

Pasternak 地基中 $H(t)$ - V 受荷桩水平响应有限杆单元法分析

江杰^{1,2,3}, 艾永林^{1,2}, 柴文成^{1,2}, 龚健^{1,2}, 欧孝夺^{1,2,3†}, 邵云怡⁴

(1. 广西大学 土木建筑工程学院, 广西 南宁, 530004;

2. 广西大学 特色金属材料与组合结构全寿命安全国家重点实验室, 广西 南宁, 530004;

3. 广西瑞宇建筑科技有限公司, 广西 南宁 530299;

4. 中船第九设计研究院工程有限公司, 上海 200063)

摘要:为探讨桩顶水平动荷载 $H(t)$ 与竖向荷载 V 联合作用下桩基的水平响应, 基于 Pasternak 地基和 Euler 梁理论, 建立了桩-土相互作用水平振动分析模型, 采用改进的有限杆单元方法求解考虑 P - Δ 效应、土体剪切效应影响的综合刚度矩阵方程, 结合桩土连续边界条件得到桩身内力与位移解答. 通过与已有解析解、有限元解和模型试验的结果比较, 验证了计算方法的合理性. 最后, 对影响桩身内力与位移的主要因素进行分析. 结果表明: 1) 传统 Winkler 地基相较于 Pasternak 地基模型, 忽略了地基土体的剪切效应, 将夸大桩体结构的实际受力, 使得计算得到的桩身水平位移和弯矩均大于 Pasternak 地基所得结果, 且随着桩土弹模比 E_p/E_s 的降低, 两种地基模型计算的桩身最大水平位移和弯矩的差异性呈现出增强趋势; 2) 随着桩顶竖向荷载的增加, 桩身水平位移和弯矩受 P - Δ 效应的影响显著. 当桩顶竖向荷载特征参数 λ 由 0 增至 2 时, 桩身最大水平位移和弯矩分别提高 40.85% 和 78.57%; 3) 相较于无限长桩 ($L > 20d_p$), 有限长桩的水平位移和弯矩的动力响应受桩身长径比 L/d_p 影响更大; 桩身最大水平位移和弯矩随着水平简谐荷载幅值 H_0 的增加而增大, 随着无量纲频率 a_0 的增大而减小.

关键词:水平动荷载; 轴向荷载; 有限单元法; Pasternak 地基; 动力响应

中图分类号: TU473.1

文献标志码: A

Analysis of Lateral Response of $H(t)$ - V Loaded Pile in Pasternak Foundation by Finite Beam Element Method

JIANG Jie^{1,2,3}, AI Yonglin^{1,2}, CHAI Wencheng^{1,2}, GONG Jian^{1,2}, OU Xiaoduo^{1,2,3†}, SHAO Yunyi⁴

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China;

2. State Key Laboratory of Featured Metal Materials and Life-cycle Safety for Composite Structures, Guangxi University, Nanning 530004, China;

3. Guangxi Ruiyu Construction Technology Co., Ltd, Nanning 530299, China;

4. China Shipbuilding NDRI Engineering Co., Ltd, Shanghai 200063, China)

Abstract: To investigate the lateral response of a pile under the combined action of lateral harmonic load $H(t)$ and vertical load V at the top of the pile, based on the Pasternak foundation and Euler beam theory, a lateral

* 收稿日期: 2023-03-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52068004), National Natural Science Foundation of China(52068004)

作者简介: 江杰(1979-), 男, 湖北麻城人, 广西大学教授, 博士生导师

† 通信联系人, E-mail: ouxiaoduo@163.com

vibration analysis model of pile-soil interaction is established. The improved finite beam element method is used to solve the comprehensive stiffness matrix equation considering the $P-\Delta$ effect and soil shear effect, and the corresponding analytical solution is obtained by combining the pile-soil continuous boundary conditions. The rationality of the proposed method is verified by comparing its predictions with the results of existing analytical solutions, finite element solutions, and model tests. Finally, the main factors affecting the internal forces and deformations of the pile are analyzed. The results show that: 1) Compared with the Pasternak foundation model, the traditional Winkler foundation ignores the shear effect of the foundation soil, which exaggerates the actual force of the pile so that the calculated lateral displacement and bending moment of the pile are larger than the results obtained by the Pasternak foundation. Additionally, as the pile-soil elastic modulus ratio (E_p/E_s) decreases, the difference in maximum lateral displacement and bending moment between the two foundation models becomes increasingly pronounced; 2) As the vertical load on the pile head increases, the lateral displacement and bending moment of the pile are significantly affected by the $P-\Delta$ effect. When the characteristic parameter λ of the vertical load on the pile head increases from 0 to 2, the maximum lateral displacement and bending moment of the pile increase by 40.85% and 78.57%, respectively; 3) Compared with the infinite pile ($L > 20d_p$), the dynamic response of the lateral displacement and bending moment of the finite pile is more affected by the slenderness ratio L/d_p ; The maximum lateral displacement and bending moment of the pile increase with the increase of the amplitude of the horizontal harmonic load H_0 , and decrease with the increase of the dimensionless frequency α_0 .

Key words: horizontal harmonic load; axial loads; finite element method; Pasternak foundation; dynamic response

桩基础作为海上风机、港口码头、桥梁和高速铁路等建设工程中所采用的重要基础型式,其在承受竖向力 V 的同时,还会承受来自波浪、风、地震等水平动荷载 $H(t)$ 的作用^[1-3].在轴、横向静-动荷载作用下,桩基结构的受力变形分析往往较为复杂^[4],为此探讨复杂动力环境下桩基的水平振动响应,对揭示桩基的受力特性分析具有重要意义.

关于桩基水平振动响应的计算方法,目前常见的有分离变量法^[5]、传递矩阵法^[6]和有限单元法^[7].其中胡安峰等^[5]和 Mylonakis 等^[6]基于动力 Winkler 地基模型,分别利用分离变量法和传递矩阵法计算得到水平简谐荷载作用下均质、层状地基中单桩的水平振动解析解,然而上述计算方法在复杂荷载和复杂边界条件下,数学推导涉及多项积分运算,求解过程较为繁琐,在工程中难以有效推广.有限杆单元法通过构造桩基的整体刚度方程,对复杂荷载和边界条件处理较为简便,计算结果可靠,在桩基础等杆系结构的受力分析中得到了广泛应用^[8-13].利用有限杆单元法,赵明华等^[8-10]和黎学优等^[11-12]进行了桩顶静力荷载作用下桩基的受力分析;进一步地,蒯行成等^[13]基于动力 Winkler 地基模型,推导了单桩水平动力阻抗的计算方法;覃玉兰等^[7]基于动力 Winkler 地

基模型求解了桩顶水平简谐荷载 $H(t)$ 与扭矩 T 组合荷载作用下单桩的内力与位移.

上述研究普遍将桩周土体简化为 Winkler 地基模型,用单一参数表示土体的连续性,虽计算简便,但相较双参数 Pasternak 地基模型忽略了地基土体的剪切效应,计算结果存在一定的误差^[14].因此,众多学者围绕 Pasternak 地基在桩基的动力响应中的应用进行了研究.例如, Bhaduri 等^[15]和王珏等^[16-17]将地基等效为 Pasternak 地基,分别采用傅里叶变换和荷载传递矩阵法推导得到单桩的水平振动解析解. Qetin 等^[18]探究了均质 Pasternak 地基弹性参数对桩基自由振动响应的影响.值得注意的是,上述研究大多仅考虑水平动荷载作用对桩基的动力响应.

而在实际工程中,桩基往往承受水平和竖向荷载的共同作用^[2].对此, Halabe 等^[19]求解了竖向静荷载作用下单桩的水平振动微分方程,认为竖向荷载对桩基的水平振动特性有显著的影响.吴鸣等^[4]和熊辉等^[20]分别建立桩-土动力相互作用模型,利用传递矩阵法得到了考虑竖向力影响的水平动力阻抗解析解.栾鲁宝等^[2]通过引入势函数分析了竖向荷载作用下大直径管桩的水平振动响应,得出了管桩水平振动响应频域解析解.可以看出,上述已有桩基水

平振动响应研究中,较少有利用有限杆单元方法综合考虑地基剪切变形和桩顶竖向荷载影响的相关研究.

鉴于此,本文结合有限杆单元方法,同时考虑桩周地基土体的剪切效应和桩身 P - Δ 效应,构建基于 Pasternak 地基模型的 $H(t)$ - V 受荷桩水平响应有限单元数值解.通过与已有解析解、有限元解和模型试验进行对比验证方法的正确性.最后,探讨土体剪切效应、桩顶竖向荷载、水平简谐荷载幅值、无量纲频率和桩身長径比等参数对桩身位移和弯矩的影响规律,可为工程实践提供参考.

1 计算模型与基本假设

1.1 基桩受力简化分析模型

单桩受力简化分析模型如图1所示,桩顶承受水平简谐荷载 $H(t)=H_0e^{i\omega t}$, P_0 为竖向静荷载.其中, H_0 为激振力幅值,虚数 $i=\sqrt{-1}$, ω 为动荷载圆频率, t 为时间,桩的长度和直径分别为 L 和 d_p , z 为地面以下计算结点深度, k_s 、 c_s 分别为地基土体弹性系数与阻尼系数.

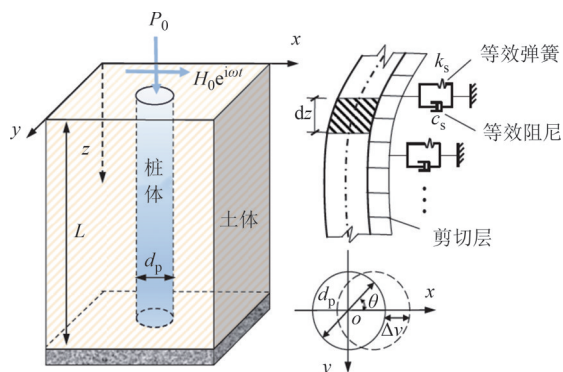


图1 桩基础简化分析模型示意图

Fig. 1 Simplified analysis model of pile

1.2 基本假设

为便于分析,基于上述计算模型的受力特征,引入如下基本假设:

1) 桩体为圆形等截面桩,视为均匀、各向同性的 Euler-Bernoulli 梁;

2) 桩周土体视为均质土体,简化为 Pasternak 地基模型以描述桩土相互作用,其对桩的作用等效为一系列沿桩身分布的阻尼器、弹簧和剪切单元.其中阻尼系数 c_s 和弹性系数 k_s 与土体性质有关;

3) 桩土体系振动满足小变形条件,处于线弹性范围内,桩-土完全接触,接触面保持位移协调,不发生相对滑移与脱离;

4) 忽略水平简谐荷载作用引起的桩身竖向位移.

2 改进的有限杆单元法

本节将在传统有限杆单元法的基础上,对单元刚度矩阵和结点荷载向量做出修正,建立可综合考虑 P - Δ 效应、土体剪切效应和桩侧摩擦力等因素的综合刚度矩阵方程,以期用于桩体水平振动响应的数值计算中.

2.1 基本平衡方程

将桩体离散为由有限个结点连接的杆单元,结点受力如图2所示.

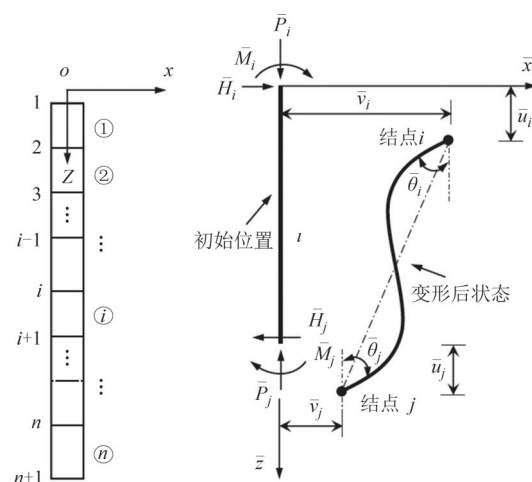


图2 杆单元结点划分及受力分析示意图

Fig. 2 Schematic diagram of node division and mechanical analysis of beam element

深度 z 处杆单元长度为 l , 施加在 i 和 j 结点上的载荷包括竖向荷载 $\bar{P}_i$ 和 $\bar{P}_j$, 剪力 $\bar{H}_i$ 和 $\bar{H}_j$, 弯矩 $\bar{M}_i$ 和 $\bar{M}_j$. 对应的结点变形分别为竖向位移 $\bar{u}_i$ 和 $\bar{u}_j$, 横向位移 $\bar{v}_i$ 和 $\bar{v}_j$, 转角 $\bar{\theta}_i$ 和 $\bar{\theta}_j$. 根据杆单元虚位移原理, 单元刚度方程可表示为^[8]:

$$\mathbf{F}^e = \{\bar{P}_i \quad \bar{H}_i \quad \bar{M}_i \quad \bar{P}_j \quad \bar{H}_j \quad \bar{M}_j\}^T = \mathbf{k}_0^e \{\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\theta}_j\}^T = \mathbf{k}_0^e \boldsymbol{\delta}^e \quad (1)$$

式中: $\mathbf{F}^e$ 为单元结点荷载向量; $\boldsymbol{\delta}^e$ 为杆端位移向量; $\mathbf{k}_0^e$ 为单元刚度矩阵.

2.2 考虑 P - Δ 效应的单元附加刚度矩阵

在水平动荷载 $H(t)$ 作用下, 竖向荷载因桩身的水平偏移而产生附加弯矩, 将进一步加剧桩身的挠曲变形, 即桩身产生 P - Δ 效应. 故本节将对上节传统杆单元刚度矩阵 $\mathbf{k}_0^e$ 进行修正, 以考虑竖向荷载对桩身弯矩和水平位移的影响. 根据杆单元虚位移原理, 考虑 P - Δ 效应的单元刚度方程^[9]可表示为:

$$\mathbf{F}_N^e = \mathbf{k}_N^e \left\{ \bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\theta}_j \right\}^T$$

$$= \int_0^l \left[P_N(\bar{z}) \mathbf{N}_v^T \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{d\bar{z}^2} + P_N(\bar{z}) \frac{d^2 \mathbf{N}_v^T}{d\bar{z}^2} \mathbf{N}_v \right] \delta^e d\bar{z} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{F}_N^e$ 为单元等效结点荷载向量; δ^e 为杆端位移向

$$\mathbf{k}_N^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12P_0 + f_s \cdot (12h_i + l)}{5l} & -\frac{6P_0 + f_s \cdot (6h_i + l)}{5} & 0 & \frac{12P_0 + 6f_s \cdot (2h_i + l)}{5l} & -\frac{P_0 + f_s \cdot h_i}{5} \\ 0 & -\frac{6P_0 + f_s \cdot (6h_i + l)}{5} & \frac{4P_0 l + f_s \cdot l(4h_i + l)}{15} & 0 & \frac{P_0 + f_s \cdot (h_i + l)}{5} & \frac{2P_0 l + f_s \cdot l(2h_i + l)}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12P_0 + 6f_s \cdot (2h_i + l)}{5l} & \frac{P_0 + f_s \cdot (h_i + l)}{5} & 0 & -\frac{12P_0 + f_s \cdot (12h_i + 11l)}{5l} & \frac{6P_0 + f_s \cdot (6h_i + 5l)}{5} \\ 0 & -\frac{P_0 + f_s \cdot h_i}{5} & \frac{2P_0 l + f_s \cdot l(2h_i + l)}{30} & 0 & \frac{6P_0 + f_s \cdot (6h_i + 5l)}{5} & -\frac{4P_0 l + f_s \cdot l(4h_i + 3l)}{15} \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.3 考虑双参数地基模型的单元附加刚度矩阵

Pasternak 双参数弹性地基模型相较单参数 Winkler 地基模型, 考虑了地基土体剪切的效应, 计算结果更精确^[21]. 基于 Pasternak 双参数弹性地基模型的桩身挠曲微分方程为^[22]:

$$E_p I_p \frac{d^4 x}{dz^4} - G_s b_0 \frac{d^2 x}{dz^2} + Kx = 0 \quad (6)$$

式中: E_p 、 I_p 、 b_0 分别为桩身弹性模量、截面惯性矩和计算宽度; x 为桩身挠度; G_s 为土体剪切模量; K 为地基反力模量.

首先基于动力 Winkler 地基模型, 桩周土产生沿桩身连续分布的水平抗力 $p(x)$, 其与位移的关系式^[7]可表示为:

$$p(x) = k \cdot x(z) = (k_s - \omega^2 m_p + i\omega c_s) \cdot x(z) \quad (7)$$

式中: $p(x)$ 、 m_p 、 ω 分别为桩周土对桩体的水平抗力、单位桩长的质量和谐振频率. 其中, k_s 、 c_s 取值由下式^[23]确定:

$$k_s = \delta E_s$$

$$c_s = 6a_0^{-1/4} \rho_s V_s d_p + 2 \frac{k_s \beta_s}{\omega} \quad (8)$$

式中: δ 为与土体参数、荷载类型、桩土相对刚度和桩顶约束条件有关的函数, 与深度 z 无关. 当桩顶自由

量; $P_N(\bar{z})$ 为距 i 单元上结点深度 $\bar{z}$ 处的竖向荷载, 可表示为 $P_N(\bar{z}) = P_0 + f_s \cdot (h_i + \bar{z})$, h_i 为 i 结点距桩顶的距离, f_s 为桩侧摩阻力; $\mathbf{N}_v$ 表示与杆单元水平位移对应的形函数矩阵, 可表示为:

$$\mathbf{N}_v = [0 \quad N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad N_3 \quad N_4] \quad (3)$$

其中:

$$N_1 = 1 - \frac{3\bar{z}^2}{l^2} + \frac{2\bar{z}^3}{l^3}, N_2 = \bar{z} - \frac{2\bar{z}^2}{l} + \frac{\bar{z}^3}{l^2}$$

$$N_3 = \frac{3\bar{z}^2}{l^2} - \frac{2\bar{z}^3}{l^3}, N_4 = -\frac{\bar{z}^2}{l} + \frac{\bar{z}^3}{l^2} \quad (4)$$

$\mathbf{k}_N^e$ 为单元刚度矩阵, 可表示为:

$$\mathbf{k}_N^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12P_0 + 6f_s \cdot (2h_i + l)}{5l} & -\frac{P_0 + f_s \cdot h_i}{5} & 0 & \frac{12P_0 + 6f_s \cdot (2h_i + l)}{5l} & -\frac{P_0 + f_s \cdot h_i}{5} \\ 0 & \frac{P_0 + f_s \cdot (h_i + l)}{5} & \frac{2P_0 l + f_s \cdot l(2h_i + l)}{30} & 0 & \frac{P_0 + f_s \cdot (h_i + l)}{5} & \frac{2P_0 l + f_s \cdot l(2h_i + l)}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12P_0 + f_s \cdot (12h_i + 11l)}{5l} & \frac{6P_0 + f_s \cdot (6h_i + 5l)}{5} & 0 & -\frac{12P_0 + f_s \cdot (12h_i + 11l)}{5l} & \frac{6P_0 + f_s \cdot (6h_i + 5l)}{5} \\ 0 & \frac{6P_0 + f_s \cdot (6h_i + 5l)}{5} & -\frac{4P_0 l + f_s \cdot l(4h_i + 3l)}{15} & 0 & \frac{6P_0 + f_s \cdot (6h_i + 5l)}{5} & -\frac{4P_0 l + f_s \cdot l(4h_i + 3l)}{15} \end{bmatrix} \quad (5)$$

时, $\delta \approx 1.5 \sim 2.5$; 桩顶约束转角时, $\delta \approx 1.0 \sim 1.2$. 本文考虑桩顶自由时 $k_s = 2.1E_s$, 桩顶约束转角时 $k_s = 1.2E_s$. $V_s = \sqrt{E_s / 2\rho_s(1 + v_s)}$, 为土层的剪切波速, E_s 、 ρ_s 、 v_s 和 β_s 分别为桩周土的弹性模量、密度、泊松比和阻尼比, $a_0 = \omega d_p / V_s$, 为无量纲频率.

在此基础上, 由式(6)知, 当 $G_s = 0$ 时, Pasternak 双参数地基模型即退化为 Winkler 地基模型. 当无 G_s 实测值时, 可由 Tanahashi^[24] 提出的经验公式确定:

$$G_s = \frac{E_s t_s}{6(1 + v_s)} \quad (9)$$

式中: E_s 、 v_s 同式(8); t_s 为剪切层厚度.

梁发云等^[25]基于 Yao 等^[26]的数值模拟结果, 认为地基土剪切层厚度 t_s 近似等于水平荷载作用对桩侧土的影响范围 S ($S = 11d_p$, d_p 为桩径), 故本文分析中取 $t_s = 11d_p$, 实际上剪切层厚度 t_s 与桩周土体的性质有关, 本文对此不做深入研究. 作用在杆单元上的荷载按照其作用位置不同, 可分为结点荷载和非结点荷载两种. 为建立各结点的平衡方程, 需将分布作用在杆单元上的桩周土抗力(非结点荷载)按照虚位移原理等效为结点荷载 $\mathbf{F}^e$, 可表示为:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_H^e &= k \int_0^l [\mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v \delta^e] d\bar{z} = \\
& (k_s - \omega^2 m_p + i\omega c_s) \int_0^l [\mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v \delta^e] d\bar{z} = \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13kl}{35} & \frac{11kl^2}{210} & 0 & \frac{9kl}{70} & -\frac{13kl^2}{420} \\ 0 & \frac{11kl^2}{210} & \frac{kl^3}{105} & 0 & \frac{13kl^2}{420} & -\frac{kl^3}{140} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9kl}{70} & \frac{13kl^2}{420} & 0 & \frac{13kl}{35} & -\frac{11kl^2}{210} \\ 0 & -\frac{13kl^2}{420} & -\frac{kl^3}{140} & 0 & -\frac{11kl^2}{210} & \frac{kl^3}{105} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \\
& \mathbf{k}_1^e \{\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\theta}_j\}^T
\end{aligned} \quad (10)$$

式中: $\mathbf{k}_1^e$ 为考虑桩周土水平反力作用的单元附加刚度矩阵; $k = (k_s - \omega^2 m_p + i\omega c_s)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_Q^e &= G_s b_0 \int_0^l [\mathbf{N}_\varphi^T \mathbf{N}_\varphi \delta^e] d\bar{z} = \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6G_s b_0}{5l} & \frac{G_s b_0}{10} & 0 & -\frac{6G_s b_0}{5l} & \frac{G_s b_0}{10} \\ 0 & \frac{G_s b_0}{10} & \frac{2G_s b_0 l}{15} & 0 & -\frac{G_s b_0}{10} & -\frac{G_s b_0 l}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6G_s b_0}{5l} & -\frac{G_s b_0}{10} & 0 & \frac{6G_s b_0}{5l} & -\frac{G_s b_0}{10} \\ 0 & \frac{G_s b_0}{10} & -\frac{G_s b_0 l}{30} & 0 & -\frac{G_s b_0}{10} & \frac{2G_s b_0 l}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \\
& \mathbf{k}_2^e \{\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\theta}_j\}^T
\end{aligned} \quad (11)$$

式中: $\mathbf{k}_2^e$ 为考虑地基土等效弹簧间剪切力作用的单元附加刚度矩阵; $\mathbf{N}_\varphi$ 表示与杆单元转角位移对应的形函数矩阵, 可表示为

$$\mathbf{N}_\varphi = [0 \quad N_5 \quad N_6 \quad 0 \quad N_7 \quad N_8] \quad (12)$$

其中,

$$\begin{aligned}
N_5 &= -\frac{6\bar{z}}{l^2} + \frac{6\bar{z}^2}{l^3}, N_6 = 1 - \frac{4\bar{z}}{l} + \frac{3\bar{z}^2}{l^2} \\
N_7 &= \frac{6\bar{z}}{l^2} - \frac{6\bar{z}^2}{l^3}, N_8 = -\frac{2\bar{z}}{l} + \frac{3\bar{z}^2}{l^2}
\end{aligned} \quad (13)$$

2.4 考虑桩侧摩阻力的等效结点荷载向量

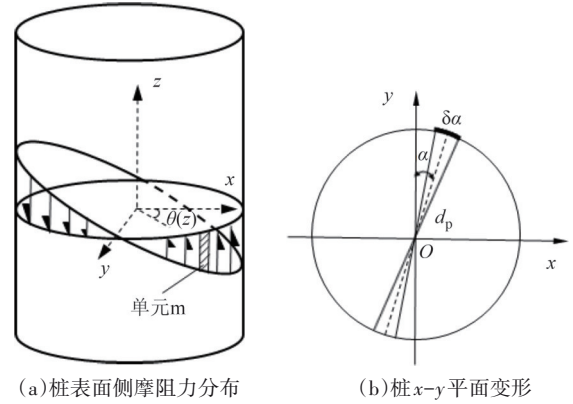
桩基础受外荷载作用后, 将相对桩侧土体发生一定程度的偏转与沉降. 如图3所示, 桩表面单元 m 处的竖向变形量为 $z_m = d_p \sin \alpha \cdot \theta(\bar{z})/2$, 单元面积为 $\delta A_m = z_m \delta \alpha \cdot d_p/2$, 其中径向夹角为 α , 水平面偏转角为 $\theta(\bar{z})$. 基于虚位移原理, 桩侧摩阻力所做的外力

虚功 δW_τ 的关系式^[9]为:

$$\begin{aligned}
\delta W_\tau &= \int_0^l \tau d_p^2 \delta \theta(\bar{z}) d\bar{z} = \tau d_p^2 \int_0^l \mathbf{N}_\varphi \delta \delta^e d\bar{z} = \\
& \tau d_p^2 \int_0^l \frac{d\mathbf{N}_\varphi}{d\bar{z}} \delta \delta^e d\bar{z} = \mathbf{F}_\tau^e \delta \delta^e
\end{aligned} \quad (14)$$

式中, $\mathbf{F}_\tau^e$ 为桩侧摩阻力的等效结点荷载向量, $\mathbf{N}_v$ 、 $\mathbf{N}_\varphi$ 意义同上. 可得,

$$\mathbf{F}_\tau^e = [0 \quad -\tau d_p^2 \quad 0 \quad 0 \quad \tau d_p^2 \quad 0]^T \quad (15)$$



(a) 桩表面侧摩阻力分布

(b) 桩 x - y 平面变形

图3 桩身单元变形图

Fig.3 Unit deformation diagram of pile

综上所述, 根据式(10)和式(11)可确定考虑土体剪切效应的单元刚度矩阵 $\mathbf{k}_p^e$, 再结合式(1)、式(5)、和式(15)可得到考虑桩身单元刚度、 P - Δ 效应、土体剪切效应和桩侧摩阻力等因素的单元综合刚度方程为:

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \delta^e = (\mathbf{k}_0^e + \mathbf{k}_N^e + \mathbf{k}_p^e) \delta^e \quad (16)$$

3 有限杆单元法求解内力、位移步骤

基于改进的有限杆单元方法, 建立考虑上述因素的综合刚度矩阵, 编制 MATLAB 程序求解受荷桩基的内力与位移, 主要包括如下计算步骤:

1) 单元离散化: 将桩基离散为若干具有较高计算精度的微单元和结点. 其中结点位置可取集中力作用点、土层分界处、桩截面面积突变点、支承点等.

2) 整体特性分析: 结合式(1)、(5)、(10)和式(11), 按照后处理法将单元刚度矩阵组装为整体刚度矩阵, 并建立整体刚度方程.

3) 结点位移求解: 引入桩基的位移边界条件, 求解整体刚度方程, 得到桩身任意结点的位移向量 δ .

4) 杆端力求解: 将结点的位移向量代入单元刚度方程式(1)中, 求得杆单元的杆端力, 进而确定桩身内力与水平变形量, 绘制桩身水平位移与内力图.

4 算例验证

4.1 算例 1

为验证本文解的合理性,将本文与文献[27]考虑竖向荷载影响的水平振动响应室内模型试验解、有限元解进行对比分析.计算参数如下:桩长 $L=0.9$ m,桩径 $d_p=0.06$ m,泊松比 $\nu_p=0.3$;桩周土的密度 $\rho_s=1\ 900$ kg/m³,弹性模量 $E_s=8.5$ MPa,泊松比 $\nu_s=0.3$,阻尼比 $\beta_s=0.05$;第一组桩顶组合荷载为 $f=3$ Hz,水平动荷载幅值 $H_0=500$ N,竖向荷载 $P_0=0$ N;第二组桩顶组合荷载为 $f=2$ Hz,水平动荷载幅值 $H_0=150.2$ N,竖向荷载 $P_0=150$ N;边界条件为桩顶、桩底自由.图4和图5分别为两组桩在桩顶受不同组合荷载作用一个周期内桩身弯矩随深度 z 的变化曲线.

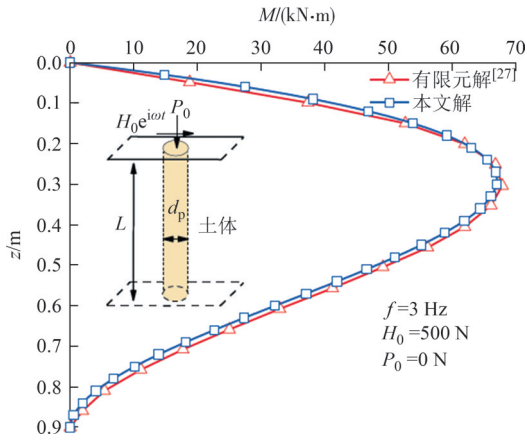


图4 第一组桩身弯矩对比图

Fig. 4 Comparison of the bending moment of the first group pile

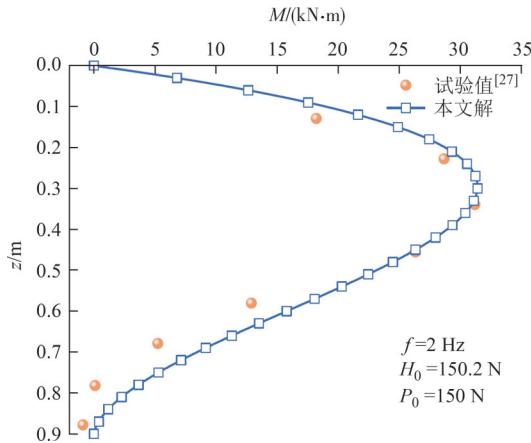


图5 第二组桩身弯矩对比图

Fig. 5 Comparison of the bending moment of the second group pile

由图4及图5可知,本文方法所得的桩身弯矩计算值与文献[27]的有限元值较为接近,两组桩身弯

矩最大值均发生在距桩顶 1/3 深度处,桩身弯矩随深度的变化趋势一致.

4.2 算例 2

为进一步验证本文方法的正确性,将本文解与文献[7]的水平振动响应解进行对比.令 $P_0=0$,即退化到水平简谐荷载 $H(t)$ 作用下的水平振动响应解,并将本文退化解与已有案例解进行对比.相关计算参数为:桩长 $L=4.5$ m,桩径 $d_p=0.3$ m,桩身弹性模量 $E_p=20$ GPa,泊松比 $\nu_p=0.2$;桩周土的密度 $\rho_s=2\ 000$ kg/m³,弹性模量 $E_s=4$ MPa,泊松比 $\nu_s=0.4$,阻尼比 $\beta_s=0.05$;边界条件为桩顶自由,桩底嵌固.图6和图7给出了水平动荷载幅值 $H_0=100$ kN,无量纲频率 $a_0=0.5$ 作用一个周期内桩身位移、弯矩的最大值随深度 z 的变化曲线.

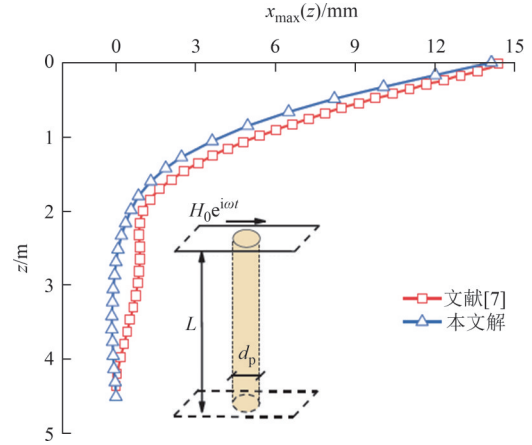


图6 桩身水平位移对比图

Fig. 6 Comparison of lateral displacement of the pile

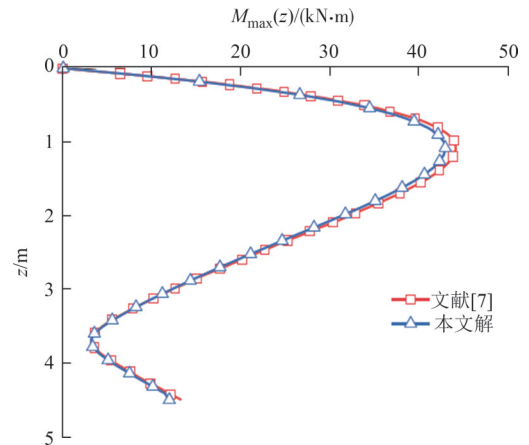


图7 桩身弯矩对比图

Fig. 7 Comparison of the bending moment of the pile

由图6、图7可知,当水平动荷载幅值 $H_0=100$ kN时,桩顶最大位移出现在桩顶位置,最大值为14.12 mm;最大桩身弯矩发生在距桩顶 1/3 深度处,

最大值为 $42.96 \text{ kN}\cdot\text{m}$, 与文献[7]计算结果吻合较好. 文献[7]基于 Winkler 地基模型, 忽略地基土体的剪切效应, 使得桩体结构的受力计算结果较实际偏大. 结合图6、图7的对比验证结果, 表明利用本文计算方法得到的桩身内力和位移与文献结果基本一致, 验证了提出方法的准确性.

4.3 算例3

文献[28]基于 Winkler 地基理论, 得到了层状地基中单桩水平振动解析解, 为进一步验证本文解的适用性, 本文 Pasternak 地基可退化为 Winkler 地基模型 ($G_s \rightarrow 0$). 计算参数如下: 桩径 $d_p = 0.3 \text{ m}$, 桩长径比 $L/d_p = 10, 15$, 泊松比 $\nu_p = 0.25$, 桩体密度 $\rho_p = 2\,500 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E_p = 20 \text{ GPa}$; 土层参数 $n=2$, 两层土的密度、阻尼比和泊松比取相同值, 分别为 $\rho_s = 2\,000 \text{ kg/m}^3$, $\beta_s = 0.05$ 和 $\nu_s = 0.4$, 桩土刚度比 $E_p/E_{s2} = 5\,000$, 上下两层土的弹性模量比 $E_{s1}/E_{s2} = 0.5$; 边界条件为桩顶约束转角, 桩底固定. 图8、图9为水平动荷载幅值 $H_0 = 100 \text{ kN}$, 无量纲频率 $a_0 = 0.5$, 竖向荷载 $P_0 = 0$, 作用一个循环周期内桩身水平位移、弯矩的最大值随 z/d_p 的变化曲线. 为便于分析, 对深度 z 处桩身水平位移和弯矩的最大值 $x_{\max}(z)$ 和 $M_{\max}(z)$ 进行无量纲化处理, 其中 $\bar{x} = E_p \cdot d_p \cdot x_{\max}(z) / (500H_0)$ 和 $\bar{M} = M_{\max}(z) / (2H_0 \cdot d_p)$.

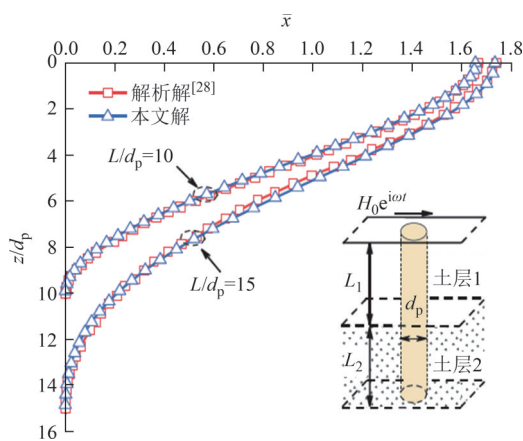


图8 桩身无量纲水平位移对比图

Fig. 8 Comparison of dimensionless lateral displacement of the pile

由图8、图9可以看出, 不同桩身长径比条件下, 本文得到的桩身无量纲水平位移和弯矩与文献[28]已有解析解结果吻合较好, 进一步验证本文方法的适用性.

结合上述算例的对比验证结果, 可见当单元数划分合适, 本文基于综合刚度矩阵的改进有限杆单元法对于复杂边界、荷载和层状地基等工况下得到的桩身内力和位移解与已有文献的解析解、有限元

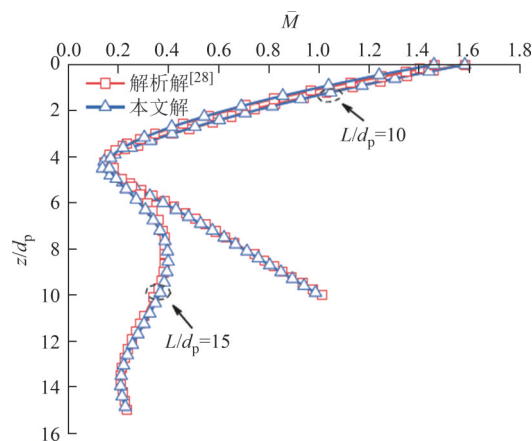


图9 桩身无量纲弯矩对比图

Fig. 9 Comparison of dimensionless bending moment of the pile

解和试验结果基本一致, 计算精度较高, 验证了提出方法的准确性和适应性.

5 参数分析

本节将侧重分析土体剪切效应、桩顶竖向荷载 P_0 、水平简谐荷载幅值 H_0 、无量纲频率 a_0 和桩身长径比 L/d_p 等参数对桩身水平位移、弯矩的影响. 相关计算参数选取为: $L/d_p = 20$, 桩径 $d_p = 0.3 \text{ m}$, 桩身弹性模量 $E_p = 31.5 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu_p = 0.2$; 桩周土的密度 $\rho_s = 2\,000 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E_s = 15 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu_s = 0.3$, 阻尼比 $\beta_s = 0.05$, 边界条件为桩顶自由、桩底固定. 水平动荷载幅值 $H_0 = 60 \text{ kN}$, 无量纲频率 $a_0 = 0.5$, 竖向荷载 $P_0 = 200 \text{ kN}$. 为便于对比分析, 对深度 z 处桩身水平位移和弯矩的最大值 $x_{\max}(z)$ 和 $M_{\max}(z)$ 进行无量纲化处理, 其中 $\bar{x}(z) = x_{\max}(z)/x_{\max}$ 和 $\bar{M}(z) = M_{\max}(z)/M_{\max}$.

5.1 土体剪切效应的影响

为探讨土体剪切效应对桩身内力和变形的影响规律, 图10和图11采用 Pasternak 地基模型与传统 Winkler 地基模型 ($G_s \rightarrow 0$) 计算了不同桩土弹模比 E_p/E_s 和土体剪切模量 G_s 下单桩的无量纲水平位移与弯矩的变化情况, 其中固定 $E_s = 15 \text{ MPa}$, E_p/E_s 分别取 $1\,500$ 、 $2\,500$ 和 $3\,500$ ^[7]; $G_s = 0$ 、 $1.0G_s$ 和 $5.0G_s$. 由图10、图11可以看出: 1) 地基土体的剪切效应对约束桩身的内力和变形具有一定的贡献. 当 $G_s = 0$ 和 $1.0G_s$ 时, 采用 Winkler 地基计算得到的桩身水平位移和弯矩大于 Pasternak 地基所得结果, 说明未引入土体剪切模量 G_s 将忽略地基土体的剪切效应, 使得桩体结构的受力计算结果较实际偏大, 因此, 土体剪切效应对桩身水平振动响应的影响不容忽视. 2) 土体剪切模量 G_s 对桩身水平位移与弯矩具有削弱作用. 当 $E_p/E_s =$

2 500, G_s 由 0 增至 $5G_s$ 时, 桩身最大水平位移由 0.856 减至 0.510, 减小 40.42%, 最大弯矩由 0.960 减至 0.343, 减小 64.27%。3) Pasternak 地基和 Winkler 地基计算所得的桩身最大水平位移和弯矩的差异性随着桩土弹模比 E_p/E_s 的降低呈现出增强趋势。当土体剪切模量 $G_s=0$ 和 $1.0G_s$, E_p/E_s 由 3 500 降至 1 500 时, 桩顶水平位移逐渐增加, 变化幅度由 9.79% 增至 13.33%; 桩身最大弯矩逐渐降低, 变化幅度由 20.42% 增至 34.92%。故当桩土弹模比较小时, 土体剪切效应对桩身水平振动响应的影响不容忽视。

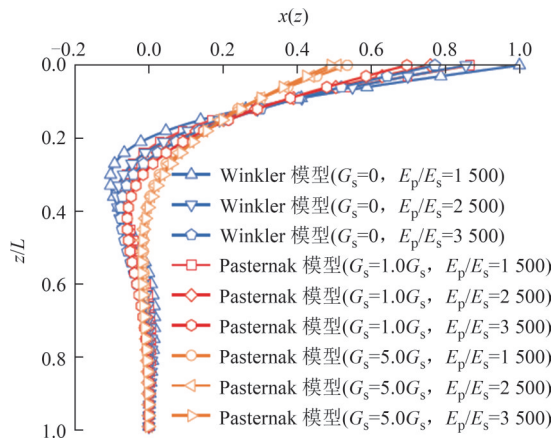


图 10 基于两种地基模型的桩身无量纲水平位移对比图

Fig. 10 Comparison of dimensionless lateral displacement of the pile based on two foundation models

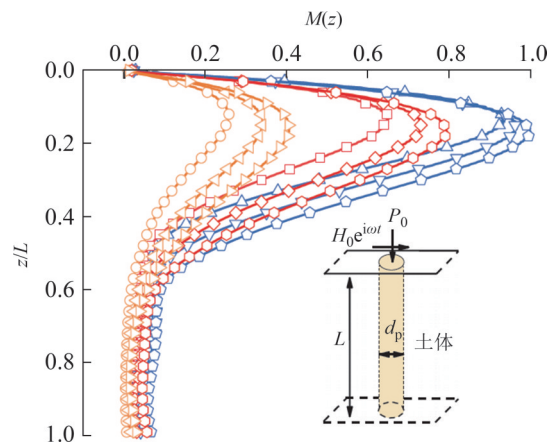


图 11 基于两种地基模型的桩身无量纲弯矩对比图

Fig. 11 Comparison of dimensionless bending moment of the pile based on two foundation models

5.2 桩顶竖向荷载 P_0 的影响

梁发云等^[29]定义桩顶荷载 $H_0 = \pi G_s d_p^2$ 和 $P_0 = \lambda H_0$, 探究不同竖向荷载对桩身内力和变形的影响。图 12 和图 13 给出了竖向荷载特征参数 λ 取 0、0.5、1 和 2 时桩身无量纲水平位移、弯矩随深度的变化。由

图 12、图 13 可知: 1) 随着桩顶竖向荷载特征参数 λ 的逐渐增加, 桩身无量纲水平位移和弯矩均显著增大。当 λ 由 0 增至 2 时, 桩顶水平位移由 0.71 增至 1, 增加了 40.85%; 桩身最大弯矩值由 0.56 增至 1, 提高了 78.57%。2) 竖向荷载特征参数 λ 的变化在较浅深度范围内 ($z=0 \sim 0.4L$) 对桩身无量纲位移影响显著, 而随着深度的增加, 这种影响逐渐减缓, 下半段桩身位移曲线基本重合。桩身无量纲弯矩在距桩顶 $L/3$ 深度位置出现反转拐点, 而桩身最大位移和最大弯矩发生位置受竖向荷载特征参数 λ 的影响较小。上述计算实例进一步表明, 桩顶竖向荷载和水平荷载引起的 $P-\Delta$ 效应会影响桩身最大水平位移和弯矩, 可能威胁结构的安全, 在工程设计计算中应引起重视。

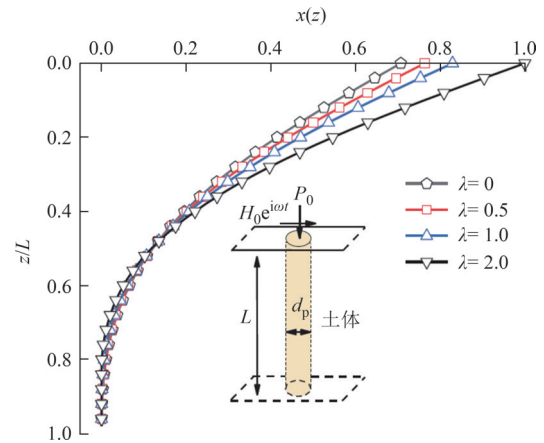


图 12 不同竖向荷载作用的桩身无量纲水平位移对比图

Fig. 12 Comparison of dimensionless lateral displacement of the pile under different vertical loads

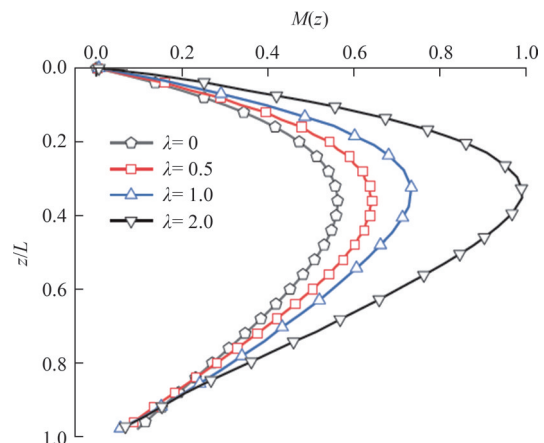


图 13 不同竖向荷载作用的桩身无量纲弯矩对比图

Fig. 13 Comparison of dimensionless bending moment of the pile under different vertical loads

5.3 水平简谐荷载幅值 H_0 的影响

赵明华等^[30]结合水平受荷桩模型试验, 认为桩

顶水平位移 $x=0.15d_p$ 时的荷载近似等于桩基的水平极限承载力 H_u 。结合算例, 求得其水平极限承载力为 $H_u=1\ 100\text{ kN}$ 。为探究不同水平简谐荷载幅值 H_0 对桩身内力和变形的影响, 图 14 和图 15 给出了水平简谐荷载幅值 H_0 分别为 $0.2H_u$ 、 $0.4H_u$ 、 $0.8H_u$ 和 $1.0H_u$ 时的桩身无量纲水平位移、弯矩随深度的变化, 其中 $P_0=100\text{ kN}$, 其他计算参数同上。由图 14、图 15 可知: 1) 随着桩顶水平简谐荷载幅值 H_0 的逐渐增加, 桩身无量纲水平位移和弯矩均显著增大。当 H_0 由 $0.2H_0$ 增至 $1.0H_0$ 时, 桩身最大无量纲位移和弯矩值均由 0.2 增至 1, 提高了 4 倍。2) 桩身位移随深度的增加呈现减小趋势, 且桩身最大位移出现在桩顶; 桩身弯矩随深度的增加呈现出先增加后减小趋势, 最大弯矩发生位置在距桩顶 $2.8d_p$ 处。而桩身最大位移和最大弯矩发生位置受水平简谐荷载幅值 H_0 的影响较小。

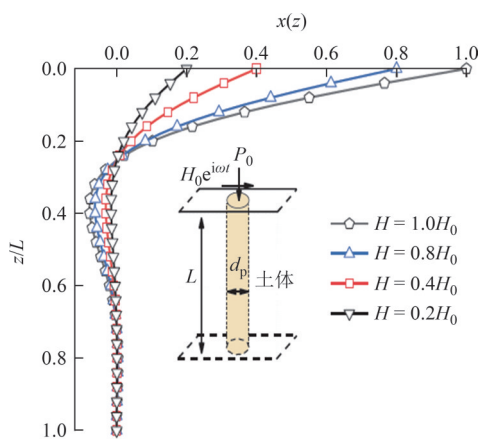


图 14 不同水平简谐荷载幅值作用的桩身无量纲水平位移对比图

Fig. 14 Comparison of dimensionless lateral displacement of the pile under different horizontal harmonic load amplitudes

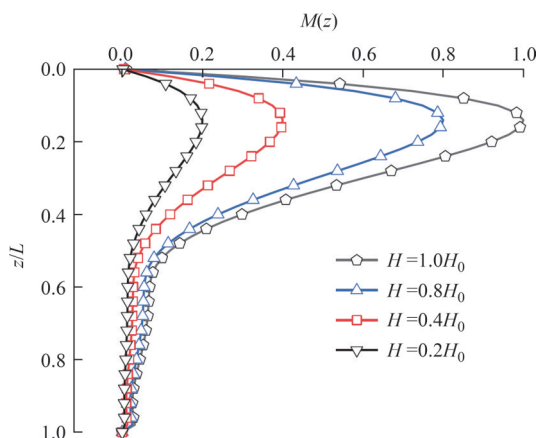


图 15 不同水平简谐荷载幅值作用的桩身无量纲弯矩对比图

Fig. 15 Comparison of dimensionless bending moment of the pile under different horizontal harmonic load amplitudes

5.4 水平简谐荷载无量纲频率 a_0 的影响

图 16、图 17 给出了桩身長径比 L/d_p 为 10 和 30, 无量纲激振频率 $a_0=0.01$ 、0.5 和 1.0 时^[28] 桩身无量纲水平位移、弯矩随深度的变化。由图 16 和图 17 可知: 1) 在不同桩身長径比的情况下, 随着 a_0 降低, 桩身最大水平位移、弯矩均逐渐增大。其中, 当 $L/d_p=10$ 和 30, a_0 由 1.0 降至 0.01 时, 桩身最大水平位移分别提高 105.89% 和 141.67%, 桩身最大弯矩分别增加 15.07% 和 22.45%。表明桩身水平位移和弯矩受无量纲频率 a_0 的影响较大, 这是由于频率越高, 桩的变形还未来得及发生, 荷载已反向施加^[28], 从而造成位移量和弯矩减小, 因此低频振动环境对桩身内力和位移的影响更大。2) 不同长径比下的桩身最大无量纲位移、弯矩发生的位置与无量纲频率 a_0 基本无关, 最大位移均位于桩顶, 最大弯矩均在距地面 $z=3d_p$ 深度处。

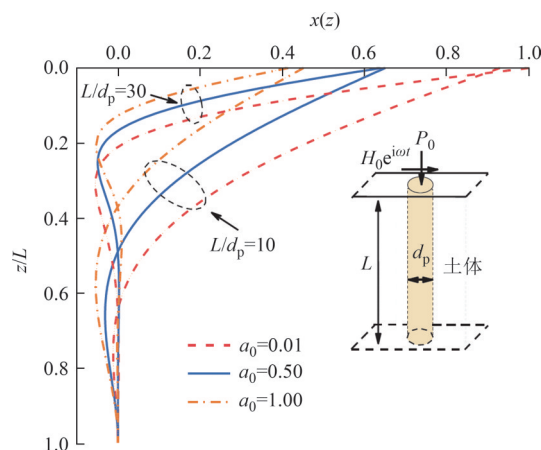


图 16 不同长径比下桩身无量纲水平位移随 a_0 的变化对比图

Fig. 16 Comparison of dimensionless lateral displacement of the pile with a_0 under different slenderness ratios L/d_p

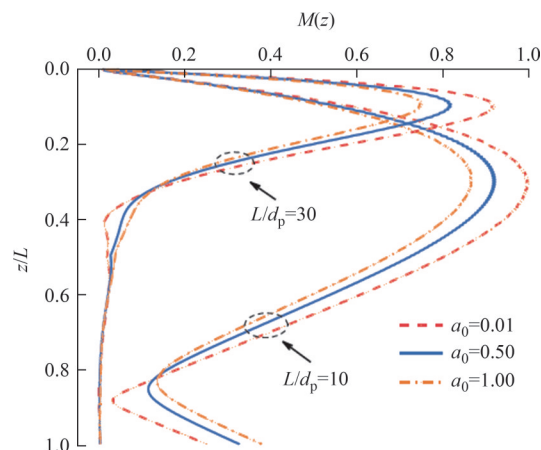


图 17 不同长径比下桩身无量纲弯矩随 a_0 的变化对比图

Fig. 17 Comparison of dimensionless bending moment of the pile with a_0 under different slenderness ratios L/d_p

5.5 长径比 L/d_p 的影响

图 18 和图 19 分析了桩身长径比 L/d_p 分别取 5、10、20 和 40 四种情况下^[7], 桩身无量纲水平位移与弯矩随深度的变化曲线, 其中纵坐标归一化深度取 z 与最大桩长 $L_{\max}$ 的比值 ($L_{\max}$ 取 $40d_p$). 从图 18、图 19 中可以看出: 1) 当桩身长径比较小时 ($L/d_p=5$), 桩身水平位移随深度增加而减小, 而桩身弯矩随深度增加而增大, 且桩底弯矩最大, 桩呈刚性短桩特性. 2) 随着长径比的增大 ($L/d_p=10, 20, 40$), 桩身出现挠曲变形, 水平位移呈曲线, 桩表现为弹性长桩特性, 桩身弯矩随深度先增加后减小, 最大弯矩均出现在 $z/L_{\max}=0.07\sim 0.08$ 处, 且最大弯矩位置不随 L/d_p 改变而变化. 3) 当 $z/L_{\max}\geq 0.5$ ($L_p=20d_p$), 桩身的位移和弯矩均接近于 0, 故可将 $z=20d_p=L_p$ 视为桩的有效长度, 若再增加桩长 ($L_p=20d_p, 40d_p$), 桩身水平位移、弯矩曲线已基本重合, 不再随桩长的增加而变化.

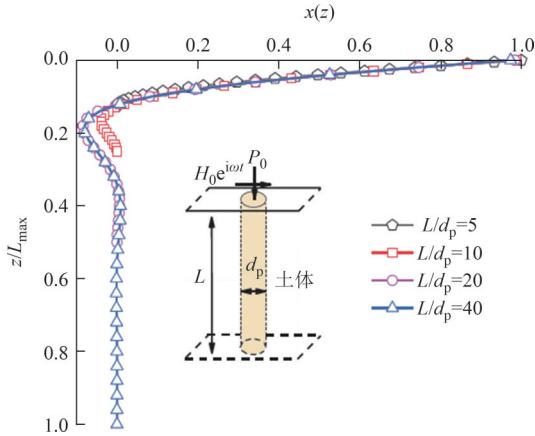


图 18 不同长径比下桩身无量纲水平位移对比图

Fig. 18 Comparison of dimensionless lateral displacement of the pile under different slenderness ratios L/d_p

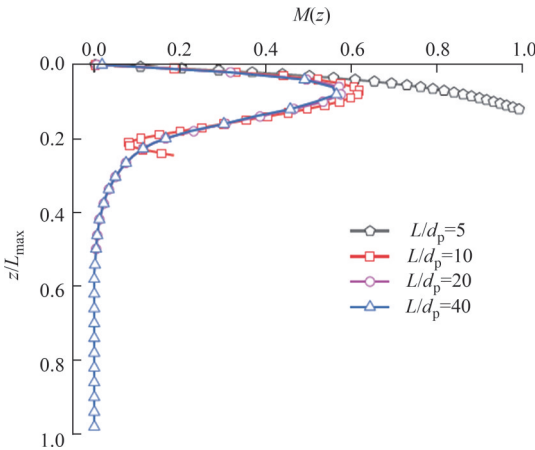


图 19 不同长径比下桩身无量纲弯矩对比图

Fig. 19 Comparison of dimensionless bending moment of the pile under different slenderness ratios L/d_p

6 结论

本文基于 Pasternak 地基和 Euler 梁理论, 建立了桩-土相互作用水平振动简化分析模型, 考虑了竖向荷载和水平简谐荷载引起的 $P-\Delta$ 效应、土体剪切效应的影响, 采用改进的有限杆单元方法求解综合刚度矩阵方程, 结合桩土连续边界条件得到了桩身内力和位移解答. 并对土体剪切效应、桩顶竖向荷载 P_0 、水平简谐荷载幅值 H_0 、无量纲频率 a_0 和桩身长径比 L/d_p 进行参数分析, 得到如下结论:

1) 本文所采用的有限杆单元法通过构造桩基的整体刚度方程可综合考虑地基土体剪切效应和竖向荷载变化的影响, 所得结果均与已有文献解进行对比验证. 相较传统求解方法可以更简便地考虑复杂荷载、地层和边界条件的影响, 计算效率高, 可为进一步分析复杂工况下桩基的水平振动响应分析和设计提供参考.

2) 采用 Pasternak 地基模型计算得到的桩身水平位移和弯矩均小于 Winkler 地基所得结果, 说明未引入土体剪切模量 G_s 将忽略地基土体的剪切效应, 使得桩体结构的受力计算结果较实际偏大. 当 G_s 由 0 增至 $5G_s$ 时, 桩身最大水平位移和弯矩分别减小 40.42% 和 64.27%. 且随着桩土弹模比 E_p/E_s 的降低, 两种地基模型计算的桩身最大水平位移和弯矩的差异性呈现出增强趋势.

3) 随着桩顶竖向荷载的增加, 桩身水平位移和弯矩受 $P-\Delta$ 效应的影响显著. 随着桩顶竖向荷载特征参数 λ 的增大, 桩身最大水平位移和弯矩均显著增加, 其中当 λ 由 0 增至 2 时, 桩身最大无量纲水平位移由 0.71 增至 1, 增加 40.85%; 桩身最大无量纲弯矩由 0.56 增至 1, 提高 78.57%. 因此, 在工程设计计算中应重视 $P-\Delta$ 效应对桩身内力和变形的影响, 避免威胁结构的安全.

4) 整体上, 桩身长径比 L/d_p 对有限长桩的位移、弯矩的动力响应影响较大; 当桩长 $L > 20d_p$ 后 (无限长桩), 影响逐渐减小. 且桩基础的水平动力响应随着水平简谐荷载幅值 H_0 的增加而增加, 随着无量纲频率 a_0 的降低而增加. 其中 H_0 由 $0.2H_0$ 增至 $1.0H_0$ 时, 桩身最大无量纲水平位移和弯矩均提高了 4 倍; 当 $L/d_p=30$, a_0 由 1.0 降至 0.01 时, 桩身最大无量纲水平位移和弯矩分别提高了 141.67% 和 22.45%. 故在工程设计中应注重水平简谐荷载高幅值、低频率振动环境对桩身变形和内力的影响.

参考文献

- [1] 江杰,付臣志,王顺苇,等. 考虑实际分布形式的水平受荷桩桩周土抗力分析方法[J]. 工程力学, 2021, 38(11): 199-211.
JIANG J, FU C Z, WANG S W, et al. Analytical method of soil resistance around laterally loaded piles considering its actual distribution[J]. Engineering Mechanics, 2021, 38(11): 199-211. (in Chinese)
- [2] 栾鲁宝,丁选明,刘汉龙,等. 考虑竖向荷载影响的大直径管桩水平振动响应解析解[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(10): 1859-1868.
LUAN L B, DING X M, LIU H L, et al. Analytical solution of lateral dynamic response of a large diameter pipe pile considering influence of axial load[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(10): 1859-1868. (in Chinese)
- [3] 任宇,朱斌,陈仁朋,等. 大型风电机组群桩基础受荷特性及长期累积沉降控制[J]. 土木工程学报, 2010, 43(3): 75-80.
REN Y, ZHU B, CHEN R P, et al. Performance and control of long-term settlement of pile group foundations for large wind turbines[J]. China Civil Engineering Journal, 2010, 43(3): 75-80. (in Chinese)
- [4] 吴鸣,赵明华,邹银生. 层状地基中轴、横向荷载下桥梁基桩的水平动力反应[J]. 土木工程学报, 2005, 38(12): 88-93.
WU M, ZHAO M H, ZOU Y S. Horizontal dynamic response of piles under simultaneous axial and lateral loads in layered soils[J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(12): 88-93. (in Chinese)
- [5] 胡安峰,谢康和,应宏伟,等. 粘弹性地基中考虑桩体剪切变形的单桩水平振动解析理论[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(9): 1515-1520.
HU A F, XIE K H, YING H W, et al. Analytical theory of lateral vibration of single pile in visco-elastic subgrade considering shear deformation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(9): 1515-1520. (in Chinese)
- [6] MYLONAKIS G, GAZETAS G. Lateral vibration and internal forces of grouped piles in layered soil[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1999, 125(1): 16-25.
- [7] 覃玉兰,邹新军,曹雄. 均质砂土中水平简谐荷载与扭矩联合受荷单桩内力、位移分析[J]. 岩土力学, 2020, 41(1): 147-156.
QIN Y L, ZOU X J, CAO X. Internal forces and deformations of a single pile in uniform sand under combined action of horizontal harmonic load and torque[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, 41(1): 147-156. (in Chinese)
- [8] 杨超炜,赵明华,陈耀浩,等. 高陡横坡段桩柱式桥梁双桩基础受力分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2018, 45(3): 129-135.
YANG C W, ZHAO M H, CHEN Y H, et al. Force analysis of bridge double-piles foundation in high and steep cross slopes[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2018, 45(3): 129-135. (in Chinese)
- [9] 赵明华,陈耀浩,杨超炜,等. 基于有限杆单元法的陡坡基桩非线性分析[J]. 岩土力学, 2018, 39(8): 3020-3028.
ZHAO M H, CHEN Y H, YANG C W, et al. Nonlinear analysis of pile in steep slope based on finite bar element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(8): 3020-3028. (in Chinese)
- [10] PENG W Z, ZHAO M H, ZHAO H, et al. A two-pile foundation model in sloping ground by finite beam element method[J]. Computers and Geotechnics, 2020, 122: 103503.
- [11] 赵海鹏,黎学优,万建宏,等. 基于高性能有限单元法的多层地基水平受荷桩受力分析[J]. 岩土力学, 2021, 42(7): 1995-2003.
ZHAO H P, LI X Y, WAN J H, et al. Analysis of laterally-loaded piles embedded in multi-layered soils using efficient finite-element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, 42(7): 1995-2003. (in Chinese)
- [12] LI X Y, ZHAO H P, LIU S W, et al. Innovative Timoshenko soil-pile integrated element for larger diameter laterally-loaded piles considering soil-pile interactions[J]. Computers and Geotechnics, 2022, 152: 105020.
- [13] 蒯行成,沈蒲生. 层状介质中群桩水平动力阻抗的简化计算方法[J]. 振动工程学报, 1998, 11(3): 258-264.
KUAI X C, SHEN P S. Simplified method for calculating horizontal dynamic impedances of pile groups in layered media[J]. Journal of Vibration Engineering, 1998, 11(3): 258-264. (in Chinese)
- [14] PASTERNAK P L. Fundamentals of a new method of analyzing structures on an elastic foundation by means of two foundation moduli[J]. Proceedings of the Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Literatury Po Stroitel'stvui Arkhitekture, 1954: 4-7.
- [15] BHADURI A, CHOUDHURY D. Steady-state response of flexible combined pile-raft foundation under dynamic loading[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2021, 145: 106664.
- [16] 王珏,周叮,刘伟庆,等. 考虑成层土剪切效应的相邻桩基动力相互作用[J]. 振动工程学报, 2013, 26(5): 732-742.
WANG J, ZHOU D, LIU W Q, et al. Dynamic interaction between adjacent piles considering soil shear effect in layered foundation[J]. Journal of Vibration Engineering, 2013, 26(5): 732-742. (in Chinese)
- [17] WANG J, LO S H, ZHOU D. Effect of a forced harmonic vibration pile to its adjacent pile in layered elastic soil with double-shear model[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2014, 67: 54-65.
- [18] QETIN D, SIMSEK M. Free vibration of an axially functionally graded pile with pinned ends embedded in Winkler-Pasternak elastic medium[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2011, 40(4): 583-594.
- [19] HALABE U B, JAIN S K. Lateral free vibration of a single pile with or without an axial load[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 195(3): 531-544.
- [20] 熊辉,杨丰. 文克尔地基模型下液化土桩基水平振动响应分

- 析[J]. 岩土力学, 2020, 41(1): 103-110.
- XIONG H, YANG F. Horizontal vibration response analysis of pile foundation in liquefied soil under Winkler foundation model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, 41(1): 103-110. (in Chinese)
- [21] FENG Z H, COOK R D. Beam elements on two-parameter elastic foundations [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1983, 109(6): 1390-1402.
- [22] 张玲, 岳梢, 赵明华, 等. 基于改进 Pasternak 地基模型的桩柱式桥墩受力变形分析[J]. 岩土工程学报, 2022, 44(10): 1817-1826.
- ZHANG L, YUE S, ZHAO M H, et al. Behaviors of pile-column piers based on modified Pasternak foundation model[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(10): 1817-1826. (in Chinese)
- [23] GAZETAS G, DOBRY R. Horizontal response of piles in layered soils[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1984, 110(1): 20-40.
- [24] TANAHASHI H. Formulas for an infinitely long Bernoulli-Euler beam on the Pasternak model[J]. Soils and Foundations, 2004, 44(5): 109-118.
- [25] 梁发云, 李彦初, 黄茂松. 基于 Pasternak 双参数地基模型水平桩简化分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(增刊1): 300-304.
- LIANG F Y, LI Y C, HUANG M S. Simplified method for laterally loaded piles based on Pasternak double-parameter spring model for foundations [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(Sup.1): 300-304. (in Chinese)
- [26] YAO W J, YIN W X, CHEN J, et al. Numerical simulation of a super-long pile group under both vertical and lateral loads [J]. Advances Structural Engineering, 2010, 13(6): 1139-1151.
- [27] 吕冰. 水平振动荷载作用下支盘桩动力特性研究[D]. 洛阳: 河南科技大学, 2015.
- LÜ B. Study on dynamic characteristics of branch pile under horizontal vibration load [D]. Luoyang: Henan University of Science and Technology, 2015. (in Chinese)
- [28] 胡安峰. 桩基水平振动理论与性状研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2002.
- HU A F. Study on horizontal vibration theory and characteristics of pile foundation [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2002. (in Chinese)
- [29] 梁发云, 陈海兵, 宋著. 轴向荷载对横向受荷桩承载性状影响的参数分析[J]. 土木建筑与环境工程, 2011, 33(6): 25-30.
- LIANG F Y, CHEN H B, SONG Z. Parameter analysis of effects of axial load on the lateral response of piles [J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2011, 33(6): 25-30. (in Chinese)
- [30] 赵明华, 李微哲, 杨明辉, 等. 成层地基中倾斜偏心荷载下基桩位移特性室内模型试验研究[J]. 土木工程学报, 2006, 39(12): 95-99.
- ZHAO M H, LI W Z, YANG M H, et al. A model test study on displacement of piles under inclined and eccentric loads in layered soils[J]. China Civil Engineering Journal, 2006, 39(12): 95-99. (in Chinese)