doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023498

一类非齐次核有界积分算子的反问题

张丽娟[1], 洪 勇[1], 廖建全[2]
(1. 广州华商学院 数据科学学院, 广州 511300; 2. 广东第二师范学院 数学学院, 广州 510303)

摘要: 基于有界算子的本质之一: 当原象集有界时象集一定有界, 提出算子有界的反问题, 即当算子 T 的象集有界时, 如何判断其原象集有界. 先引入算子反向有界的概念, 再利用权函数方法和实分析技巧, 讨论积分算子反向有界的等价参数条件, 并给出反向有界积分算子的构造定理. 最后给出一些特例.

关键词: 非齐次核; 积分算子; 反向有界算子; 逆向 Hilbert 型积分不等式; 构造定理
中图分类号: O178 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)04-0858-08

Inverse Problem for a Class of Bounded Integral Operators with Non-homogeneous Kernel

ZHANG Lijuan[1], HONG Yong[1], LIAO Jianquan[2]
(1. *College of Data Science, Guangzhou Huashang College, Guangzhou* 511300, *China*;
2. *College of Mathematics, Guangdong University of Education, Guangzhou* 510303, *China*)

Abstract: One of the essence of bounded operators is that the image set must be bounded when the original image set is bounded, we propose the inverse problem of operator boundedness: how to determine the boundedness of the original image set of an operator T when its image set is bounded. We first introduce the concept of operator reverse boundedness, and then use weight function method and real analysis techniques to discuss the equivalent parametric conditions for reverse boundedness of integral operators, and give a construction theorem for reverse boundedness of integral operators. Finally, some special cases are given.

Keywords: non-homogeneous kernel; integral operator; reverse bounded operator; inverse Hilbert-type integral inequality; construction theorem

1 引言与预备知识

设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\,(p>1)$, Hardy 等[1] 给出了 Hilbert 积分不等式: 若 $f\in L_p(0,+\infty)$, $g\in L_q(0,+\infty)$, 则有

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x+y}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|f\|_p\|g\|_q,$$

收稿日期: 2023-11-29.

第一作者简介: 张丽娟(1994—), 女, 汉族, 硕士, 讲师, 从事数理统计分析及实分析的研究, E-mail: 464085923@qq.com. **通信作者简介:** 洪 勇(1959—), 男, 汉族, 硕士, 教授, 从事调和分析及算子理论的研究, E-mail: hongyonggdcc@yeah.net.

基金项目: 广东省基础与应用基础研究基金(批准号: 2022A1515012429)、广东省重点建设学科科研能力提升项目(批准号: 2021ZDJS056)和广州华商学院导师制项目(批准号: 2022HSDS04).

其中常数因子$\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$是最佳值. 由该不等式可导出具有相同核$\frac{1}{x+y}$的积分算子 T：

$$T(f)(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x+y}f(x)\mathrm{d}x$$

是 $L_p(0,+\infty)$中的有界算子，且 T 的算子范数 $\|T\|=\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$. 目前，关于 Hilbert 型不等式及相关算子的研究已取得丰硕成果[2-14]，并形成了较完整的理论体系[15]. 由于一个算子 T 有界是指存在常数 $M>0$，使得 $\|T(f)\|\leqslant M\|f\|$，因此其本质是 T 将有界集映射成有界集，即当原象集有界时，象集也有界. 显然，其反问题是：当 T 的象集有界时，如何保证 T 的原象集有界. 这需要研究反向不等式 $\|f\|\leqslant\overline{M}\|T(f)\|$，由此需引入算子反向有界的概念，也需要探讨相关的逆向 Hilbert 型不等式. 近年来，关于逆向 Hilbert 型不等式的研究已有许多成果[16-19]，但尚不完善. 文献[20]探讨了拟齐次核积分算子有界的等价参数条件，本文在此基础上，讨论非齐次核积分算子反向有界的问题，得到积分算子反向有界的充分必要条件.

将 Lebesgue 空间 $L_r(0,+\infty)$进行带权推广：设 $r\neq0$，$\alpha\in\mathbb{R}$，记

$$L_r^{\alpha}(0,+\infty)=\left\{f(x)：\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha}|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}<+\infty\right\}.$$

当 $r>1$ 时，$L_r^{\alpha}(0,+\infty)$是赋范向量空间，其范数是 $\|f\|_{r,\alpha}=\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha}|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}$. 由于当 $r<1$ $(r\neq0)$时，$L_r^{\alpha}(0,+\infty)$不能构成通常意义上的向量空间，为区别，当 $r<1$ $(r\neq0)$时，记 $\|f\|_{r,\alpha}^{*}=\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha}|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}$.

若$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$K(x,y)\geqslant0$，$\overline{M}>0$，$f\in L_p^{\alpha}(0,+\infty)$，$g\in L_q^{\beta}(0,+\infty)$，则以 $K(x,y)$为核的不等式

$$\|f\|_{p,\alpha}^{*}\|g\|_{q,\beta}^{*}\leqslant\overline{M}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}K(x,y)|f(x)||g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{1}$$

称为逆向 Hilbert 型积分不等式，$\overline{M}$ 称为常数因子. 本文记

$$W_1(s)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^s\mathrm{d}t,\qquad W_2(s)=\int_0^{+\infty}K(t,1)t^s\mathrm{d}t,$$

$$A(K,f,g)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}K(x,y)|f(x)||g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引理 1　设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\lambda_1\lambda_2>0$，$K(x,y)=G(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2})$是非负可测函数，则

$$\omega_1(x,\beta,q)=\int_0^{+\infty}K(x,y)y^{-(\beta+1)/q}\mathrm{d}y=x^{(\lambda_1/\lambda_2)[(\beta+1)/q-1]}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right),$$

$$\omega_2(y,\alpha,p)=\int_0^{+\infty}K(x,y)x^{-(\alpha+1)/p}\mathrm{d}x=y^{(\lambda_2/\lambda_1)[(\alpha+1)/p-1]}W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right).$$

若$\frac{\alpha}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_2 p}=\frac{\beta}{\lambda_2 q}+\frac{1}{\lambda_1 q}$，则 $\lambda_1W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)=\lambda_2W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)$.

证明：易知 $K(x,y)=G(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2})$具有如下性质：对 $t>0$，有

$$K(tx,y)=K(x,t^{\lambda_1/\lambda_2}y),\qquad K(x,ty)=K(t^{\lambda_2/\lambda_1}x,y).$$

特别地，$K(t,1)=K(1,t^{\lambda_1/\lambda_2})$，$K(1,t)=K(t^{\lambda_2/\lambda_1},1)$. 于是

$$\omega_1(x,\beta,q)=\int_0^{+\infty}K(1,x^{\lambda_1/\lambda_2}y)y^{-(\beta+1)/q}\mathrm{d}y=x^{(\lambda_1/\lambda_2)[(\beta+1)/q-1]}\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-(\beta+1)/q}\mathrm{d}t=$$

$$x^{(\lambda_1/\lambda_2)[(\beta+1)/q-1]}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right).$$

根据对称性，同理可得 $\omega_2(y,\alpha,p)=y^{(\lambda_2/\lambda_1)[(\alpha+1)/p-1]}W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)$.

若$\frac{\alpha}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_2 p}=\frac{\beta}{\lambda_2 q}+\frac{1}{\lambda_1 q}$，则$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{\beta+1}{q}-1\right)-1=-\frac{\alpha+1}{p}$，于是

$$W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=\int_0^{+\infty}K(t^{\lambda_2/\lambda_1},1)t^{-(\beta+1)/q}\mathrm{d}t=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int_0^{+\infty}K(u,1)u^{-(\lambda_1/\lambda_2)[(\beta+1)/q-1]-1}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int_0^{+\infty}K(u,1)u^{-(\alpha+1)/p}\mathrm{d}u=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right),$$

故$\lambda_1 W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)=\lambda_2 W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)$.

引理2[21] 设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$x\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$，$f(x)\geqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$，$\omega(x)\geqslant 0$，则有带权的逆向Hölder积分不等式

$$\int_\Omega f(x)g(x)\omega(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_\Omega f^p(x)\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_\Omega g^q(x)\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

当且仅当存在常数C使得$f^p(x)=Cg^q(x)(x\in\Omega)$时，不等式取等号.

2 非齐次核逆向Hilbert型积分不等式构造定理

定理1 设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\lambda_1\lambda_2>0$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$K(x,y)=G(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2})$是非负可测函数，$0<W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)<+\infty$，$0<W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)<+\infty$，且存在常数$\sigma>0$，使得$W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\pm\sigma\right)<+\infty$或$W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\pm\sigma\right)<+\infty$. 则：

1) 当且仅当$\frac{\alpha}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_2 p}=\frac{\beta}{\lambda_2 q}+\frac{1}{\lambda_1 q}$时，存在常数$\overline{M}>0$，使得

$$\|f\|_{p,\alpha}^{*}\|g\|_{q,\beta}^{*}\leqslant\overline{M}A(K,f,g),\tag{2}$$

其中$f\in L_p^{\alpha}(0,+\infty)$，$g\in L_q^{\beta}(0,+\infty)$；

2) 当$\frac{\alpha}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_2 p}=\frac{\beta}{\lambda_2 q}+\frac{1}{\lambda_1 q}$时，式(2)的最佳常数因子为

$$\inf\{\overline{M}\}=\frac{|\lambda_1|^{1/q}|\lambda_2|^{1/p}}{W_0}\left(W_0=|\lambda_2|W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=|\lambda_1|W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)\right).$$

证明：由于对称性，不妨设$W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\pm\sigma\right)<+\infty$.

1) 充分性. 设$\frac{\alpha}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_2 p}=\frac{\beta}{\lambda_2 q}+\frac{1}{\lambda_1 q}$，根据引理1和引理2并注意到$q<0$，有

$$A(K,f,g)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^{(\alpha+1)/(pq)}}{y^{(\beta+1)/(pq)}}|f(x)|\right)\left(\frac{y^{(\beta+1)/(pq)}}{x^{(\alpha+1)/(pq)}}|g(y)|\right)K(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant$$

$$\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^{(\alpha+1)/q}}{y^{(\beta+1)/q}}|f(x)|^pK(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{y^{(\beta+1)/p}}{x^{(\alpha+1)/p}}|g(y)|^qK(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/q}=$$

$$\left(\int_0^{+\infty}x^{(\alpha+1)/q}|f(x)|^p\omega_1(x,\beta,q)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^{+\infty}y^{(\beta+1)/p}|g(y)|^q\omega_2(y,\alpha,p)\mathrm{d}y\right)^{1/q}=$$

$$W_1^{1/p}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)W_2^{1/q}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)\left(\int_0^{+\infty}x^{(\alpha+1)/q+(\lambda_1/\lambda_2)[(\beta+1)/q-1]}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\times$$

$$\left(\int_0^{+\infty}y^{(\beta+1)/p+(\lambda_2/\lambda_1)[(\alpha+1)/p-1]}|g(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{1/q}=$$

$$W_1^{1/p}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)W_2^{1/q}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^{+\infty}y^{\beta}|g(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{1/q}=$$

$$W_1^{1/p}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)W_2^{1/q}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)\|f\|_{p,\alpha}^{*}\|g\|_{q,\beta}^{*},$$

从而

$$\| f \|_{p,\alpha}^{*} \| g \|_{q,\beta}^{*} \leqslant W_1^{-1/p}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right) W_2^{-1/q}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right) A(K,f,g),$$

任取 $\overline{M} \geqslant W_1^{-1/p}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right) W_2^{-1/q}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)$，式(2)成立.

必要性. 设式(2)成立. 记 $\frac{\alpha}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_2 p}-\left(\frac{\beta}{\lambda_2 q}+\frac{1}{\lambda_1 q}\right)=c$，下面只需证明 $c=0$ 即可. 若 $c\lambda_1<0$，取充分小的 $\varepsilon>0$，令

$$f(x)=\begin{cases} x^{-(\alpha+1-|\lambda_1|\varepsilon)/p}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x>1,\end{cases} \qquad g(y)=\begin{cases} y^{-(\beta+1+|\lambda_2|\varepsilon)/q}, & y\geqslant 1,\\ 0, & 0<y<1,\end{cases}$$

则计算可得

$$\| f \|_{p,\alpha}^{*} \| g \|_{q,\beta}^{*} = \left(\int_0^1 x^{-1+|\lambda_1|\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_1^{+\infty} y^{-1-|\lambda_2|\varepsilon}\mathrm{d}y\right)^{1/q} = \frac{1}{\varepsilon|\lambda_1|^{1/p}|\lambda_2|^{1/q}}.$$

由 $c\lambda_1<0$ 有 $-c\lambda_1>0$，于是

$$\begin{aligned} A(K,f,g) &= \int_0^1 x^{-(\alpha+1)/p+|\lambda_1|\varepsilon/p}\left(\int_1^{+\infty} K(x,y)y^{-(\beta+1)/q-|\lambda_2|\varepsilon/q}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \\ &\int_0^1 x^{-(\alpha+1)/p+|\lambda_1|\varepsilon/p}\left(\int_1^{+\infty} K(1,x^{\lambda_1/\lambda_2}y)y^{-(\beta+1)/q-|\lambda_2|\varepsilon/q}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \\ &\int_0^1 x^{-(\alpha+1)/p+|\lambda_1|\varepsilon/p+(\lambda_1/\lambda_2)[(\beta+1)/q+|\lambda_2|\varepsilon/q-1]}\left(\int_{x^{\lambda_1/\lambda_2}}^{+\infty} K(1,t)t^{-(\beta+1)/q-|\lambda_2|\varepsilon/q}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leqslant \\ &\int_0^1 x^{-1-c\lambda_1+|\lambda_1|\varepsilon}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-(\beta+1)/q-|\lambda_2|\varepsilon/q}\mathrm{d}t = \\ &\frac{1}{-c\lambda_1+|\lambda_1|\varepsilon}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}\right), \end{aligned}$$

从而可得

$$\frac{1}{|\lambda_1|^{1/p}|\lambda_2|^{1/q}} \leqslant \frac{\varepsilon\overline{M}}{-c\lambda_1+|\lambda_1|\varepsilon}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}\right). \tag{3}$$

令

$$F(x)=\begin{cases} K(1,t)t^{-(\beta+1)/q+\sigma}, & t\geqslant 1,\\ K(1,t)t^{-(\beta+1)/q}, & 0<t<1,\end{cases}$$

因为 $\varepsilon>0$ 充分小，$q<0$，故 $0<\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{-q}<\sigma$，于是 $0\leqslant K(1,t)t^{-(\beta+1)/q-|\lambda_2|\varepsilon/q}\leqslant F(t)(t>0)$，且

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 K(1,t)t^{-(\beta+1)/q}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty} K(1,t)t^{-(\beta+1)/q+\sigma}\mathrm{d}t \leqslant \\ &W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)+W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}+\sigma\right)<+\infty. \end{aligned}$$

综上并根据 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0^+} W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-(\beta+1)/q-|\lambda_2|\varepsilon/q}\mathrm{d}t = \\ &\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-(\beta+1)/q}\mathrm{d}t = W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)<+\infty. \end{aligned}$$

于是在式(3)中令 $\varepsilon\to 0^+$，得

$$0<\frac{1}{|\lambda_1|^{1/p}|\lambda_2|^{1/q}}\leqslant 0, \tag{4}$$

矛盾. 故 $c\lambda_1<0$ 不成立.

若 $c\lambda_1>0$，取充分小的 $\varepsilon>0$，令

$$f(x)=\begin{cases} x^{-(\alpha+1+|\lambda_1|\varepsilon)/p}, & x\geqslant 1,\\ 0, & 0<x<1,\end{cases} \qquad g(y)=\begin{cases} y^{-(\beta+1-|\lambda_1|\varepsilon)/q}, & 0<y\leqslant 1,\\ 0, & y>1,\end{cases}$$

则类似式(3)的推导方法，可得

$$\frac{1}{|\lambda_1|^{1/p}|\lambda_2|^{1/q}}\leqslant\frac{\varepsilon\overline{M}}{\lambda_1 c+|\lambda_1|\varepsilon}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}+\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}\right).\tag{5}$$

同理，利用 $W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}-\sigma\right)<+\infty$ 及 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}+\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}\right)=W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)<+\infty,$$

于是在式(5)中令 $\varepsilon\to0^+$，可得式(4)，矛盾，因此 $c\lambda_1>0$ 也不成立.

综上可得 $c\lambda_1=0$，从而 $c=0$.

2) 设 $\frac{\alpha}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_2 p}=\frac{\beta}{\lambda_2 q}+\frac{1}{\lambda_1 q}$，则 $c=0$. 根据引理 1，有 $|\lambda_1|W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)=|\lambda_2|W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=W_0$，若式(2)的最佳常数因子不是 $|\lambda_1|^{1/q}|\lambda_2|^{1/p}/W_0$，则存在常数 $M_0>0$，使得 $\|f\|_{p,\alpha}^{*}\|g\|_{q,\beta}^{*}\leqslant\overline{M}_0A(K,f,g)$，且

$$\overline{M}_0<\frac{|\lambda_1|^{1/q}|\lambda_2|^{1/p}}{W_0}=\frac{|\lambda_1|^{1/q}|\lambda_2|^{1/p}}{|\lambda_2|}W_1^{-1}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=\left(\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}\right)^{1/q}W_1^{-1}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right).$$

由于 $c=0$，类似推导式(3)的方法，可得

$$\frac{1}{|\lambda_1|^{1/p}|\lambda_2|^{1/q}}\leqslant\frac{\overline{M}_0}{|\lambda_1|}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}\right),$$

令 $\varepsilon\to0^+$，则有 $\frac{1}{|\lambda_1|^{1/p}|\lambda_2|^{1/q}}\leqslant\frac{\overline{M}_0}{|\lambda_1|}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)$，于是可得

$$\overline{M}_0\geqslant\left(\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}\right)^{1/q}W_1^{-1}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right),$$

与 $\overline{M}_0<\left(\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}\right)^{1/q}W_1^{-1}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)$ 矛盾，故 $\frac{|\lambda_1|^{1/q}|\lambda_2|^{1/p}}{W_0}$ 是式(2)的最佳常数因子.

注 1 当 $0<p<1$，$q<0$，$\lambda_1\lambda_2>0$ 时，$\frac{1}{\lambda_2 p}\neq\frac{1}{\lambda_1 q}$. 根据定理 1 可知，对非齐次核 $K(x,y)=G(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2})(\lambda_1\lambda_2>0)$，不存在常数 $\overline{M}>0$，使得 $\|f\|_p^{*}\|g\|_q^{*}\leqslant\overline{M}A(K,f,g)$ 成立，即当 $\alpha=\beta=0$ 时，非齐次核 $K(x,y)=G(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2})(\lambda_1\lambda_2>0)$ 不能构建逆向 Hilbert 型积分不等式 $A(K,f,g)\leqslant\overline{M}A(K,f,g)$.

3 非齐次核积分算子反向有界的充要条件

设 $K(x,y)\geqslant0$，定义以 $K(x,y)$ 为核的积分算子 T 为

$$T(f)(y)=\int_0^{+\infty}K(x,y)f(x)\mathrm{d}x,\tag{6}$$

若 $\|f\|_{p,\alpha}^{*}\leqslant\overline{M}\|T(f)\|_{p,\gamma}^{*}$，则称 T 是 $L_p^{\alpha}(0,+\infty)$ 到 $L_p^{\gamma}(0,+\infty)$ 的反向有界算子，并记

$$\|T\|^{*}=\sup\left\{\frac{\|f\|_{p,\alpha}^{*}}{\|T(f)\|_{p,\gamma}^{*}}:f\in L_p^{\alpha}(0,+\infty),\ \|T(f)\|_{p,\gamma}^{*}\neq0\right\}.$$

根据 Hilbert 型不等式的基本理论，逆向 Hilbert 型积分不等式(1)等价于算子不等式

$$\|f\|_{p,\alpha}^{*}\leqslant\overline{M}\|T(f)\|_{p,\beta(1-p)}^{*}.\tag{7}$$

于是根据定理 1，可得如下积分算子 T 反向有界的充分必要条件.

定理 2 设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\lambda_1\lambda_2>0$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$K(x,y)=G(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2})$ 是非负可测函数，$0<W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)<+\infty$，$0<W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)<+\infty$，存在常数 $\sigma>0$，使得 $W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\pm\sigma\right)<+\infty$ 或 $W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\pm\sigma\right)<+\infty$，积分算子 T 由式(6)定义. 则：

1) 当且仅当 $\frac{\alpha}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_2 p}=\frac{\beta}{\lambda_2 q}+\frac{1}{\lambda_1 q}$ 时，T 是 $L_p^{\alpha}(0,+\infty)$ 到 $L_p^{\beta(1-p)}(0,+\infty)$ 的反向有界算子，且 $\|T\|^{*}\leqslant W_1^{-1/p}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)W_2^{-1/q}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)$；

2）当$\frac{\alpha}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_2 p}=\frac{\beta}{\lambda_2 q}+\frac{1}{\lambda_1 q}$时，$\|T\|^{*}=W_1^{-1/p}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)W_2^{-1/q}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)=\frac{|\lambda_1|^{1/q}|\lambda_2|^{1/p}}{W_0}$.

在定理 2 中取 $\lambda_1=\lambda_2=1$，可得下列推论.

推论 1　设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$K(x,y)=G(xy)$是非负可测函数，$0<W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)<+\infty$，$0<W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)<+\infty$，存在 $\sigma>0$，使得 $W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\pm\sigma\right)<+\infty$ 或 $W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\pm\sigma\right)<+\infty$，积分算子 T 由式(6)定义. 则：

1）当且仅当$\frac{\alpha+1}{p}=\frac{\beta+1}{q}$时，$T$ 是 $L_p^{\alpha}(0,+\infty)$到 $L_p^{\beta(1-p)}(0,+\infty)$的反向有界算子，且 $\|T\|^{*}\leqslant W_1^{-1/p}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)W_2^{-1/q}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)$；

2）当$\frac{\alpha+1}{p}=\frac{\beta+1}{q}$时，$\|T\|^{*}=W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)$.

推论 2　设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，$a>0$，$-a<\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{\alpha}{p}-\frac{1}{q}\right)<b$，$\frac{\alpha}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_2 p}=\frac{\beta}{\lambda_2 q}+\frac{1}{\lambda_1 q}$，积分算子 T 为

$$T(f)(y)=\int_0^{+\infty}\frac{(\min\{1,x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}\})^b}{(1+x^{\lambda_1}y^{\lambda_2})^a}f(x)\mathrm{d}x,$$

则 T 是$L_p^{\alpha}(0,+\infty)$到 $L_p^{\beta(1-p)}(0,+\infty)$的反向有界算子，即

$$\|f\|_{p,\alpha}^{*}\leqslant\overline{M}_0(a,b,\alpha,\beta)\|T(f)\|_{p,\beta(1-p)}^{*},$$

且

$$\|T\|^{*}=\overline{M}_0(a,b,\alpha,\beta)=\left[\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}\int_0^1\frac{1}{(1+t)^a}(t^{a-(1/\lambda_1)(1/q-\alpha/p)-1}+t^{b+(1/\lambda_2)(1/p-\beta/q)-1})\mathrm{d}t\right]^{-1}.$$

证明：根据$\frac{\alpha}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_2 p}=\frac{\beta}{\lambda_2 q}+\frac{1}{\lambda_1 q}$和$-a<\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{\alpha}{p}-\frac{1}{q}\right)<b$可知，$a-\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{p}\right)>0$，$b+\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{p}-\frac{\beta}{q}\right)>0$，从而 $\overline{M}_0(a,b,\alpha,\beta)$中的积分收敛. 记

$$K(x,y)=G(x^{\lambda_1}y^{\lambda_2})=\frac{(\min\{1,x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}\})^b}{(1+x^{\lambda_1}y^{\lambda_2})^a}\ (x>0,\ y>0),$$

则 $K(x,y)\geqslant 0$，且

$$\begin{aligned}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)&=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-(\beta+1)/q}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{(\min\{1,t^{\lambda_2}\})^b}{(1+t^{\lambda_2})^a}t^{-(\beta+1)/q}\mathrm{d}t=\\&\int_0^1\frac{1}{(1+t^{\lambda_2})^a}t^{b\lambda_2-(\beta+1)/q}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^{\lambda_2})^a}t^{-(\beta+1)/q}\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{\lambda_2}\int_0^1\frac{1}{(1+u)^a}u^{b+(1/\lambda_2)(1/p-\beta/q)-1}\mathrm{d}u+\frac{1}{\lambda_2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+u)^a}u^{(1/\lambda_2)(1/p-\beta/q)-1}\mathrm{d}u=\\&\frac{1}{\lambda_2}\int_0^1\frac{1}{(1+u)^a}u^{b+(1/\lambda_2)(1/p-\beta/q)-1}\mathrm{d}u+\frac{1}{\lambda_2}\int_0^1\frac{1}{(1+t)^a}t^{a-(1/\lambda_2)(1/p-\beta/q)-1}\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{\lambda_2}\int_0^1\frac{1}{(1+t)^a}t^{b+(1/\lambda_2)(1/p-\beta/q)-1}\mathrm{d}t+\frac{1}{\lambda_2}\int_0^1\frac{1}{(1+t)^a}t^{a-(1/\lambda_1)(1/q-\alpha/p)-1}\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{\lambda_2}\int_0^1\frac{1}{(1+t)^a}(t^{a-(1/\lambda_1)(1/q-\alpha/p)-1}+t^{b+(1/\lambda_2)(1/p-\beta/q)-1})\mathrm{d}t<+\infty.\end{aligned}$$

类似可得 $W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)<+\infty$.

因为 $a-\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{p}\right)>0$，$b+\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{p}-\frac{\beta}{q}\right)>0$，所以根据实数的稠密性，可知存在常数 $\sigma>0$，使得

$$a-\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{p}\right)\pm\frac{\sigma}{\lambda_2}>0,\qquad b+\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{p}-\frac{\beta}{q}\right)\pm\frac{\sigma}{\lambda_2}>0.$$

计算易得

$$W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\pm\sigma\right)=\frac{1}{\lambda_2}\int_0^1\frac{1}{(1+t)^a}(t^{a-(1/\lambda_1)(1/q-a/p)\pm\sigma/\lambda_2-1}+t^{b+(1/\lambda_2)(1/p-\beta/q)\pm\sigma/\lambda_2-1})\mathrm{d}t,$$

从而 $W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\pm\sigma\right)<+\infty$. 又由于

$$W_0=|\lambda_2|W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=\int_0^1\frac{1}{(1+t)^a}(t^{a-(1/\lambda_1)(1/q-a/p)-1}+t^{b+(1/\lambda_2)(1/p-\beta/q)-1})\mathrm{d}t,$$

故 $\frac{1}{W_0}\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}=\overline{M}_0(a,b,\alpha,\beta)$.

综上并根据定理2知结论成立. 证毕.

在推论2中取 $b=0$, $\alpha=p\left(\frac{1}{q}-\lambda_1\tau\right)$, $\beta=q\left(\frac{1}{p}-\lambda_2\tau\right)$, $0<\tau<a$, 易验证它们满足推论2的所有条件, 且

$$\left[a-\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{p}\right)\right]+\left[b+\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{p}-\frac{\beta}{q}\right)\right]=a,$$

$$a-\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{p}\right)=a-\tau,\qquad b+\frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{p}-\frac{\beta}{q}\right)=\tau.$$

根据Beta函数的性质, 有 $\overline{M}_0(a,b,\alpha,\beta)=\frac{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}{B(a-\tau,\tau)}$, 于是根据推论2可得如下推论.

推论3 设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $0<\tau<a$, 积分算子 T 为

$$T(f)(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^{\lambda_1}y^{\lambda_2})^a}f(x)\mathrm{d}x,$$

则 T 是 $L_p^{p(1/q-\lambda_1\tau)}(0,+\infty)$ 到 $L_{\tilde{p}}^{\lambda_2\tilde{p}\tau-1}(0,+\infty)$ 的反向有界算子:

$$\|f\|_{p,p(1/q-\lambda_1\tau)}^{*}\leqslant\frac{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}{\mathrm{B}(a-\tau,\tau)}\|T(f)\|_{\tilde{p},\lambda_2\tilde{p}\tau-1}^{*},$$

且 $\|T\|^{*}=\frac{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}{\mathrm{B}(a-\tau,\tau)}$.

参 考 文 献

[1] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. Inequalities [M]. Gambridge: Gambridge University Press, 1934: 255-268.

[2] RASSIAS M Th, YANG B C. A Multidimensional Half-Discrete Hilbert-Type Inequality and Riemann Zeta Function [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 225: 263-277.

[3] HONG Y, HUANG Q L, YANG B C, et al. The Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Kind of Hilbert-Type Multiple Integral Inequality with the Non-homogeneous Kernel and Its Applications [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2017, 2017: 316-1-316-12.

[4] 洪勇. 准齐次核的Hardy-Hilbert型级数不等式 [J]. 数学年刊, 2012, 33A(6): 679-686. (HONG Y. Hardy-Hilbert Type Series Inequality with a Quasi-homogeneous Kernel [J]. Chinese Annals of Mathematics, 2012, 33A(6): 679-686.)

[5] 洪勇. 一类具有准齐次核的Hilbert型奇异重积分算子的范数及应用[J]. 数学年刊, 2014, 35A(1): 21-30. (HONG Y. On the Norm of Hilbert-Type Singular Multiple Integral Operator with Quasi-homogeneous Kernel and Application [J]. Chinese Annals of Mathematics, 2014, 35A(1): 21-30.)

[6] 杨必成. 关于一个Hilbert类积分不等式的推广及应用 [J]. 应用数学, 2003, 16(2): 82-86. (YANG B C. On a Generalization of a Hilbert's Type Integral Inequality and Its Applications [J]. Mathematica Applicata, 2003, 16(2): 82-86.)

[7] 杨必成. 关于一个推广的 Hardy-Hilbert 不等式 [J]. 数学年刊，2002，23A(2)：247-254.（YANG B C. On an Extension of Hardy-Hilbert's Inequality [J]. Chinese Annals of Mathematics，2002，23A(2)：247-254.）

[8] 洪勇. 具有齐次核的 Hilbert 型积分不等式的构造特征及应用 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2017，55(2)：189-194.（HONG Y. Structural Characteristics and Applications of Hilbert's Type Integral Inequalities with Homogeneous Kernel [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2017，55(2)：189-194.）

[9] 高明哲. Hardy-Riesz 拓广了的 Hilbert 不等式的一个改进 [J]. 数学研究与评论，1994，14(2)：255-259.（GAO M Z. An Improvement of Hardy-Riesz's Extension of the Hilbert Inequality [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition，1994，14(2)：255-259.）

[10] LIU T，YANG B C，HE L P. On a Multidimensional Hilbert-Type Integral Inequality with Logarithm Function [J]. Mathematical Inequalities and Applications，2015，18(4)：1219-1234.

[11] 洪勇. 带对称齐次核的级数算子的范数刻画及其应用 [J]. 数学学报(中文版)，2008，15(2)：365-370.（HONG Y. On the Norm of a Series Operator with a Symmetric and Homogeneous Kernel and Its Application [J]. Acta Mathematica Sinca (Chinese Series)，2008，51(2)：365-370.）

[12] 洪勇，温雅敏. 齐次核的 Hilbert 型级数不等式取最佳常数因子的充要条件 [J]. 数学年刊，2016，37A(3)：329-336.（HONG Y，WEN Y M. A Necessary and Sufficient Condition of That Hilbert Type Series Inequality with Homogeneous Kernel Has the Best Constant Factor [J]. Chinese Annals of Mathematics，2016，37A(3)：329-336.）

[13] 杨必成，王爱珍. 一个全平面非齐次核的 Hilbert 积分不等式 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2018，56(4)：819-824.（YANG B C，WANG A Z. A Hilbert's Integral Inequality in the Whole Plane with Non-homogeneous Kernel [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2018，56(4)：819-824.）

[14] 洪勇. 一类具有最佳常数因子的 Hardy 型多重积分不等式 [J]. 数学物理学报，2011，31A(6)：1586-1591.（HONG Y. On a Multipe Hardy-Type Integral Inequality with a Best Constant Factor and Its Application [J]. Acta Mathematica Scientia，2011，31A(6)：1586-1591.）

[15] 洪勇，和炳. Hilbert 型不等式的理论与应用 [M]. 北京：科学出版社，2023：271-427.（HONG Y，HE B. Theory and Applications of Hilbert-Type Inequalities [M]. Beijing：Science Press，2023：271-427.）

[16] RASSIAS M Th，YANG B C，RAIGORDSKII A M. Two Kinds of the Reverse Hardy-Type Integral Inequalities with the Equivalent forms Related to the Extended Riemann Zeta Function [J]. Applicable Analysis and Discrete Mathematics，2018，12：273-296.

[17] 洪勇，陈强. 非齐次核逆向 Hilbert 型积分不等式的最佳搭配参数及算子表达式 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2022，60(4)：845-852.（HONG Y，CHEN Q. Optimal Matching Parameters for Inverse Hilbert-Type Integral Inequality with Non-homogeneous Kernel and Operator Expression [J]. Journal of Jilin University (Sciense Edition)，2022，60(4)：845-852.）

[18] 杨必成，陈强. 一类非齐次核逆向的 Hardy 型积分不等式成立的等价条件 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2017，55(4)：804-808.（YANG B C，CHEN Q. Equivalent Conditions of Existence of a Class of Reverse Hardy-Type Integral Inequalities with Non-homogeneous Kernel [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2017，55(4)：804-808.）

[19] RASSIAS M Th，YANG B C，MELETIOU G C，et al. A More Accurate Half-Discrete Hilbert-Type Inequality in Whole Plane and the Reverses [J/OL]. Annals of Functional Analysis，(2021-06-29)[2023-09-08]. https://doi.org/10.1007/s43034-012-00133-w.

[20] HONG Y，HE B，YANG B C. Necessary and Sufficient Conditions for the Validity of Hilbert Type Integral Inequalities with a Class of Quasi-homogeneous Kernels and Its Application in Operator Theory [J]. Journal of Mathematics Inequalities，2018，12(3)：777-788.

[21] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 5 版. 济南：山东科学技术出版社，2021：4-43.（KUANG J C. Applied Inequalities [M]. 5th ed. Jinan：Shangdong Science and Technology Press，2021：4-43.）

（责任编辑：李　琦）