、有限几何和组合设计的基础语言。柯召学派后继学者中,孙琦、魏万迪、李德琅等人分别延续不定方程、组合数学、二次型等方向。再往后,万大庆、高绪洪、向青、屈明华、韩文报等人的工作又把有限域、函数域、编码和密码推向更广阔的国际前沿^[26-28]。此外,还有一个很年轻的后辈张子涵,他2022年从川大本科毕业,今年

在美博士毕业,并因解决一个20年的猜想被理论计算机顶会评为最佳学生论文奖,同时拿到普林斯顿高等研究院的2年职位。他起步是学的代数数论、代数几何,现在的研究方向是理论计算机,与组合设计、有限几何、编码都有关系,可以说兜了一圈回到了与柯先生的研究很接近的方向。

这种发展说明,柯先生的影响并不只体现在某一个定理被反复引用,更深的的影响在于他使后来的学生和再传弟子不断看到:经典数论中的具体问题可以通向现代工具,基础数学中的离散结构也可以进入信息科学和工程应用。这样的认识对川大的数学传统产生了持久作用。

6 从经典数论到现代数论:点滴记忆

柯召先生和华罗庚先生都在经典数论方面取得了极高成就。但就现代数论而言,中国数学整体起步较晚。特殊年代结束、改革开放开启之后,中国数论界逐渐意识到,外面的数学世界已经发生根本变化:二十世纪七十年代 Deligne 的定理、八十年代 Faltings 的定理,以及九十年代 Wiles 对费马大定理的证明,都表明“不定方程”已经不再只是初等技巧和局部计算的战场,而是越来越深地依赖于代数几何、类域论、模形式和表示论等现代工具。

1993年,Wiles首次宣布证明费马大定理后,他的学生 Richard Taylor 应丁石孙先生之邀赴北京大学讲授相关内容,途中顺访四川大学。李德琅老师在剑桥大学访问期间就认识 Taylor。正是李老师向丁先生推荐促成了 Taylor 的来华讲学。当时本文的两位作者都还是学生,一位师从李德琅老师,一位师从孙琦老师。他们听完报告后虽未能理解其中深意,却第一次真切感受到现代数论的深度与广度,也意识到代数几何和类域论将成为进入现代数论不可绕开的基础。这一段记忆之所以值得保留,是因为它不只是一次学术访问的插曲。丁石孙先生自上世纪七十年代末起不断呼吁年轻学者冲刺现代意义下的代数数论。八十年代中期,在他的推动下,天元基金把代数数论列为重点方向,并使其与代数几何方向形成深度结合。丁先生组织和影响下的那一代中国代数数论工作者承担的是一种承前启后的任务:他们既要尽力追赶世界前沿,也要为后来者铺路。从后来年轻一代华人数论学家的崛起回看,这一代人的

开路之功和人梯精神理应在柯召先生纪念文章中留下位置。

四川大学的李德琅老师正是这条现代代数数论脉络中的重要人物之一。他对类域论有独到而深刻的理解。事实上,他在二次型方面的代表性工作中已经巧妙运用了类域论思想^[39]。多年以后,即使退休,他仍然持续关注并尝试用类域论方法研究 Vandiver 猜想。该猜想断言:设 $\mathbb{Q}(\mu_p)$ 为分圆域, $\mathbb{Q}(\mu_p)^+$ 为其极大实子域,若 h_p 表示 $\mathbb{Q}(\mu_p)^+$ 的类数,则 $p \nmid h_p$ 。这个猜想与费马大定理、分圆域类数以及深层类域论问题紧密相关。我们在这里回忆李老师并不是要把未完成的尝试当作既成成果,而是要纪念一种敢于面对大问题、愿意把一生经验压向深处的数学气质。

他曾给出过一份看似十分接近正确的 Vandiver 猜想“证明”。Wiles 的导师 Coates 教授认真研读后判断证明不可能成立,但也坦言“看起来每一步似乎都是对的”。后来,通过与一个更强命题的反例对照才找出其中的疏漏。这段故事当然不能作为数学结果引用,却能说明李老师对类域论技巧的掌握、对大问题的执着,以及那一代代代数数论工作者面对世界前沿时的胆识和压力。

1994 年春,在李德琅老师建议下,在当时的四川大学,由彭国华老师牵头,博士后刘春雷、博士生张起帆、硕士生田野共同参与的代数几何讨论班正式开始,主要研读 Hartshorne 的教材。后来,交换代数、椭圆曲线、代数曲线等课程和讨论不断延续,既为椭圆曲线密码等应用方向提供基础,也为更多学生进入现代数论打开了门。从这个意义上看,丁石孙先生所代表的国家层面的现代代数数论布局,李德琅老师在川大的具体推动,以及柯召学派原有的经典数论训练,在九十年代前后汇合成了一条承前启后的暗线。

7 数学文化开拓者

回首柯召先生在二次型、丢番图方程和组合数学中的重要成果,可以看到它们在多年以后仍以不同方式继续发光: Erdős-Ko-Rado 定理已经成为极值集合论和信息科学中反复出现的基本模型;不定方程中的“柯方法”成为训练学生同余计算和结构判断的经典素材;二次型理论则在格、编码、拓扑和现代算术问题中不断获得新的解释。这些事实说明,一个真正好的数学问题,往往会比

它最初的论文语境活得更久。

柯召先生自己也很重视这种对青年人的启发。在 1990 年 80 大寿庆祝会上,他曾讲起初到 Mordell 门下时的一段往事。Mordell 给了他一个问题,让他先思考两个星期。两周后,柯先生汇报说自己没有得到任何结果。Mordell 却说,这个问题他自己已经想了三年,同样没有得到任何结果。旁人不解, Mordell 解释说,他并不是有意刁难,而是真心希望年轻人能够得到一些东西,因为年轻人是可能创造奇迹的。柯先生在晚年讲起这段经历,既是在回忆自己的学术起点,也是在把这种对青年创造力的信任传给后辈。他接着还说,年轻时在火车上也可以工作;年纪稍大在火车上还能看数学书;再后来在火车上连数学书也看不进去了,只能看围棋书。这番话有幽默,也有岁月感。它让人看到,数学家的精神遗产并不总以宏大口号出现,有时只是一种对时间、学问和青年人的清醒体会。

2020 年,在柯召先生诞辰 110 周年纪念会上,王元先生称柯召为“数学文化西部开发的先驱者”^[2]。这一评价十分精当。柯先生长期深耕川渝,数十年如一日地从事教学、科研和人才培养,在潜移默化中提升了整个地区的数学文化水平。近二十年来,从巴蜀大地走出的一批年轻数学家活跃在现代数论、代数几何和表示论等国际前沿,也从侧面说明这种文化滋养具有深厚而持久的力量。

四川大学数学学院后来设立“柯召杰出学者讲座”,邀请重要数学家面向以本科生为主体的听众介绍前沿思想。张寿武教授做了首期讲座,张益唐教授做了首期线上讲座。做过讲座的还包括柯先生的优秀学生万大庆教授,优秀后继江华教授,以及从川渝地区走出去活跃在国际数学界的年轻数学家张伟、许晨阳、朱歆文和何旭华,与四川大学交流密切的袁新意,刘一峰,还有外国数学家 Lusztig 和 Hida 等。这类活动的意义并不只是纪念一位前辈,更是在提醒年轻学生:经典问题可以通向现代工具,扎实训练可以通向世界前沿,而一所大学的数学传统,也正是在这样的持续讲述、学习和传承中保持生命力。

8 结束语

柯召先生的数学贡献横跨二次型、丢番图方程和组合数学等多个领域。在二次型领域,他解

决了正定二次型有理平方和表示的最优项数问题,在整系数情形给出低秩精确边界并揭示秩六障碍,还围绕 Meyer 定理发展了新的证明思路。在丢番图方程领域,他给出了反直觉的指数方程构造,并在 Catalan 猜想偶指数情形取得重大突破。在组合数学领域,他与 Erdős、Rado 共同开创的 EKR 定理成为极值集合论的基本定理之一。这些成果的共同点是把具体问题做到极致,并在具体问题中显出足以传给后人的方法风格:二次型工作把平方和问题推进到标准格嵌入、不可分解型和局部-整体障碍;丢番图工作把指数方程中的素因子结构和二次互反律组织成可迁移的方法;EKR 定理则使有限集合族的局部交性约束成为后来极值组合反复回到的基本模型,并在今天的 AI 辅助数学探索中仍能给人以问题设计上的提醒。正因如此,柯先生的影响并不止于几条定理:它进入了孙琦、魏万迪、李德琅等学生各自展开的方向,也进入了万大庆等再传弟子面对现代数论和有限域问题时的选择方式。这种从 Mordell 到柯召、再到后辈学者的延续,不是形式上的师承表,而是一种“以问题统摄技巧、以训练支撑创造”的数学精神。

在四川大学建校 130 周年的节点回望柯召先生,我们看到的是一位数学家的多重遗产:经典论文中的精确结果,课堂和教材中的训练价值,西部数学文化中的开拓意义,以及丁石孙先生、李德琅老师等一代人把中国数论推向现代前沿时的共同记忆。真正深刻的数学贡献,不只存在于发表当年的论文页码中,它还会在后来的问题、方法、学生和学术文化里继续生长。

致谢 首先感谢德高望重的白苏华老师,他不仅是《柯召传》的作者和《柯召文集》的主要编委,还对本文的写作提出了本质性建议。在整个写作过程中,我们先后咨询了两位数论界前辈陆洪文老师和冯克勤老师,还与万大庆、高绪洪、向青等几位师兄多次交流。此外,几位晚辈熊玮、许宾、范久瑜、杨丽萍一直提供无私的帮助。谨向上述各位同仁一并致谢。

参考文献:

- [1] 白苏华. 柯召传[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [2] 中国科学院学部. 柯召传[EB/OL]. [2026-06-25]. <https://casad.cas.cn/xbcg/kxwhxl/yscj/kzz/>.
- [3] 九三学社中央委员会. 柯召: 中国科学院学部委员(院士)、数学家[EB/OL]. (2010-07-12) [2026-06-25]. <https://www.93.gov.cn/html/93gov/zt/70/rwsm/150819090140617576.html>.
- [4] Ko C. On the representation of a quadratic form as a sum of squares of linear forms [J]. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, 1937(1): 81-98.
- [5] Ko C. Note on the representation of a quadratic form as a sum of squares of linear forms [J]. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, 1938 (9): 32-33.
- [6] Ko C. On a Waring's problem with squares of linear forms [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1937, 42: 171-185.
- [7] Ko C. On the decomposition of quadratic forms in six variables [J]. Acta Arithmetica, 1939, 3: 64-78.
- [8] Erdős P, Ko C. On definite quadratic forms, which are not the sum of two definite or semi-definite forms [J]. Acta Arithmetica, 1939, 3: 102-122.
- [9] Icaza M I. Sums of squares of integral linear forms [J]. Acta Arithmetica, 1996, 74: 231-240.
- [10] Kim M H, Oh B K. Representations of positive definite senary integral quadratic forms by a sum of squares [J]. Journal of Number Theory, 1997, 63: 89-100.
- [11] Kim M H, Oh B K. Representations of integral quadratic forms by sums of squares [J]. Mathematische Zeitschrift, 2005, 250: 427-442.
- [12] Ko C. Note on the Diophantine equation $x^x y^y = z^z$ [J]. Journal of the Chinese Mathematical Society, 1940, 2: 205-207.
- [13] Schinzel A. Sur un problème de P. Erdős [J]. Colloquium Mathematicum, 1958, 5(2): 198-204.
- [14] Dem' yanenko V A. On a conjecture of A. Schinzel [J]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Matematika, 1975(8): 39-45.
- [15] Uchiyama S. On the Diophantine equation $x^x y^y = z^z$ [J]. Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova, 1984, 163: 237-243.
- [16] Bloom T F. Erdős Problem #674 [EB/OL]. [2026-06-25]. <https://www.erdosproblems.com/674>.
- [17] Ko C. On the Diophantine equation $x^2 = y^n + 1$ [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Szechuanensis, 1960, 2: 57-64.
- [18] Ko C. On the Diophantine equation $x^2 = y^n + 1, xy \neq 0$ [J]. Scientia Sinica (Notes), 1965, 14: 457-460.
- [19] Mordell L J. Diophantine Equations [M]. London: Academic Press, 1969.

- [20] Mignotte M. A new proof of Ko Chao's theorem [J]. *Mathematical Notes*, 2004, 76: 358-367.
- [21] Bilu Y F. Catalan's conjecture [J]. *Séminaire Bourbaki*, 2002, 45(909): 1-26.
- [22] Mihăilescu P. Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture [J]. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2004, 572: 167-195.
- [23] Erdős P, Ko C, Rado R. Intersection theorems for systems of finite sets [J]. *Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series*, 1961, 12: 313-320.
- [24] Deza M, Frankl P. The Erdős-Ko-Rado theorem: 22 years later [J]. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 1983, 4(4): 419-431.
- [25] Godsil C, Meagher K. Erdős-Ko-Rado theorems: Algebraic approaches [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [26] Wan D Q. Dwork's conjecture on unit root zeta functions [J]. *Annals of Mathematics*, 1999, 150: 867-927.
- [27] Wan D Q. Rank one case of Dwork's conjecture [J]. *J Amer Math Soc*, 2000, 13(4): 853-908.
- [28] Wan D Q. Higher rank case of Dwork's conjecture [J]. *J Amer Math Soc*, 2000, 13(4): 807-852.
- [29] Mordell L J. A new Waring's problem with squares of linear forms [J]. *Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series*, 1930, 1: 276-288.
- [30] Mordell L J. On the representation of a binary quadratic form as a sum of squares of linear forms [J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1932, 35: 1-15.
- [31] Ko C. Determination of the class number of positive quadratic forms in nine variables with determinant unity [J]. *Journal of the London Mathematical Society*, 1938, 13: 102-110.
- [32] Ko C. On the positive definite quadratic forms with determinant unity [J]. *Acta Arithmetica*, 1939, 3: 79-85.
- [33] O'Meara O T. Introduction to quadratic forms [M]. Berlin: Springer, 1973.
- [34] Hsia J S, Kitaoka Y, Kneser M. Representations of positive definite quadratic forms [J]. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1978, 301: 132-141.
- [35] Ko C. On the Meyer's theorem and the decomposition of quadratic forms [J]. *Journal of the Chinese Mathematical Society*, 1940, 2(3): 209-224.
- [36] 柯召文集编委会. 柯召文集[M]. 成都: 四川大学出版社, 2000.
- [37] Conway J H, Sloane N J A. Sphere packings, lattices and groups [M]. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [38] Cassels J W S. Rational quadratic forms [M]. London: Academic Press, 1978.
- [39] Li D L. Indefinite binary forms representing the same numbers [J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1982, 92(1): 29-33.
- [40] Hsia J S, Shao Y Y, Xu F. Representations of indefinite quadratic forms [J]. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1998, 494: 129-140.
- [41] Xu F. Representation masses of spinor genera [J]. *Duke Mathematical Journal*, 2001, 110(2): 279-307.
- [42] Bhargava M. Higher composition laws I: A new view on Gauss composition, and quadratic generalizations [J]. *Annals of Mathematics*, 2004, 159(1): 217-250.
- [43] Bhargava M, Hanke J. Universal quadratic forms and the 290-Theorem [EB/OL]. [2026-06-25] <https://math.stanford.edu/~vakil/files/290-Theorem-preprint.pdf>.
- [44] Erdős P. Some unconventional problems in number theory [J]. *Mathematics Magazine*, 1979, 52(2): 67-70.
- [45] Rotkiewicz A. Applications of Jacobi's symbol to Lehmer's numbers [J]. *Acta Arithmetica*, 1983, 42: 163-187.
- [46] Ko C. On the problem of Catalan [J]. *J Sichuan Univ (Nat Sci Ed)*, 1963, 9(2): 1-8. [柯召. 关于 Catalan 问题[J]. 四川大学学报(自然科学版), 1963, 9(2): 1-8.]
- [47] Lebesgue V A. Sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation $x^m = y^2 + 1$ [J]. *Nouvelles Annales des Mathématiques, Series 1*, 1850, 9: 178-181.
- [48] Chein E Z. A note on the equation $x^2 = y^q + 1$ [J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1976, 56: 83-84.
- [49] Cohn J H E. The Diophantine equation $x^2 + C = y^n$ [J]. *Acta Arithmetica*, 1993, 65(4): 367-381.
- [50] Bugeaud Y, Mignotte M, Siksek S. Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations (II): The Lebesgue-Nagell equation [J]. *Compositio Mathematica*, 2006, 142(1): 31-62.
- [51] Sperner E. Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge [J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1928, 27: 544-548.
- [52] Ellis D. Intersection problems in extremal combina-

- torics: Theorems, techniques and questions old and new [PP/OL]. V8. (2021-09-24) [2026-06-25]. <https://arxiv.org/abs/2107.06371>.
- [53] Katona G O H. A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem [J]. J Combin Theory Ser B, 1972, 13(2): 183-184.
- [54] Erdős P. My joint work with Richard Rado [M]// Whitehead C A. Surveys in Combinatorics. Cambridge: Cambridge University Press, 1987: 53-80.
- [55] Hilton A J W, Milner E C. Some intersection theorems for systems of finite sets [J]. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, 1967, 18: 369-384.
- [56] Frankl P, Wilson R M. Intersection theorems with geometric consequences [J]. Combinatorica, 1981, 1: 357-368.
- [57] Wilson R M. The exact bound in the Erdős-Ko-Rado theorem [J]. Combinatorica, 1984, 4(2/3): 247-257.
- [58] Hsieh W N. Intersection theorems for systems of finite vector spaces [J]. Discrete Mathematics, 1975, 12(1): 1-16.
- [59] Ahlswede R, Khachatrian L H. The complete intersection theorem for systems of finite sets [J]. European Journal of Combinatorics, 1997, 18(2): 125-136.
- [60] 柯召, 魏万迪. 组合论(上)[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- (责任编辑: 周兴旺)