DOI:10.11784/tdxbz202508004

节点余量下降法求解稳态流动边界值问题

崔玉红[1,2]，王善举[1]，董泰郎[1,2]，程冠华[1]，尹　钊[3]
（1. 天津大学机械工程学院，天津 300350；2. 车用动力系统全国重点实验室，天津 300350；
3. 北京空间飞行器总体设计部，北京 100094）

摘　要：节点余量下降法（NRDM）是在广义有限差分法基础上发展起来的一种数值方法，目前已应用于求解线性弹性问题、超弹性、热弹性和电弹性等固体力学问题．本文将其拓展求解以强非线性为特征的稳态流动边界值问题．非线性流动边界值问题的核心挑战在于强对流效应带来的数值稳定性问题，为克服传统显式迭代格式和同位节点方案遭遇的稳定性难题，研究提出了一种基于压力修正框架的改进节点余量下降算法．通过在节点余量下降法的迭代框架中引入压力修正思想与 Rhie-Chow 插值技术，成功解决了压力-速度耦合与数值振荡难题．研究通过一系列代表性算例验证了节点余量下降法求解稳态流动边界值问题的计算精度和稳定性．结果表明，节点余量下降法具有较好的计算精度与稳定性，其数值解与解析解及经典基准数据高度一致，并且在较高雷诺数下的强非线性算例中依然能够稳定收敛得到精确数值解．研究证明，改进的节点余量下降法是一种兼具精确性与稳定性的数值方法，其既无需构建和计算大型全局矩阵，也无需划分网格，不需要插值函数，不需要积分；同时精确求解了不可压稳态流动边界值问题这一非线性偏微分方程组，进一步拓展并验证了节点余量下降法作为一种通用计算框架的能力．研究为未来继续拓展求解诸如物质扩散与流固耦合等同样遵循基本守恒规律并最终可由偏微分方程描述的复杂物理场问题，提供了一条可靠的求解途径．

关键词：节点余量下降法；稳态流动；边界值问题；Rhie-Chow 插值；无网格法
中图分类号：O302　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0493-2137（2026）11-1138-15

Node's Residual Descent Method for Solving Steady-State Flow Boundary Value Problems

Cui Yuhong[1,2]，Wang Shanju[1]，Dong Tailang[1,2]，Cheng Guanhua[1]，Yin Zhao[3]
（1. School of Mechanical Engineering，Tianjin University，Tianjin 300350，China；
2. State Key Laboratory of Automotive Powertrain System，Tianjin University，Tianjin 300350，China；
3. Beijing Institute of Spacecraft System Engineering，Beijing 100094，China）

Abstract：Node's residual descent method（NRDM）is a numerical method developed based on the generalized finite difference method. Previous research successfully applied NRDM to solid mechanics problems，including linear elasticity，hyperelasticity，thermoelasticity，and electroelasticity. This research extended NRDM to solve nonlinear problems in fluid mechanics，specifically incompressible steady-state flow boundary value problems. The core challenge in solving these nonlinear Navier-Stokes equations lies in the numerical instability induced by strong convective effects. Traditional explicit iterative schemes and collocated node schemes are often prone to stability problems. To address these challenges，this research proposed an improved NRDM algorithm that incorporates a pressure-correction framework. The pressure-correction concept and the Rhie-Chow interpolation technique were introduced into the NRDM iterative framework to successfully solve pressure-velocity coupling and numerical oscillation problems. This research systematically verified the accuracy and stability of the proposed method through a series of repre-

收稿日期：2025-08-06；**修回日期**：2025-10-14.
作者简介：崔玉红（1968—　），女，博士，教授，yhcui@tju.edu.cn.
通信作者：尹　钊，yinzhao08@126.com.
基金项目：国家自然科学基金资助项目（12672450）.
Supported by the National Natural Science Foundation of China（No. 12672450）.

sentative examples. Results demonstrate that NRDM achieves high accuracy and numerical stability, with solutions closely matching analytical solutions and classic benchmark data. The method exhibits stable convergence to accurate solutions even for nonlinear problems at high Reynolds numbers. Owing to its simple and direct formulation, the improved NRDM avoids large global matrices, mesh partitioning, interpolation functions, or numerical integration. It effectively solves nonlinear partial differential equations governing incompressible steady-state flows. These findings confirm NRDM as a robust and general computational framework, providing a reliable basis for future extensions to complex multiphysics problems, such as mass transfer and fluid-structure interaction, governed by similar fundamental conservation laws and described by partial differential equations.

Keywords: node's residual descent method; steady-state flow; boundary value problem; Rhie-Chow interpolation; meshless method

有限体积法和有限元法等有限单元数值方法的核心思想是基于网格对计算域进行单元划分. 与之并行发展的无网格法则摆脱了对网格单元的依赖,其无需预先生成由单元构成的计算网格,而是直接在一系列节点上建立离散方程,广义有限差分法(generalized finite difference method, GFDM)便是一种典型的无网格计算方法,其虽然具有无网格的特点,但仍需将离散后的代数方程组装成一个大型的全局稀疏矩阵进行计算求解,这仍是难题之一. 广义有限差分法的起源可追溯至 Jensen[1]针对非均匀网格以及 Perrone 等[2]针对任意网格构建差分格式的早期工作. 随后,Liszka 等[3]于 1980 年对该方法进行了系统性的阐述. 在此基础上,众多学者[4-9]对该方法进行了持续的改进和完善,在提升方法的计算精度、稳定性以及拓宽其应用范围等方面做出了重要贡献,为后续研究提供了坚实基础. 随着方法的不断发展,广义有限差分法也被应用于求解流体力学问题:Suchde 等[10]将其应用于不可压缩纳维-斯托克斯(Navier-Stokes, N-S)方程;Chew 等[11]提出采用广义有限差分法计算绕流问题;Song 等[12]和 Shao 等[13]分别使用广义有限差分法求解了二维、三维及界面斯托克斯问题;Li 等[14-15]提出了使用广义有限差分法计算流函数形式的 N-S 方程及浅水方程的方法. 这些研究已证实了广义有限差分法在求解流体问题时的精度和稳定性.

本文研究的节点余量下降法(node's residual descent method, NRDM)在继承广义有限差分离散理论的基础上,采用了免矩阵迭代的思想,通过定义局部节点余量来驱动场变量的迭代修正,避免了构建和计算全局矩阵. 这种策略将全局问题分解为一系列局部问题,从而为求解偏微分方程提供了一种替代途径. 目前,节点余量下降法已成功应用于求解线性弹性、超弹性、热弹性和电弹性等固体力学问题[16-19]. 这些研究证明了节点余量下降法作为一种免矩阵的迭代方法无需组装和求解大型全局矩阵;其离散过程不依赖于单元积分和预设的插值形函数,算法实现更为直接,对不同的物理场问题展现出很强的适用性. 本文进一步将节点余量下降法拓展至流体力学问题,以求解稳态不可压缩流问题,此类流动通常由强非线性对流效应主导. 将节点余量下降法应用于求解流体力学问题时,会遇到一些在固体力学问题中不曾出现的数值难题. 首先,必须有效处理流场中压力-速度的强耦合关系;其次,在无网格法通用的同位节点方案下,还需抑制非物理性的压力振荡. 为了解决上述两个数值难题,本文针对节点余量下降法构建了一种全新的求解方案,即将压力修正思想[20]与 Rhie-Chow 插值技术[21]应用到节点余量下降法的迭代框架之中,构建了一种全新的求解方案. 本文第 1 节介绍了节点余量下降法求解稳态不可压缩流动边界值问题所选用的控制方程和相应的边界条件;第 2 节系统阐述了节点余量下降法计算方法的数值实现细节,包括空间离散方法、收敛判据以及完整的迭代求解流程;第 3 节通过一系列代表性算例,对节点余量下降法的计算精确性和稳定性进行了系统性验证;最后一节对本文的研究工作进行了总结,并阐述了节点余量下降法的未来研究方向和应用前景.

1　控制方程组与离散格式

1.1　稳态不可压缩流动控制方程

描述该流体系统遵循的基本物理定律为质量守恒方程和动量守恒方程,即 N-S 方程组,如式(1)、式(2)所示.

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}+\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{2}$$

式中:ρ 为流体密度;$\boldsymbol{v}$ 为流体速度;$\boldsymbol{P}$ 为流体应力;$\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}$ 为流体所受体积力. 本文假设流动过程中热量交

换可忽略不计，流体温度保持恒定，因此能量守恒方程不予考虑.

对于定常流动的均质黏性不可压缩流体，方程中物理量对于时间的导数为 0，且流体密度 ρ 为常数，上述公式退化为稳态形式，将其展开并转化为无量纲形式，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla p+\frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{B} \tag{4}$$

式中：Re 为雷诺数；$\boldsymbol{B}$ 为无量纲形式下的体积力；p 为压力.

稳态流动边界值问题的边界条件包括速度边界条件和压力边界条件，这两种边界条件又各自分为 2 类. 第 1 类速度边界条件直接指定边界处的速度，是数学上定义的 Dirichlet 边界条件，如式(5)所示，其中 Ω 表示计算域，$\partial\Omega$ 表示计算域边界，$\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示边界条件速度.

$$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=\bar{\boldsymbol{v}} \tag{5}$$

第 2 类速度边界条件指定了边界处速度对边界外法线向量的导数，是数学上定义的 Neumann 边界条件，如式(6)所示，其中 $\boldsymbol{n}$ 表示边界外法线单位向量.

$$\nabla_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=0 \tag{6}$$

第 1 类压力边界条件直接指定了边界处的压力，是数学上定义的 Dirichlet 边界条件，如式(7)所示，$\bar{p}$ 表示边界压力.

$$p|_{\partial\Omega}=\bar{p} \tag{7}$$

第 2 类压力边界条件指定了边界上的压力梯度，是数学上定义的 Neumann 边界条件，如式(8)所示，被应用于固体壁面上.

$$\nabla_{\boldsymbol{n}}p|_{\partial\Omega}=0 \tag{8}$$

综上所述，描述计算域 Ω 内部流体运动的控制方程，以及施加于计算域边界$\partial\Omega$ 上的特定速度与压力边界条件，共同构成了一个在数学上完备的方程体系，即该方程体系完整地定义了本文所研究的稳态流动问题.

1.2 节点余量下降法离散原理

节点余量下降法的离散格式与广义有限差分法相同，都是基于多变量的泰勒级数展开建立局部微分近似模型，并通过最小二乘法构建离散微分算子. 该方法将偏微分控制方程中的微分项转化为节点邻域内的线性组合形式，最终形成全域离散代数方程组来求解各种物理问题. 以下介绍离散格式.

如图 1 所示，设标量函数 $u(x,y)$ 是定义在定义域 Ω 中的高阶可导的函数，其在点 (x_0,y_0) 的二阶泰勒展开式如式(9)所示. 将点 (x_0,y_0) 附近 m 个点的坐标带入式(9)并忽略余量，可以得到 m 个线性代数方程组，如式(10)所示. 其中 $\boldsymbol{V}$ 为求导矩阵，向量 $\boldsymbol{D}_u$ 为导数向量，$\boldsymbol{U}$ 为以 u 在临近点和泰勒展开点上的差为元素组成的向量(式(11)). 求解 $\boldsymbol{D}_u$ 的最小二乘解即得到函数 u 在点 (x_0,y_0) 的广义差分导数.

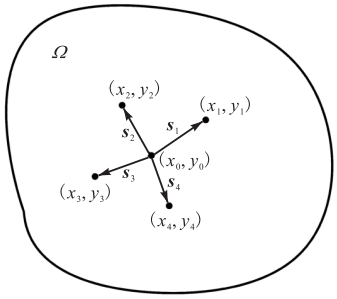


图 1 点簇示意

Fig.1 Schematic of the point cluster

$$\begin{aligned}u=&u_0+\frac{\partial u_0}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u_0}{\partial y}\mathrm{d}y\frac{\partial^2 u_0\,\mathrm{d}x^2}{2\partial x^2}+\\&\frac{\partial^2 u_0\mathrm{d}y^2}{2\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+o(s^3),\\&u_0=u(x_0,y_0),\mathrm{d}x=x-x_0,\mathrm{d}y=y-y_0,\\&s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\end{aligned} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_u=\boldsymbol{U} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1 & \mathrm{d}y_1 & \mathrm{d}x_1^2/2 & \mathrm{d}y_1^2/2 & \mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\\ \mathrm{d}x_2 & \mathrm{d}y_2 & \mathrm{d}x_2^2/2 & \mathrm{d}y_2^2/2 & \mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathrm{d}x_m & \mathrm{d}y_m & \mathrm{d}x_m^2/2 & \mathrm{d}y_m^2/2 & \mathrm{d}x_m\mathrm{d}y_m\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_u=\begin{bmatrix}\partial u_0/\partial x\\ \partial u_0/\partial y\\ \partial^2 u_0/\partial x^2\\ \partial^2 u_0/\partial y^2\\ \partial^2 u_0/\partial x\partial y\end{bmatrix},\ \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u_1-u_0\\ u_2-u_0\\ \vdots\\ u_m-u_0\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{m}\left(u_0-u_i+\frac{\partial u_0}{\partial x}\mathrm{d}x_i+\frac{\partial u_0}{\partial y}\mathrm{d}y_i+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x_i^2}{2}+\right.\\ \qquad\left.\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\frac{\mathrm{d}y_i^2}{2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}y_i\right)^2\\ \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial\boldsymbol{D}_u}=0\end{cases} \tag{12}$$

点 (x_0,y_0) 及其附近的 m 个临近点组成了一个点簇，其中点 (x_0,y_0) 为点簇的中心点. 在特定的物理场问题中，计算域被离散为一系列节点集合，每个节点都以自身为中心点构造一个点簇.

2　节点余量下降法计算方法

本节提出了基于节点余量下降法的稳态流动边界值问题的求解方法. 该方法采用双层次离散架构：几何层面上，将计算域离散为节点集合，每个计算节点生成具有拓扑关联的邻域点簇；数学层面上，通过广义有限差分格式对偏微分控制方程进行离散. 计算节点被赋予多重物理属性，包括速度场、压力场、边界条件以及材料本构参数. 求解过程采用速度-压力分步数值求解迭代框架：首先设定一个非协调的初值速度场和压力场，然后执行余量评估与参数修正的交替循环过程，通过局部余量的阈值控制实现全域约束条件的渐进收敛，最终全场余量小于规定值，得到一个同时满足控制方程组和边界条件的稳定数值解.

2.1　节点余量下降法离散化

对稳态流动边界值问题建立离散的求解格式，需要将计算域离散化为节点集，并将连续形式的控制方程组及边界转化为离散格式. 首先，本文将求解域离散为节点，记节点总数为 N_{total}，节点被划分为内部节点与边界节点. 每个节点包含 4 类特征信息：①几何信息，即节点类型（内部/边界）、空间坐标等；②流场变量信息，即速度矢量场及压力标量场；③边界条件信息，即边界条件类型及其描述值；④余量信息，即离散化定义的节点余量，包括连续性方程余量、动量方程余量以及边界条件余量. 这种将所有物理量存储在同一节点上的同位节点方案，具有数据结构直观、编程实现简单等优点. 然而，这种方案的一个固有挑战在于，其离散格式会导致压力场在计算上与其相邻节点解耦，从而引发非物理性的棋盘状压力振荡，严重破坏计算方法的准确性和稳定性. 为了解决这一问题，本文采用 Rhie-Chow 插值技术，其核心并非直接修正压力场，而是在求解流程中，对用于计算压力余量的节点所代表的控制体的界面通量进行插值处理. 通过引入一个与压力梯度相关的修正项来抑制数值振荡，保证压力场的稳定与光滑. Rhie-Chow 插值技术的成功应用，使得同位节点方案得以在 NRDM 框架中稳定、精确地运行，兼顾了编程实现的便利性与数值求解的稳健性.

其次，本文基于广义有限差分法原理，将连续性方程和动量方程转化为广义差分格式. 对于离散化的稳态流动边界值问题，给定一个任意的初始速度场和压力场，此时控制方程和边界条件不能完全得到满足，NRDM 在每个节点上定义如式（13）、式（14）所示的速度余量 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{v}}$ 和压力余量 R_p. 速度余量 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{v}}$ 代表了当前流场对动量守恒定律的违背程度，其并不直接用于修正速度，而是作为预测步的驱动项，用于计算节点上一个临时的、不满足连续性方程的预测速度. 压力余量 R_p 代表了当前预测步流场对质量守恒定律的违背程度，其不直接用于修正压力，而是作为压力修正泊松方程的源项，为压力和速度的最终修正提供依据.

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{v}} = -\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - \frac{1}{Re}\nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B} \tag{13}$$

$$R_p = \nabla\cdot\boldsymbol{v}^* \tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{v}^*$ 为预测速度场.

NRDM 的数值解目标是所有的节点余量足够小，不超过余量容差 e，如式（15）所示. 其中 e_p^{in}、e_v^{in} 分别表示压力平衡方程余量和速度平衡方程容差. 为了便于分析，余量和余量容差之比被定义为无量纲余量 R^{s}，如式（16）所示. 无量纲余量绝对值 $|R^{\text{s}}|_{\max}$ 的全场最大值如式（17）所示.

$$\forall p = 1, 2, \cdots, N_{\text{total}}:\ \left|R_{p/\boldsymbol{v}}\right| \leqslant e \tag{15}$$

$$R^{\text{s}} = R_{p/\boldsymbol{v}}^{\text{in}} / e_{p/\boldsymbol{v}}^{\text{in}} \tag{16}$$

$$\left|R^{\text{s}}\right|_{\max} = \max_p\left\{\left|R_{p/\boldsymbol{v}}^{\text{s}}\right|\right\} \tag{17}$$

2.2　节点余量下降法求解流程

NRDM 采用迭代方法求解第 2.1 节建立的离散格式问题. 其迭代过程可概括如下：首先设定初始速度-压力场，随后执行“节点信息修正-场量更新”的循环迭代直至满足收敛条件. 该迭代框架的核心思想在于通过“预测-修正”的策略，将复杂的压力-速度耦合问题解耦，进行迭代求解.

在每个迭代步中，NRDM 首先基于当前的流场信息计算速度余量，得到一个不满足质量守恒的预测速度场；随后，根据该预测速度场计算压力余量，并根据压力余量建立求解压力泊松方程；最后，利用得到的压力修正量来修正速度场和压力场，使流场向满足控制方程守和边界条件的最终解逼近. 这个循环过程不断重复，直至全局余量降低到预设的容差以下. 图 2 详细展示了这一稳态流动边界值问题的 NRDM 计算流程，其核心迭代循环共包含以下 5 个步骤.

步骤 1 初始化. 在迭代开始前，进行两项初始化工作：一是将迭代计次器 k 设置为 0；二是为计算域内的所有节点设定速度场和压力场的迭代初值，通常可设置为 0 m/s 和 0 Pa.

首先，本文求解稳态问题的最终收敛解由控制方程和边界条件唯一确定，理论上独立于初值的选择.

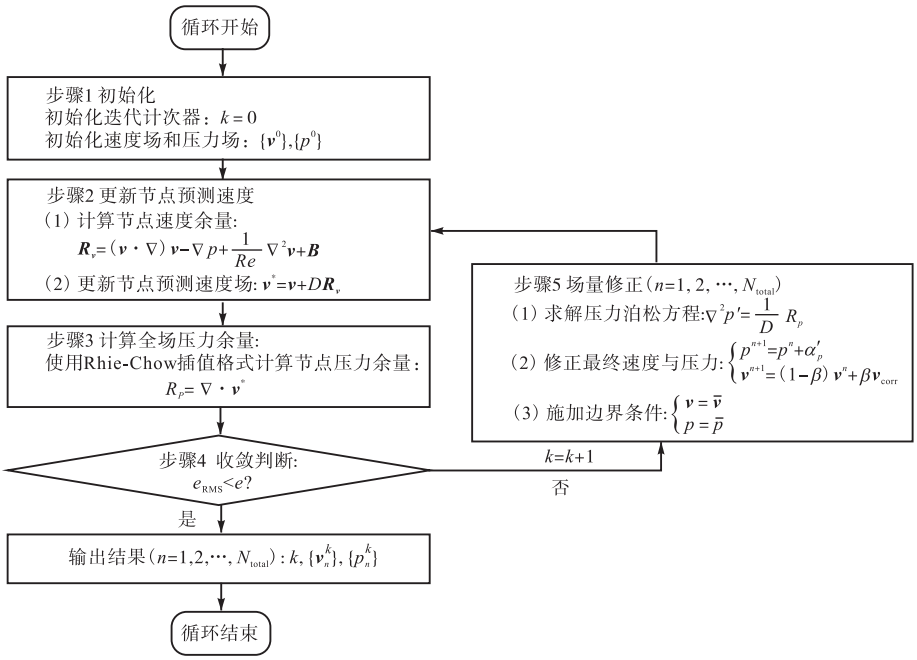


图 2 NRDM 稳态流动边界值问题计算流程

Fig.2 Flow chart of NRDM for solving steady-state flow boundary value problems

初值主要影响的是迭代的收敛速度和稳定性，如果一个初值更接近最终解，可以显著减少达到最终收敛所需的迭代步数，进而节约计算成本；如果一个初值显著偏离最终解，不仅会大大增加达到最终收敛所需要的迭代步数，甚至可能会导致迭代过程的振荡与发散. 因此，为了与各算例的静止初始状态一致，文中各算例的速度初值和压力初值均假设为 0 m/s 和 0 Pa.

步骤 2 速度预测. 此步骤旨在获得一个临时的预测速度场 $\boldsymbol{v}^*$.

(1) 计算节点速度余量 $\boldsymbol{R}_v$. 根据上一迭代步得到的速度场 $\boldsymbol{v}^k$ 和压力场 p^k，按式(18)计算每个节点上的速度余量.

$$\boldsymbol{R}_v=-\left(\boldsymbol{v}^k\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}^k-\nabla p^k+\frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{v}^k+\boldsymbol{B}^k \tag{18}$$

(2) 更新节点预测速度场 $\boldsymbol{v}^*$. 按式(19)显式更新得到预测速度场 $\boldsymbol{v}^*$. 其中 D 为迭代步长.

$$\boldsymbol{v}^*=\boldsymbol{v}^k+D\boldsymbol{R}_v \tag{19}$$

步骤 3 计算全场压力余量. 由于预测速度场 $\boldsymbol{v}^*$ 不满足连续性方程，此步骤旨在计算一个压力余量来表征预测速度场对连续性方程的偏离情况，并作为压力泊松方程的源项进行求解.

因为同位节点方案往往会引发压力振荡问题，导致整个流场解的严重失真，本文在计算压力余量时，引入 Rhie-Chow 插值格式. 该方法并非简单地对预测速度 $\boldsymbol{v}^*$ 进行线性插值来获得节点所代表的控制体界面上的速度，而是构建了一种能够感知并主动抑制压力高频振荡的特殊插值格式. 对于任意一个控制体界面 f，其经过 Rhie-Chow 插值修正后的速度 $\boldsymbol{v}_f^*$ 计算公式为

$$\boldsymbol{v}_f^*=\overline{\boldsymbol{v}}_f^*-D\left[\left(\nabla p^*\right)_f-\overline{\left(\nabla p^*\right)}_f\right] \tag{20}$$

NRDM 是一种无网格方法，其“控制体”与“界面”并非像传统的有限体积法一样即预先划分的实体，而是基于节点及其邻域关系所建立的概念性结构. 在 NRDM 中，每个计算节点自身被视为一个“控制体”的中心，物理守恒定律的离散方程在该节点上得以满足；“界面”则被定义为该节点与点簇中任意一个临近节点之间的连线中点. 因此，Rhie-Chow 插值格式中所有与界面相关的物理量，都是基于中心节点与相邻节点的信息来进行计算.

在式(20)中，$\overline{\boldsymbol{v}}_f^*$ 代表了对预测速度进行的常规线性插值. 关键在于 Rhie-Chow 修正项，它由系数 D 与两项压力梯度的差值构成：其中 $\left(\nabla p^*\right)_f$ 是直接在界面 f 上通过两侧节点压力计算得到的压力梯度，$\overline{\left(\nabla p^*\right)}_f$ 是通过对界面两侧节点各自的压力梯度进行插值得到的压力梯度平均值，它反映了压力场的平滑变化趋势. 这两项压力梯度之差构成了一个关键的压力修正项，其作用是重新建立起相邻压力节点之间的数值耦合，对压力场起到局部平滑和稳定的效果，从而有效抑制了棋盘格模式的产生. 最终，通过采用这种经过修正的界面速度来计算压力余量 R_p 作为压力泊松方程的源项，由于 R_p 是在 Rhie-Chow 插值的修正下计算得到的，它能够反映并抑制压力的非物理

振荡. 这使得后续对压力泊松方程的求解过程，能够自然地导出一个光滑、稳定的压力修正场，从而保证了整个算法在同位节点方案上的稳健运行.

步骤 4 收敛判断. 若全场压力余量均小于预设的收敛容差 e，则判定计算收敛完成，退出循环并输出结果. 否则，迭代次数加 1（$k = k+1$），继续进行迭代循环，进入步骤 5，开始场量修正步骤.

步骤 5 场量修正. 场量修正包括以下 3 个子步骤.

（1）求解压力泊松方程. 在计算得到表征质量不平衡程度的源项，即压力余量 R_p 后，下一步便是建立并求解一个关于压力修正量 p' 的泊松方程，其目的在于计算出一个能消除该压力余量的压力场. 该方程的基本形式为

$$\nabla^2 p' = R_p / D \tag{21}$$

方程等号右侧项 R_p 是利用 Rhie-Chow 插值计算得到，它精确地表征了当前预测速度场 $\boldsymbol{v}^*$ 对质量守恒定律的偏离程度. 通过求解该方程得到全场的压力修正值 p'，该修正场将直接用于后续的最终速度与压力修正步骤，其梯度场将驱动速度场向满足不可压缩流连续性方程的最终状态收敛.

（2）修正最终速度与压力. 在求解得到压力修正场 p' 后，迭代的最后一步便是利用它来修正主压力场和速度场，使其向满足守恒定律的最终解逼近.

首先，根据压力修正值 p'，按式（22）对压力场进行修正.

$$p^{k+1} = p^k + \alpha_p p' \tag{22}$$

为了控制收敛过程，引入压力亚松弛因子 α_p. 接下来，按式（23）对节点的速度进行修正和亚松弛.

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_{\text{corr}} = \boldsymbol{v}^* - D\nabla p' \\ \boldsymbol{v}^{k+1} = (1-\alpha_v)\boldsymbol{v}^k + \alpha_v \boldsymbol{v}_{\text{corr}} \end{cases} \tag{23}$$

这一过程可分为两步：第 1 步是物理修正，即利用压力修正场的梯度来校正预测速度 $\boldsymbol{v}^*$，得到一个满足连续性约束的已修正速度 $\boldsymbol{v}_{\text{corr}}$. 这一步相当于施加了一个由压力修正梯度驱动的加速度，以消除连续性方程不平衡. 第 2 步是数值松弛，为保证整个非线性迭代过程的稳定，需要将得到的已修正速度 $\boldsymbol{v}_{\text{corr}}$ 与上一代的速度 $\boldsymbol{v}^k$ 进行加权平均，得到最终的新速度 $\boldsymbol{v}^{k+1}$. 其中，α_v 为速度亚松弛因子.

在求解强非线性且高度耦合的偏微分方程组时，迭代过程中的速度和压力可能会出现剧烈的变化. 如果将每次计算出的修正量完全叠加到当前解上，有时出现过大的修正量容易引起数值解的振荡，甚至导致整个迭代过程发散而无法收敛. 为了抑制这种可能的数值振荡，增强迭代过程的相对稳定性，文中 NRDM 采用亚松弛因子对迭代过程中的速度与压力给与了修正，通过引入亚松弛因子实现了对变量更新幅度的控制，以确保每个迭代步可以更平滑、稳定地逐步逼近收敛解，这对于高雷诺数下的强非线性问题尤为重要. 文中亚松弛因子分别假设为 $\alpha_p = 0.1$ 和 $\alpha_v = 0.2$ 时，在收敛稳定性和计算效率之间可以取得良好平衡.

（3）施加边界条件. 在场量更新完毕后，严格地重新施加所有第 1 类边界条件，即强制设定边界节点的速度值和压力值为给定值.

至此，一个完整的 NRDM 迭代周期便已完成，最终得到的经过修正与松弛后的速度场和压力场 $\boldsymbol{v}^{k+1}$ 和 p^{k+1} 将作为下一次迭代的初值. 该过程将重复循环，在每一次迭代中，全局的压力余量和速度余量都将逐步降低，驱动数值解持续向真实的物理场逼近. 直至最终满足预设的收敛标准，迭代终止. 届时程序将输出当前迭代步的速度场和压力场，作为该稳态流动问题的最终数值解.

3　算例验证

为系统评估节点余量下降法求解稳态流动边界值问题的稳定性和计算精度，本节选取了一系列具有代表性的二维不可压缩流动边界值问题进行模拟和验证.

3.1　算例 1（含体积力的方腔流算例）

为对本文所提出 NRDM 的数值精度与稳定性进行评估，本文选取了一个包含体积力且具有精确解析解的方腔流算例[22]作为首个验证算例.

经典的顶盖驱动流模型上边界速度 v_{u} 为常数，侧壁速度为 $v_{\text{s}} = 0$，导致在模型顶部的两个角点处，速度值存在一个数学上的不连续性，从而产生了非物理的速度奇点. 这种奇点会对数值解的精度和稳定性造成局部较大误差，难以准确评估 NRDM 的数值计算精度. 而在这一包含体积力的方腔流算例中，上边界的速度分布如式（24）所示，在左、右两个角点处平滑地过渡到了 0 m/s，与两侧静止的速度条件相同，保证了整个边界速度场的连续性，避免了速度奇点的产生.

该问题的计算域为一个 $L_x = L_y = 1.0$ m 的矩形区域. 流动的驱动力来自于顶盖的非均匀剪切与特定的体力源项共同作用. 其速度边界条件设定为：左、右及下侧壁面均为无滑移的静止壁面（速度为 0 m/s）；上边界则施加一个非均匀的切向速度，其具

体分布如式(24)所示. 通过将计算结果与该算例的解析解进行对比,可以有效地验证 NRDM 的正确性. 图 3 展示了该包含体积力的有解析解顶盖驱动方腔流算例,其中 v_x、v_y 分别表示 x、y 方向的速度分量.

$$v_x(x,1)=16\left(x^4-2x^3+x^2\right) \tag{24}$$

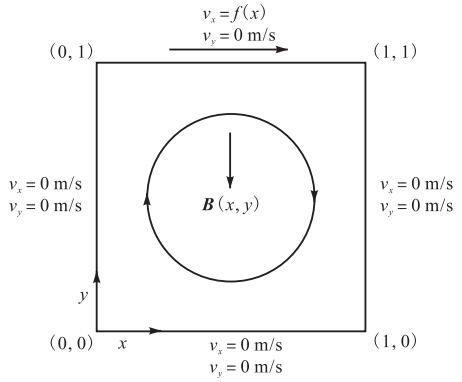


图 3 含体积力方腔流算例示意

Fig.3 Schematic of the cavity flow case with body force

体积力存在于 y 方向上,如式(25)所示[22].

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(x,y)=&-\frac{8}{Re}\left[24F(x)+2f'(x)g''(y)+\right.\\&\left.f'''(x)g(y)\right]-64\left[F_2(x)G_1(y)-\right.\\&\left.g(y)g'(y)F_1(x)\right]\end{aligned} \tag{25}$$

其中

$$\begin{cases}f(x)=x^4-2x^3+x^2\\g(y)=y^4-y^2\\F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x\\F_1(x)=f(x)f''(x)-\left[f'(x)\right]^2\\F_2(x)=\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x=\left[f(x)\right]^2/2\\G_1(y)=g(y)g'''(y)-g'(y)g''(y)\end{cases} \tag{26}$$

该问题的解析解[22]为

$$\begin{cases}v_x(x,y)=8\left(x^4-2x^3+x^2\right)\left(4y^3-2y\right)\\v_y(x,y)=8\left(4x^3-6x^2+2x\right)\left(y^4-y^2\right)\end{cases} \tag{27}$$

图 4 展示了几何离散化示意,沿着 x 方向和 y 方向,计算域被离散为 $21\times21=441$ 个节点,其中箭头表示边界节点的单位外法向. 在迭代开始前,全场所有节点的初始速度与初始压力均设定为 0 ms/和 0 Pa. 基于以上数值设置,计算雷诺数 $Re=10$ 这一参数下的流场,以检验 NRDM 的计算精度、迭代稳定性及其捕捉基本流动形态的能力.

图 5 展示了计算得到的速度矢量场,图 6 展示了水平速度 v_x 以及垂直速度 v_y 的等值线图. 可以直观地看到,整个计算域的流动由一个顺时针旋转的单一主涡所主导. 各位置的速度矢量方向流畅,清晰展示了涡旋的形态,与这一顶盖速度和体积力驱动的方腔流问题所预期的基本流动完全一致,证明了 NRDM 能够正确捕捉不可压缩流体流动的基本流动形态.

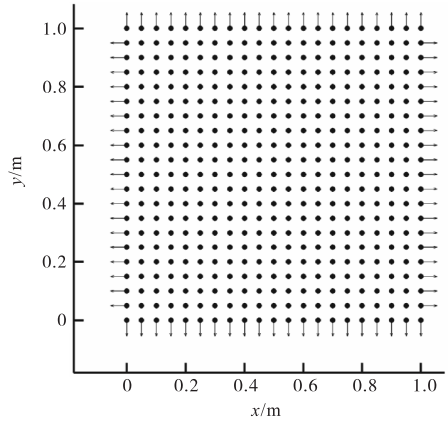


图 4 含体积力方腔流算例离散示意

Fig.4 Discretization schematic for the cavity flow case with body force

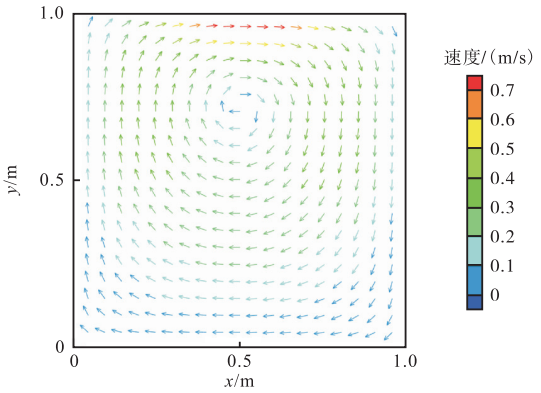
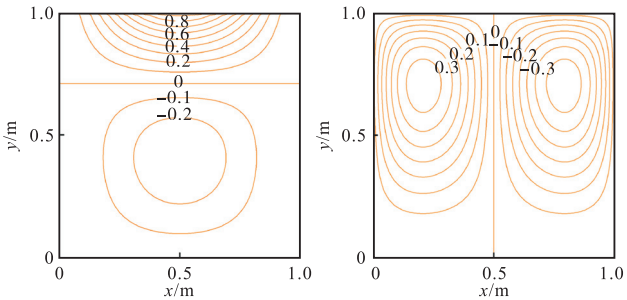


图 5 含体积力方腔流算例速度矢量图

Fig.5 Velocity vector plot for the cavity flow case with body force



(a) 水平速度 v_x (b) 垂直速度 v_y

图 6 含体积力方腔流算例速度等值线图(单位:m/s)

Fig.6 Contours of velocity for the cavity flow case with body force(unit: m/s)

进一步,对数值解的全局误差进行分析. 计算了整个速度矢量场的均方根误差(RMSE),计算公式为

$$e_{\mathrm{RMSE}}=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(v_{x,i}-u_{x,\mathrm{exact},i}\right)^2+\left(v_{y,i}-v_{y,\mathrm{exact},i}\right)^2} \tag{28}$$

式中：$v_{x,i}$ 和 $v_{y,i}$ 分别代表节点 i 的速度分量；$u_{x,\mathrm{exact},i}$ 和 $v_{y,\mathrm{exact},i}$ 为对应的解析解速度分量.

经过计算，速度场的均方根误差为 5.91×10^{-3}，与文献[22]中的误差处于同一数量级. 值得注意的是，常规的同位节点方案时常伴有压力振荡等稳定性问题. 本文不但成功获得了稳定收敛的解，且精度与这些基准方案保持在同一数量级. 因此，结果充分说明了 NRDM 所采用的“预测-修正”迭代框架与 Rhie-Chow 插值技术相结合的策略是成功且稳健的，能够在避免交错网格复杂性的同时，计算得到较为精确的数值结果.

图 7 展示了本次数值模拟的余量收敛曲线，可以看出，迭代过程的初始阶段，全场余量迅速达到峰值，这是由于流场从静止的初始状态开始剧烈调整以适应边界条件所导致的正常现象. 越过峰值后，所有余量均随着迭代次数的增加而呈现出稳定、单调的下降趋势并维持在较低的水平，最终所有余量均收敛至接近于 0 的极小值，表明流场最终同时满足了连续性方程与动量守恒方程的要求. 结果显示，整个收敛过程平滑，无明显振荡，进一步验证了 NRDM 的计算稳定性.

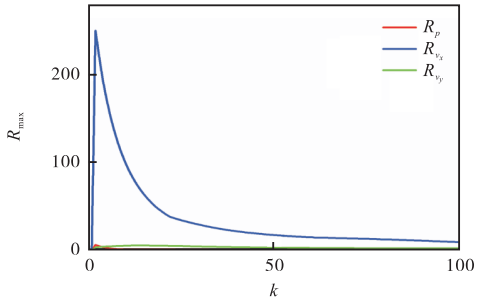


图 7　含体积力方腔流算例余量收敛曲线

Fig.7　Convergence curves of residuals for the cavity flow case with body force

为探讨节点密度对 NRDM 计算精度的影响，本文分别在 20×20、30×30、40×40 和 50×50 节点密度下计算了全局误差. 图 8 为双对数坐标系中不同节点密度下的全局速度场误差 e_{RMSE} 随网格间距 r 变化的曲线，可以看出，所有数据点呈现出较为明显的线性关系，表明随着网格的加密，数值解的误差单调地减小，收敛率约为 1.7，接近二阶收敛率. 网格收敛性结果不仅验证了算法的离散精度，也证明了当节点足够密集时，计算结果趋于节点密度无关，保证了数值模拟的可靠性.

进一步，为了探讨不同初值对 NRDM 计算效率的影响，本文分别选择 $\boldsymbol{v}^0=p^0$ 取 0、2、4、6 共 4 个初值进行收敛分析，不同初值的收敛结果如图 9 所示.

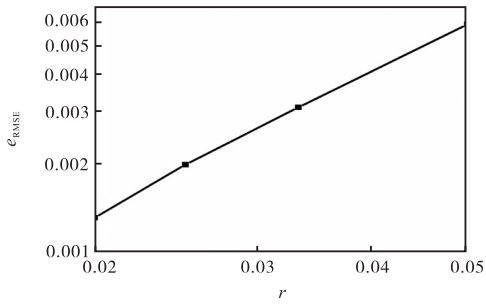


图 8　含体积力方腔流算例网格收敛性

Fig.8　Grid convergence for the cavity flow case with body force

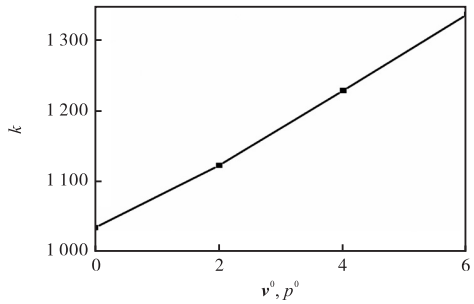


图 9　含体积力方腔流算例不同初值的收敛迭代步数

Fig.9　Convergence steps for varying initial conditions in the cavity flow case with body force

从图 9 可以看出，随着速度初值 $\boldsymbol{v}^0$ 和压力初值 p^0 的增加，迭代步数 k 从 1 035 步增加到 1 337 步. 即随着初值偏离最终解的程度越来越大，计算所需的迭代步数也随之增多. 此外，4 个不同初值最终都稳定收敛到了相同结果，验证了稳态解的唯一性及其对初值的独立性. 综上，不同初值对 NRDM 的计算结果表明，虽然初值的选择不影响最终解的精度，但对计算效率有直接影响.

3.2　算例 2（顶盖速度驱动方腔流算例）

为了验证 NRDM 在处理强非线性流动问题时的计算精度与稳定性，本文选取了一个经典基准算例即顶盖速度驱动方腔流进行验证分析，并与文献[23]中的基准数据数据进行对比. 图 10 展示了一个顶盖驱动方腔流问题，计算域几何参数为 $L_x=L_y=1.0$ m，其中上壁面为水平移动的固体壁面，具有水平方向的速度 $v_x=1$ m/s；其他 3 个壁面为静止的固体壁面.

在顶盖驱动方腔流问题中，随着雷诺数的增加，除了计算域中心处的主涡外，在角落区域会衍生出尺寸较小的二级涡，二级涡的准确模拟是对计算方法精度的重要考验.

为了能够精确捕捉和分辨位于方腔右下角和左下角的二级涡流结构，将计算域沿 x 方向和 y 方向离散为 $101\times101=10\,201$ 个节点的精细化离散模型，

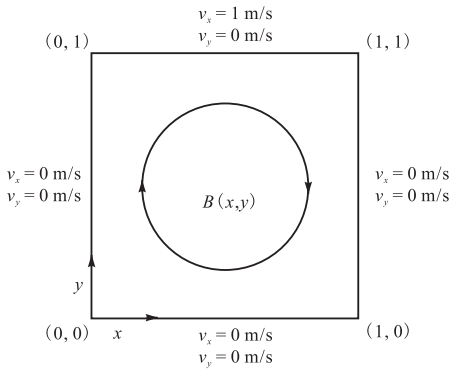


图 10　顶盖速度驱动方腔流算例示意

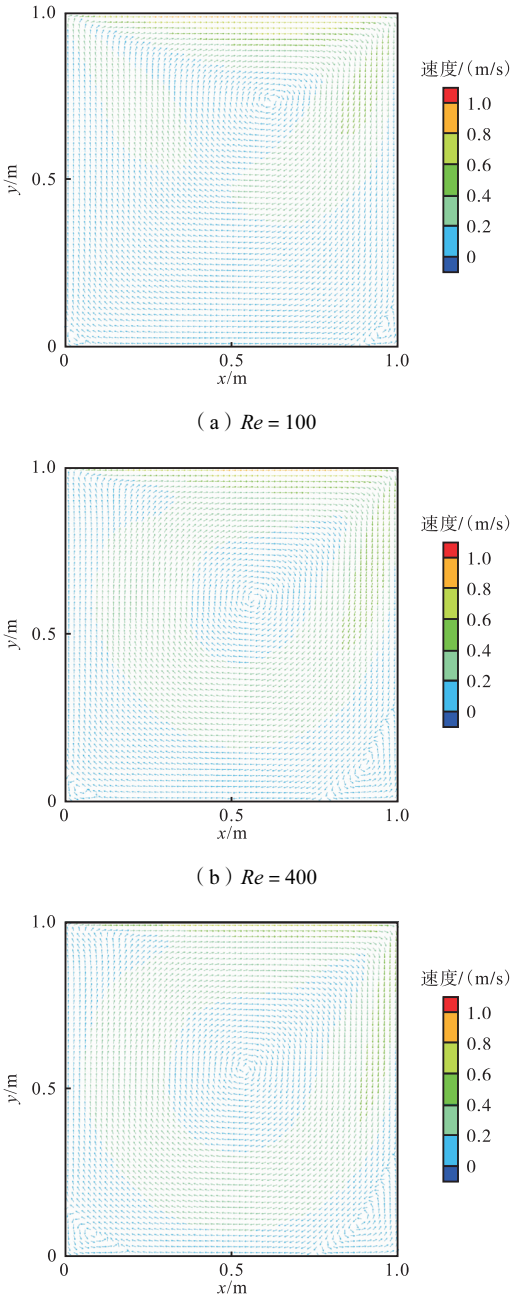
Fig.10　Schematic of the lid-driven cavity flow case

分别对 3 种雷诺数(100、400 和 1 000)下的顶盖驱动方腔流问题进行计算.

图 11(a)展示了计算得到的雷诺数 $Re = 100$ 顶盖速度驱动方腔流速度矢量场. 可以清晰地观察到,整个流场由一个占据主导地位的、顺时针旋转的大尺度主涡构成,计算得到主涡涡心位置位于(0.62 m, 0.74 m),与文献[23]基准位置(0.617 2 m, 0.734 4 m)的绝对位置误差为 6.26×10^{-3}. 同时,在方腔的左下角和右下角,形成了两个尺寸较小、旋转方向与主涡相反的二级涡. 图 12 为水平速度 v_x 以及垂直速度 v_y 的等值线,图 13 为沿方腔垂直中心线($x = 0.5$ m)的水平速度 v_x 的分布情况和沿水平中心线($y = 0.5$ m)的垂直速度 v_y 的分布情况,并分别与文献[23]中的基准数据点进行了对比. 结果显示,计算曲线与基准数据点也呈现出高度的一致性,误差分别为 3.51×10^{-3} 和 2.12×10^{-3},进一步证明了 NRDM 在该算例计算中具有较好的计算精度和可靠性.

图 11(b)展示了计算得到的雷诺数 $Re = 400$ 顶盖驱动方腔流速度矢量场. 可以看到 $Re = 400$ 时的流场结构与 $Re = 100$ 时相似,依然由一个顺时针旋转的主涡和两个底角二级涡构成. 与 $Re = 100$ 时的流场相比,主涡的涡心位置向方腔的几何中心移动,位于(0.56 m, 0.60 m),与基准位置(0.554 7 m, 0.605 5 m)的绝对误差为 7.64×10^{-3}. 图 14 为水平速度 v_x 以及垂直速度 v_y 的等值线图,图 15 为沿方腔垂直中心线($x = 0.5$ m)的水平速度 v_x 的分布情况和沿水平中心线($y = 0.5$ m)的垂直速度 v_y 分布情况,沿两条中心线的速度分布剖面与基准数据点依旧保持了高度吻合,误差分别为 4.44×10^{-3} 和 5.90×10^{-3},证明了在雷诺数增至 400 时,NRDM 仍能保持较高的计算精度.

图 11(c)展示了计算得到的雷诺数 $Re = 1\,000$ 顶盖速度驱动方腔流速度矢量场. 可以看到流场结构在 $Re = 400$ 的基础上得到了进一步的演化. 主涡的涡心位置进一步向方腔的几何中心移动至(0.540 0 m, 0.570 0 m),与基准位置(0.531 3 m, 0.562 5 m)的绝对误差为 1.15×10^{-2}. 图 16 为水平速度 v_x 以及垂直速度 v_y 的等值线图,图 17 为沿方腔垂直中心线($x = 0.5$ m)的水平速度 v_x 的分布情况和沿水平中心线($y = 0.5$ m)的垂直速度 v_y 分布情况. 沿两条中心线的速度分布剖面与基准数据点同样保持了高度吻合,误差分别为 7.73×10^{-3} 和 6.93×10^{-3},这充分



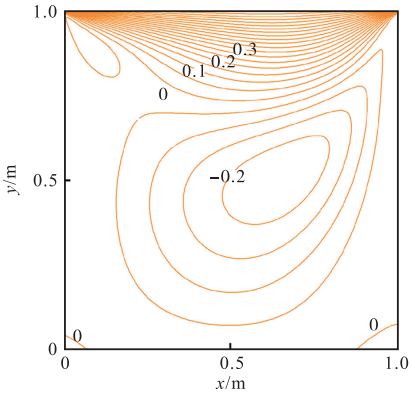
(a) $Re = 100$

(b) $Re = 400$

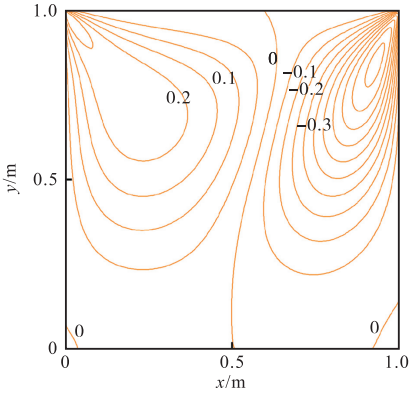
(c) $Re = 1\,000$

图 11　不同雷诺数下顶盖驱动方腔流算例速度矢量图

Fig.11　Velocity vector plots for the lid-driven cavity flow case at different Reynolds numbers



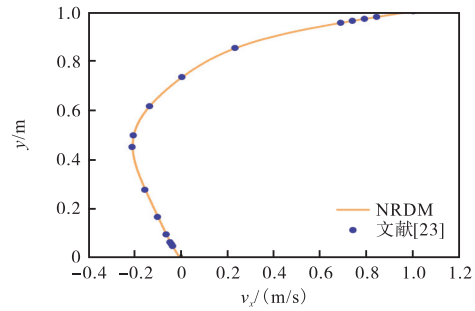
（a）水平速度 v_x



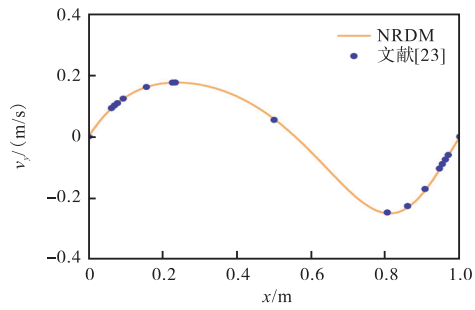
（b）垂直速度 v_y

图 12　*Re* = 100 顶盖速度驱动方腔流算例速度等值线图（单位：m/s）

Fig.12　Contours of velocity for the lid-driven cavity flow case at *Re* = 100 (unit: m/s)



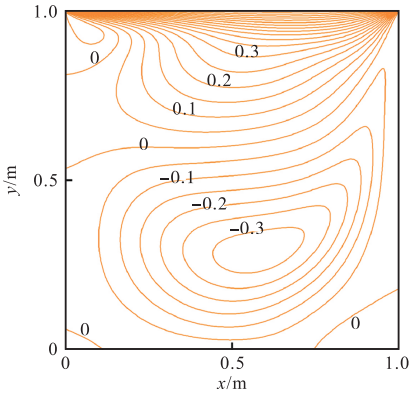
（a）水平速度沿 x 轴中线



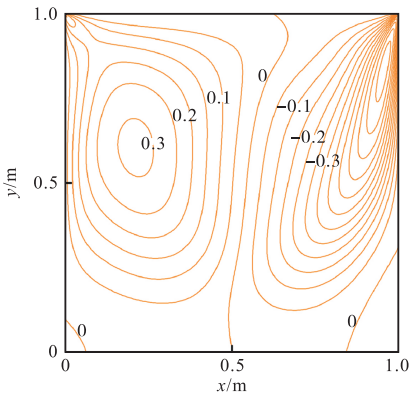
（b）垂直速度沿 y 轴中线

图 13　*Re* = 100 顶盖速度驱动方腔流算例速度沿中线分布图（单位：m/s）

Fig.13　Velocity profile along the centerline for the lid-driven cavity flow case at *Re* = 100 (unit: m/s)



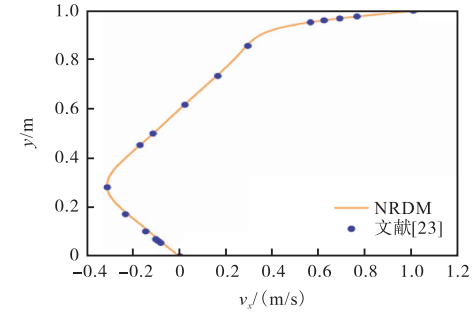
（a）水平速度 v_x



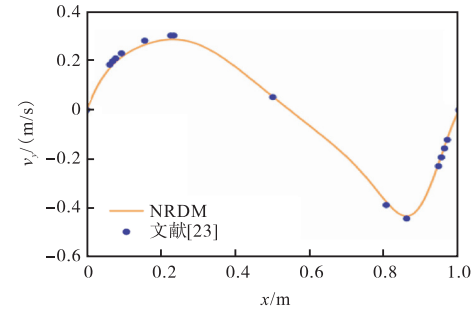
（b）垂直速度 v_y

图 14　*Re* = 400 顶盖速度驱动方腔流算例速度等值线图（单位：m/s）

Fig.14　Contours of velocity for the lid-driven cavity flow case at *Re* = 400 (unit: m/s)



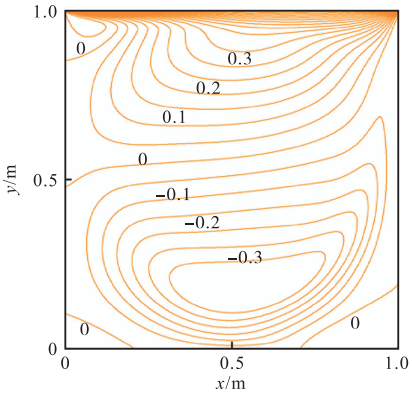
（a）水平速度沿 x 轴中线



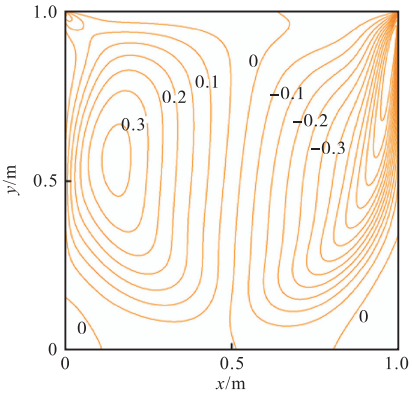
（b）垂直速度沿 y 轴中线

图 15　*Re* = 400 顶盖速度驱动方腔流算例速度沿中线分布图（单位：m/s）

Fig.15　Velocity profile along the centerline for the lid-driven cavity flow case at *Re* = 400 (unit: m/s)



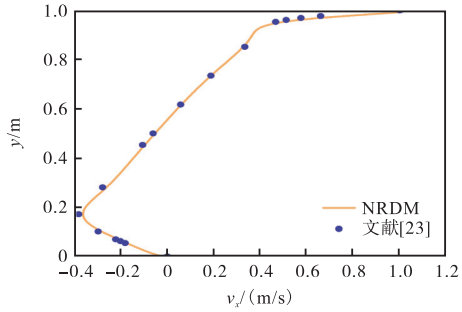
(a) 水平速度 v_x



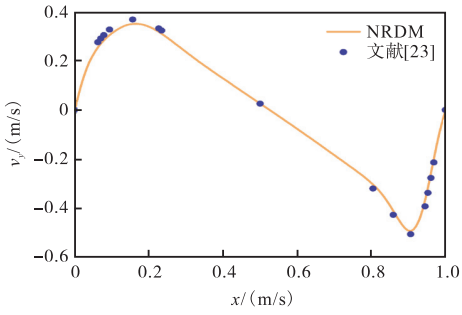
(b) 垂直速度 v_y

图 16　*Re* = 1 000 顶盖速度驱动方腔流算例速度等值线图(单位:m/s)

Fig.16　Contours of velocity for the lid-driven cavity flow case at *Re* = 1 000 (unit: m/s)



(a) 水平速度沿 x 轴中线



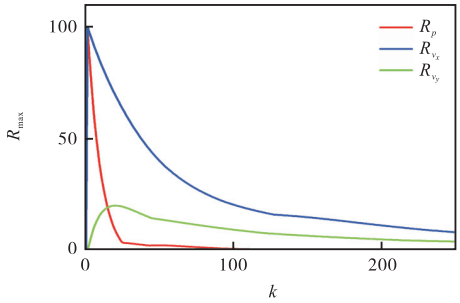
(b) 垂直速度沿 y 轴中线

图 17　*Re* = 1 000 顶盖速度驱动方腔流算例速度沿中线分布图

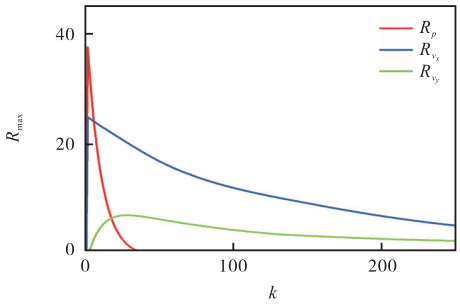
Fig.17　Velocity profile along the centerline for the lid-driven cavity flow case at *Re* = 1 000

表明,即便在雷诺数增至 1 000 的强非线性条件下,NRDM 依然能够保持较高的计算精度.

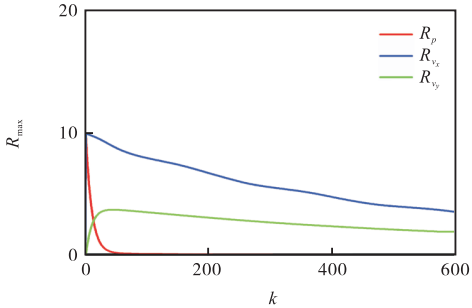
图 18 为雷诺数分别为 100、400、1 000 算例的余量收敛曲线,可以看到,在不同雷诺数下的算例迭代过程中,余量收敛曲线均表现出稳定的收敛过程. 在迭代的的初始阶段,由于流场从静止的初始场开始向满足边界条件的流动状态进行剧烈调整,余量会瞬间脱离零点并迅速攀升至最大峰值. 越过峰值后,算法进入快速收敛阶段. 在这一阶段,流场的主要流动结构被迅速建立,所有余量也随之呈现出大幅度的、准指数级的单调下降. 最后,随着流场细节被逐步修正,收敛速度逐渐放缓,余量曲线逐渐平坦,并最终渐近地收敛至预设的极小余量容差值以下.



(a) *Re* = 100



(b) *Re* = 400



(c) *Re* = 1 000

图 18　不同雷诺数下顶盖速度驱动方腔流算例余量收敛曲线

Fig.18　Convergence curves of residuals for the lid-driven cavity flow case at different Reynolds numbers

综上所述,本节的数值计算结果与文献[23]高度一致,并成功模拟了主涡涡心的迁移、底角二级涡的

成长以及顶角三级涡的萌芽这一系列流动演化现象. 主涡涡心位置的最大误差为 1.15×10^{-2}，沿中线的速度分布的最大误差为 7.73×10^{-3}，误差基本保持在 10^{-3} 数量级，且余量收敛曲线均表现出稳定的收敛过程，验证了 NRDM 在不同雷诺数下均具有较好的计算精度和稳定性.

3.3　算例 3（压力驱动泊肃叶流算例）

为验证 NRDM 处理不同物理驱动机制流动问题的能力，本节选取了泊肃叶流这一经典的压力驱动流动进行验证. 与前述由壁面速度剪切和体积力驱动的算例不同，泊肃叶流的运动完全由施加在计算域入口和出口的压力差驱动，与前述算例在边界上施加的第 1 类速度边界条件和第 2 类压力边界条件不同.

图 19 展示了一个泊肃叶流问题，计算域几何参数为 $L_x=5.0\,\mathrm{m}$，$L_y=1.0\,\mathrm{m}$，雷诺数 $Re=10$. 边界条件如图 19 所示，其中，上、下壁面为静止壁面，左、右边界为压力驱动边界，左侧入口的压力恒定为 $p_1=5\,\mathrm{Pa}$，右侧出口的压力设为 $p_2=0\,\mathrm{Pa}$，流体在该压力差的驱动下流动. 将计算域沿 x 方向和 y 方向离散为 $101\times21=2\,121$ 个节点进行计算. 速度沿 y 方向的分布与压力梯度的关系式为

$$\frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}y^2}=Re\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{29}$$

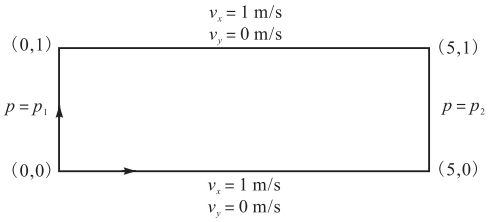


图 19　压力驱动泊肃叶流算例示意

Fig.19　Schematic of the pressure-driven Poiseuille flow case

图 20 展示了计算得到的泊肃叶流问题的速度矢量图，整个流场呈现为平直的水平层流，速度矢量方向处处与壁面平行，表明垂直速度得到了有效的抑制并趋近于 0 m/s. 该压力驱动流动的计算速度大小在上、下壁面处为 0 m/s，并在通道中心线处达到最大，计算得到整个速度场与理论值得均方根误差为 1.78×10^{-3}.

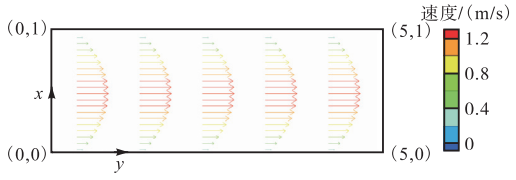


图 20　压力驱动泊肃叶流算例速度矢量图

Fig.20　Velocity vector plot for the pressure-driven Poiseuille flow case

图 21 为泊肃叶流算例的余量收敛曲线. 所有余量在初始峰值后，迅速地单调下降. 收敛过程平滑无振荡，最终达到了预设的收敛标准，进一步验证了 NRDM 在处理压力驱动的流动问题时同样具有良好的计算精度和稳定性.

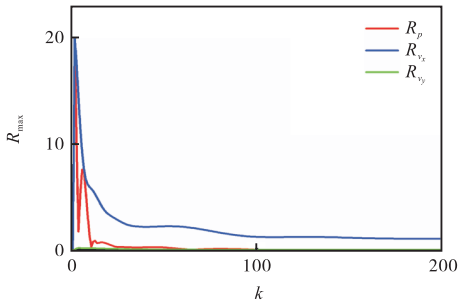


图 21　压力驱动泊肃叶流算例余量收敛曲线

Fig.21　Convergence curves of residuals for the pressure-driven Poiseuille flow case

3.4　算例 4（速度驱动库埃特流算例）

本节对经典的纯剪切驱动流动即平面库埃特流进行模拟计算. 图 22 展示了一个库埃特流问题，计算域几何参数为 $L_x=5.0\,\mathrm{m}$，$L_y=1.0\,\mathrm{m}$. 该问题的边界条件如图 22 所示，其中，上边界具有水平方向的速度 $v_{x,\mathrm{lid}}=1\,\mathrm{m/s}$，下边界为静止壁面，左、右边界设置为周期性边界条件. 将计算域沿 x 方向和 y 方向离散为 $101\times21=2\,121$ 个节点进行计算. 库埃特流的理论解析解为

$$v_x(y)=v_{x,\mathrm{lid}}\frac{y}{L_y} \tag{30}$$

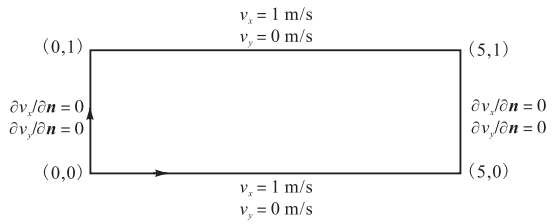


图 22　速度驱动库埃特流算例示意

Fig.22　Schematic of the velocity-driven Couette flow case

图 23 为计算得到的库埃特流问题速度矢量图，清晰展示了库埃特流的典型特征. 整个流场呈现为平直的水平层流，速度矢量方向处处与壁面平行，表明垂直速度分量在计算中得到了有效的抑制并趋近于 0 m/s. 计算得到速度场的均方根误差为 1.25×10^{-3}. 图 24 为库埃特流算例的余量收敛曲线. 所有余量在经历短暂的初始峰值后，均随着迭代迅速、单调地下降. 整个收敛过程平滑无振荡，最终各项余量均达到了预设的收敛标准，证明了 NRDM 在处理库埃特流动问题时具有良好的计算精度和稳定性.

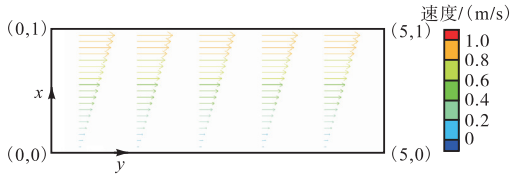


图 23　速度驱动库埃特流算例速度矢量图

Fig.23　Velocity vector plot for the velocity-driven Couette flow case

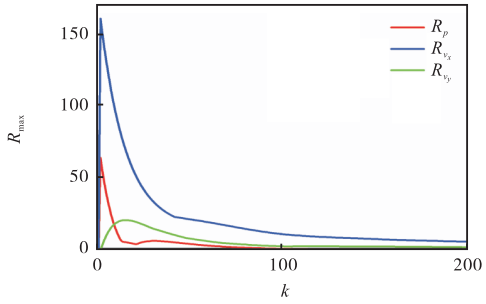


图 24　速度驱动库埃特流算例余量收敛曲线

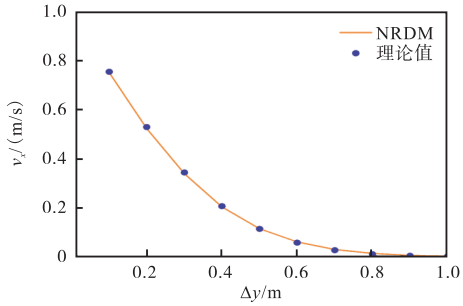
Fig.24　Convergence curves of residuals for the velocity-driven Couette flow case

此外，本文对 NRDM 求解瞬态流动问题的方法进行初步探讨. 将稳态求解器拓展为瞬态求解器，其核心在于引入了非定常项，即在动量方程中保留时间导数项$\partial \boldsymbol{v}/\partial t$. 此时速度余量计算公式为

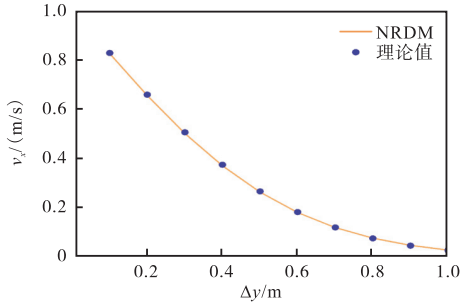
$$\boldsymbol{R}_v = -\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - \frac{1}{Re}\nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B} \tag{31}$$

这一数学形式上的改变，直接导致了求解流程在算法结构上的根本性演化. 相对于稳态求解所采用的迭代循环，瞬态求解方法在此基础上，新增了一个负责推进真实物理时间的外循环. 原有的稳态迭代循环，现在被整体作为内循环来调用. 其功能也相应地转变：在时间外循环的每一个时间步之内，内循环会启动并执行多次“预测-修正”迭代，直至计算出当前时刻 t 下收敛的流场解. 因此，整个算法便从一个单一的求解过程，演变为一个外循环推进时间，内循环求解瞬时状态的嵌套双循环结构，从而实现了对瞬态问题演化过程的模拟计算. 为验证该双循环 NRDM 框架求解瞬态问题的能力，本文选取了经典的斯托克斯第一问题[24]进行模拟计算. 该问题与库埃特流算例类似，描述了在静止的半无限流体中，一块平板在 $t=0$ 时刻突然以恒定速度运动后，流场速度随时间的演化过程. 设平板在 $t=0$ 时刻，以恒定速度 $v_x=1$ m/s 突然启动.

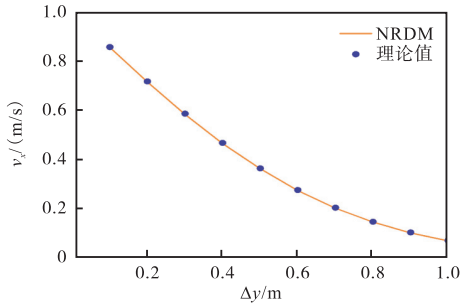
图 25 展示了 t 为 0.05 s、0.10 s、0.15 s 和 0.20 s 共 4 个不同时刻的速度剖面计算结果与理论解的对比. 图 25 中，横坐标 Δy 代表流体离运动平板的距离，纵坐标 v_x 代表该处的水平速度. 可以看出，在各个时刻，NRDM 的计算结果与理论解高度一致，精确地模拟计算了速度从运动壁面($\Delta y=0$)逐渐向流场内部扩散的动态过程，随着时间的推移，受壁面影响的流体层厚度不断增加. 这 4 个时刻的数值解与理论解的均方根误差也维持在较低水平，分别为 3.26×10^{-3}、2.69×10^{-3}、2.23×10^{-3} 和 2.18×10^{-3}，这一结果初步证明了双循环 NRDM 框架求解简单瞬态问题的



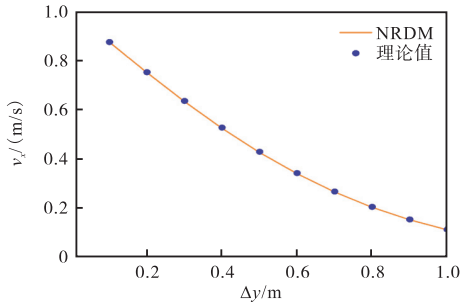
(a) $t=0.05$ s



(b) $t=0.10$ s



(c) $t=0.15$ s



(d) $t=0.20$ s

图 25　不同时刻斯托克斯第一问题算例速度 v_x 沿 y 轴分布图

Fig.25　Distribution of velocity v_x along the y-axis for the Stokes first problem case at different moments

精确性，NRDM 有应用于瞬态问题的潜力.

4 结　论

本文将 NRDM 拓展至流体力学领域，针对稳态不可压缩流动边界值问题，提出并实现了一种改进的求解算法. 在保留了节点余量下降法无需构建和计算大型全局矩阵，无需划分网格，不需要插值函数，不需要积分，简单直接，适用性强等特点的同时，通过引入“预测-修正”迭代策略和 Rhie-Chow 插值技术，成功解决了在同位节点上的压力-速度耦合与数值振荡问题. 通过精确求解这一非线性偏微分方程组，本文进一步拓展并验证了 NRDM 作为一种通用计算框架的能力，并通过一系列代表性算例，对其进行了系统性验证，主要结论如下.

（1）在具有精确解析解的含体积力方腔流算例中，NRDM 的数值解与理论解高度一致，误差为 5.91×10^{-3}，与文献[22]处于同一数量级，收敛率为 1.7，具有接近二阶的收敛精度，且迭代过程稳定收敛，证明了 NRDM 的计算精度和稳定性.

（2）在顶盖速度驱动方腔流算例中，NRDM 成功地在较高雷诺数下获得了稳定收敛的解. 在 $Re=1\,000$ 时，主涡涡心的绝对位置误差为 1.15×10^{-2}，中心线速度最大误差为 7.73×10^{-3}. 且在不同雷诺数情况的迭代过程均稳定收敛，无数值振荡，证明了 NRDM 在处理强非线性问题时的计算精度和稳定性.

（3）在压力驱动泊肃叶流算例中，NRDM 精确计算得到了与理论相符的抛物线速度剖面，全局误差为 1.78×10^{-3}，且迭代过程稳定收敛. 充分证明了 NRDM 在处理由压力梯度驱动的流动问题时，同样兼具出色的计算精度和稳定性.

（4）在速度驱动库埃特流算例中，计算结果与线性理论解的误差为 1.25×10^{-3}，迭代过程稳定. 此外，本文通过斯托克斯第一问题初步验证了 NRDM 计算瞬态问题的能力，不同时刻的计算结果与理论解基本一致，最大误差为 3.26×10^{-3}，且瞬态迭代计算过程依旧保持稳定，证明了 NRDM 具备拓展至求解非定常流动问题的潜力.

最后，本文的 NRDM 为未来将这一通用计算方法拓展应用于其他复杂物理场问题提供了一条可靠求解途径，后续将验证 NRDM 在复杂几何问题中的应用可行性，验证 NRDM 求解复杂流动边界值问题非定常流动的方法，拓展 NRDM 至流固耦合等复杂物理场问题.

参考文献：

[1] Jensen P S. Finite difference techniques for variable grids[J]. Computers & Structures，1972，2(1/2)：17-29.

[2] Perrone N，Kao R. A general finite difference method for arbitrary meshes[J]. Computers & Structures，1975，5(1)：45-57.

[3] Liszka T，Orkisz J. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics[J]. Computers & Structures，1980，11(1/2)：83-95.

[4] Benito J J，Ureña F，Gavete L，et al. An H-adaptive method in the generalized finite differences[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，2003，192(5/6)：735-759.

[5] Liszka T. An interpolation method for an irregular net of nodes[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，1984，20(9)：1599-1612.

[6] Gavete L，Benito J J，Ureña F. Generalized finite differences for solving 3D elliptic and parabolic equations[J]. Applied Mathematical Modelling，2016，40(2)：955-965.

[7] Gavete L，Gavete M L，Benito J J. Improvements of generalized finite difference method and comparison with other meshless method[J]. Applied Mathematical Modelling，2003，27(10)：831-847.

[8] Benito J J，Ureña F，Gavete L. Influence of several factors in the generalized finite difference method[J]. Applied Mathematical Modelling，2001，25(12)：1039-1053.

[9] Gavete L，Ureña F，Benito J J，et al. Solving second order non-linear elliptic partial differential equations using generalized finite difference method[J]. Journal of Computational & Applied Mathematics，2017，318：378-387.

[10] Suchde P，Kuhnert J，Tiwari S. On meshfree GFDM solvers for the incompressible Navier-Stokes equations[J]. Computers & Fluids，2018，165：1-12.

[11] Chew C S，Yeo K S，Shu C. A generalized finite-difference (GFD) ALE scheme for incompressible flows around moving solid bodies on hybrid meshfree—Cartesian grids[J]. Journal of Computational Physics，2006，218(2)：510-548.

[12] Song L N，Li P W，Gu Y，et al. Generalized finite difference method for solving stationary 2D and 3D stokes equations with a mixed boundary condition[J]. Computers & Mathematics with Applications，2020，

80(6)：1726-1743.

[13] Shao M R ，Song L N，Li P W. A generalized finite difference method for solving Stokes interface problems [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements，2021，132：50-64.

[14] Li P W，Fan C，Yu Y Z，et al. A meshless generalized finite difference scheme for the stream function formulation of the Naiver-Stokes equations[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements，2023，152：154-168.

[15] Li P W，Fan C M. Generalized finite difference method for two-dimensional shallow water equations[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements，2017，80：58-71.

[16] Dong T L，Wang S J，Cui Y H. Mixed node's residual descent method for hyperelastic problem analysis[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements，2024，168：105917.

[17] Dong T L，Cui Y H. Node's residual descent method for linear elastic boundary value problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements，2023，155：407-424.

[18] Dong T L，Wang S J，Cui Y H. Node's residual descent method for steady-state thermal and thermoelastic analysis[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements，2024，169：106018.

[19] Dong T L，Wang S J，Cui Y H. Solving electrostatic and electroelastic problems with the node's residual descent method[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements，2025，170：106053.

[20] Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow [M]. Washington：Hemisphere Publishing Corporation，1980.

[21] Rhie C M，Chow W L. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation[J]. AIAA Journal，1983，21(11)：1525-1532.

[22] Shih T M，Tan C H，Hwang B C. Effects of grid staggering on numerical schemes[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids，1989，9(2)：193-212.

[23] Ghia U，Ghia K N，Shin C T. High-*Re* solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. Journal of Computational Physics，1982，48(3)：387-411.

[24] Schlichting H，Kestin T. Boundary-Layer Theory[M]. New York：McGraw-Hill，1979.

（责任编辑：王晓燕）