doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024099

三正则构造图的邻点全和可区别全染色

杨 超[1]，程银万[1]，姚 兵[2]
（1. 上海工程技术大学 数理与统计学院，智能计算与应用统计研究中心，上海 201620；
2. 西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070）

摘要：首先，根据 Snark 图的结构特点，构造基于双星和十字交叉形的两类三正则图；其次，利用穷染法和组合分析法研究四类三正则构造图的邻点全和可区别全染色问题，得到了它们的邻点全和可区别全色数均为 2.

关键词：非正常全染色；邻点全和可区别全染色；邻点全和可区别全色数；三正则图
中图分类号：O157.5 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)06-1301-07

Neighbor Full Sum Distinguishing Total Coloring of 3-Regular Construction Graphs

YANG Chao[1], CHENG Yinwan[1], YAO Bing[2]
(1. *School of Mathematics, Physics and Statistics, Center of Intelligent Computing and Applied Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai* 201620, *China*;
2. *College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: Firstly, according to the structural characteristics of Snark graphs, we constructed two classes of 3-regular graphs based on Double Star and Cross. Secondly, we studied the problem of neighbor full sum distinguishing total coloring of four classes of 3-regular graphs by exhaustive coloring method and combinatorial analysis, and obtained that the neighbor full sum distinguishing total chromatic numbers for these graphs are all 2.

Keywords: non-proper total coloring; neighbor full sum distinguishing total coloring; neighbor full sum distinguishing total chromatic number; 3-regular graph

图的可区别染色问题在交通、排序、无线电频率分配等领域应用广泛，目前已取得了许多研究成果. Karoński 等[1]首次介绍并研究了图的邻和可区别边染色，并提出了 1-2-3 猜想. Kalkowski 等[2]证明了：若 G 是 k-可着色的且 k 为奇数，则 G 中存在一个邻和可区别 k-边染色. 因此，对于一类 3-可着色图，包括二部图，1-2-3 猜想均成立. Addario-Berry 等[3]给出：当 $k=30$ 时，每个无孤立边的图都有一个邻和可区别 30-边染色. 文献[4-5]将 k 值进一步改进为 $k=15$，$k=13$. 对于每个无孤立边的图，Kalkowski 等[2]还证明了它们都是邻和可区别 5-边染色的. Przybylo[6]证明了：每个 d-正则图（$d\geqslant 2$）都是邻和可区别 4-边染色的，且当 $d\geqslant 10^8$ 时，每个 d-正则图是邻和可区别 3-边染色的. Przybylo 等[7]在邻和可区别边染色的基础上考虑加入点自身的颜色，定义了图的邻和可区别全染色，同时给出

收稿日期：2024-03-19. **网络首发日期**：2024-08-30.

第一作者简介：杨 超（1988—），男，汉族，博士，讲师，从事图论及其应用、网络与系统安全的研究，E-mail：yangchao@sues.edu.cn.

基金项目：国家自然科学基金（批准号：61672001；61662066；62072296）.
网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240829.0943.003.

了关于邻和可区别全染色的1-2猜想. 当图 G 是一个3-可着色图、完全图或者4-正则图时，1-2猜想均成立. 文献[8]研究表明：任意图 G 的邻和可区别全色数小于等于3.

Flandrin 等[9]在邻和可区别全染色的基础上，将每个点的邻点颜色数加入其权重和中，定义了图的邻点全和可区别全染色. Baudon 等[10]进一步给出了关于邻点全和可区别全染色的一个猜想：任意图的邻点全和可区别全色数不超过3. 研究表明，该猜想对哈林图[11]、若干平方图[12]、广义 Petersen 图和循环图[13]以及若干倍图[14]均成立. 基于图的邻点全和可区别全染色猜想，本文研究四类三正则构造图的邻点全和可区别全色数问题.

1 预备知识

本文所讨论的图 G 均为无向简单连通图，用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集. 本文未定义的术语和符号均见文献[15].

定义 1[9] 设 $f: V(G)\cup E(G)\to[1,k]$ 是图 G 的一个非正常 k-全染色. 令 $\phi(x)=f(x)+\sum\limits_{x\in e}f(e)+\sum\limits_{y\in N(x)}f(y)$，其中 $N(x)=\{y\in V(G)\mid xy\in E(G)\}$. 对任意的边 $uv\in E(G)$，如果有 $\phi(u)\neq\phi(v)$ 成立，则称 f 是图 G 的一个邻点全和可区别 k-全染色. 图 G 的邻点全和可区别全染色中最小的 k 值称为 G 的邻点全和可区别全色数，记为 $\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(G)$.

Snark 图是源自3-边着色猜想而构造的图，若图 G 是2-边连通的三正则图且不可3-边着色，且围长至少为5，也无3-边割集，则图 G 称为 Snark 图. Petersen 图是最小的 Snark 图. 本文研究的四类三正则图定义如下.

定义 2[16] 设 G_n 是一个三正则图，其顶点集为 $V(G_n)=\{a_i,b_i,c_i,d_i;\ 0\leqslant i\leqslant n-1\}$，边集为 $E(G_n)=\{a_ia_{i+1},b_ib_{i+1},c_ic_{i+1},d_ia_i,d_ib_i,d_ic_i;\ 0\leqslant i\leqslant n-1\}$，点的标号下标对 n 取模，则把 G_n 通过用边 $b_{n-1}a_0,a_{n-1}b_0$ 替换 $b_{n-1}b_0,a_{n-1}a_0$ 得到的图定义为 H_n. 如果 n 为奇数且 $n\geqslant5$，则 H_n 称为 Flower Snark 图，其他的图称为 Flower Snark 图的相关图.

把 Flower Snark 图及其相关图统一用 F_n 表示，F_5 如图1所示.

定义 3[17] 设图 B_k（$k\geqslant3$）的顶点集为 $V(B_k)=\{v_j^t\mid0\leqslant t\leqslant k-1,\ 1\leqslant j\leqslant8\}$，边集为 $E(B_k)=\{v_1^tv_2^t,v_3^tv_4^t,v_5^tv_6^t,v_6^tv_7^t,v_6^tv_8^t,v_1^tv_7^t,v_4^tv_7^t,v_2^tv_8^t,v_3^tv_8^t\mid0\leqslant t\leqslant k-1\}\cup\{v_2^tv_1^{t+1},v_4^tv_3^{t+1},v_5^tv_5^{t+1}\mid0\leqslant t\leqslant k-1\}$，这里加法取模 k. 当 k 为奇数时，B_k 称为 Goldberg Snark 图.

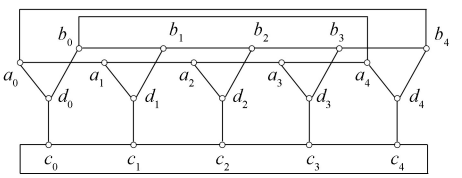


图1 Flower Snark 图 F_5

Fig. 1 Flower Snark graph F_5

Goldberg Snark 图 B_3 如图2所示.

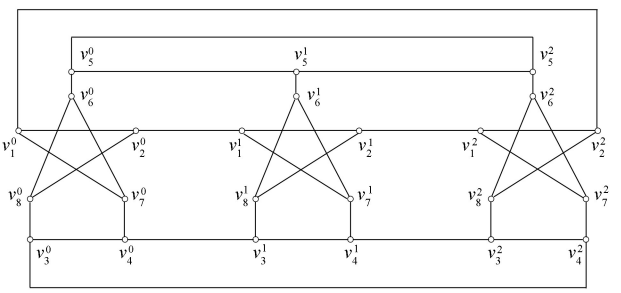


图2 Goldberg Snark 图 B_3

Fig. 2 Goldberg Snark graph B_3

类似于 Flower Snark 图和 Goldberg Snark 图的构造方法，本文分别构造了基于双星和十字交叉形的两类三正则图 D_n 和 L_n. 三正则图 D_n 和 L_n 分别构造如下.

定义 4 设 $D_n(n\geqslant3)$ 为三正则图，其顶点集为 $V(D_n)=\{v_j^i\mid0\leqslant i\leqslant n-1,\ 1\leqslant j\leqslant10\}$，边集为

$E(D_n)=\{v_1^iv_3^i, v_3^iv_4^i, v_2^iv_4^i, v_3^iv_5^i, v_4^iv_6^i, v_2^iv_8^i, v_6^iv_{10}^i, v_1^iv_7^i, v_5^iv_9^i, v_7^iv_8^i, v_9^iv_{10}^i \mid 0\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{v_8^iv_7^{i+1}, v_6^iv_5^{i+1}, v_2^iv_1^{i+1}, v_{10}^iv_9^{i+1}, v_5^0v_6^{n-1}, v_7^0v_8^{n-1}, v_1^0v_2^{n-1}, v_9^0v_{10}^{n-1} \mid 0\leqslant i\leqslant n-1\}$.

三正则图 D_4 如图 3 所示.

定义 5　设 $L_n(n\geqslant 3)$ 为三正则图，其顶点集为 $V(L_n)=\{v_j^i \mid 0\leqslant i\leqslant n-1,\ 1\leqslant j\leqslant 8\}$，边集为 $E(L_n)=\{v_1^iv_4^i, v_2^iv_3^i, v_1^iv_5^i, v_2^iv_6^i, v_3^iv_7^i, v_4^iv_8^i, v_5^iv_6^i, v_7^iv_8^i \mid 0\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{v_2^iv_1^{i+1}, v_6^iv_5^{i+1}, v_8^iv_7^{i+1}, v_4^iv_3^{i+1}, v_3^0v_4^{n-1}, v_1^0v_2^{n-1}, v_5^0v_6^{n-1}, v_7^0v_8^{n-1} \mid 0\leqslant i\leqslant n-1\}$.

三正则图 L_4 如图 4 所示.

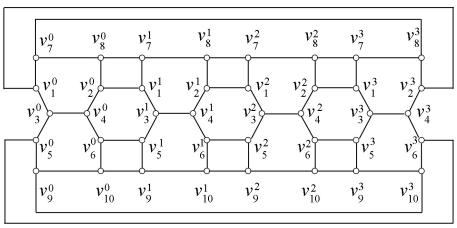


图 3　三正则图 D_4

Fig. 3　Three-regular graph D_4

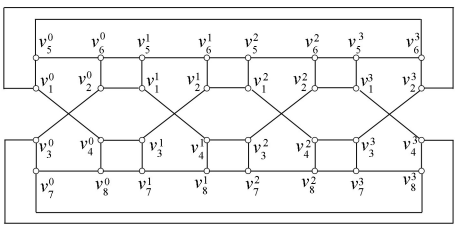


图 4　三正则图 L_4

Fig. 4　Three-regular graph L_4

2　主要结果

引理 1　设 G 是一个 k-正则图，则 $\mathrm{fgndi}_{\sum}(G)\geqslant 2$.

证明：反证法. 假设 k-正则图 G 的点和边均染颜色 1，则 G 中每个点的权重值都为 $2k+1$，与定义 1 矛盾，故 $\mathrm{fgndi}_{\sum}(G)\geqslant 2$. 证毕.

当 $k=3$ 时，引理 1 给出了三正则图 G 满足 $\mathrm{fgndi}_{\sum}(G)\geqslant 2$，即确定了三正则图的邻点全和可区别全色数的一个下界. 下面先构造基于定义 2～定义 5 中四类三正则图的 2-全染色函数，再验证它们是邻点全和可区别 2-全染色的，即 $\mathrm{fgndi}_{\sum}(G)\leqslant 2$.

定理 1　$\mathrm{fgndi}_{\sum}(F_n)=2$.

证明：由定义 2 知，图 F_n 是一个三正则图. 由引理 1 知，至少用 2 种颜色才能完成 F_n 的一个邻点全和可区别全染色. 下面分 4 种情形对 F_n 进行染色.

情形 1)　$n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$且 $n\geqslant 5$.

定义 F_n 的一个全染色 f_1：$V(F_n)\cup E(F_n)\to[1,2]$如下：

$f_1(v)=1$，$v\in V(F_n)$；

$f_1(e)=2$，其中 $e\in\{a_0d_0, a_0b_{n-1}, b_0d_0, b_{n-1}d_{n-1}, c_0c_{n-1}\}\cup\{c_id_i \mid i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{c_ic_{i+1} \mid i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{a_ia_{i+1} \mid i\equiv 1,2(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{b_ib_{i+1} \mid i\equiv 0,3(\mathrm{mod}\ 4)\}$；

$f_1(e_0)=1$，$e_0\in E(F_n)\backslash\{e\}$.

由染色 f_1 可得：

$$\phi(a_i)=\begin{cases}7, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4),\ i\neq 0,\\ 8, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\\ 9, & i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4),\ i=0;\end{cases}$$

$$\phi(b_i)=\begin{cases}7, & i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4),\\ 8, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\\ 9, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4),\ i\neq n-1,\\ 10, & i=n-1;\end{cases}$$

$$\phi(c_i)=\begin{cases}8, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\\ 9, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\ i\neq n-1,\\ 10, & i=n-1;\end{cases}$$

$$\phi(d_i)=\begin{cases}7, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\\ 8, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\ i\neq 0,n-1,\\ 9, & i=n-1,\\ 10, & i=0.\end{cases}$$

因为各相邻点权重不同，所以 f_1 为 F_n 的一个邻点全和可区别2-全染色.

情形2) $n\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$且 $n\geqslant 7$.

定义 F_n 的一个全染色 f_2：$V(F_n)\cup E(F_n)\to[1,2]$如下：

$f_2(v)=1$，$v\in V(F_n)$；

$f_2(e)=2$，其中 $e\in\{a_{n-1}b_0,b_{n-3}d_{n-3},a_{n-1}d_{n-1},c_{n-3}c_{n-2},c_0c_{n-1},b_{n-2}b_{n-1}\}\cup\{c_id_i\mid i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{c_ic_{i+1}\mid i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{a_ia_{i+1}\mid i\equiv 1,2(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{b_ib_{i+1}\mid i\equiv 0,3(\mathrm{mod}\ 4)\}$；

$f_2(e_0)=1$，$e_0\in E(F_n)\backslash\{e\}$.

由染色 f_2 可得：

$$\phi(a_i)=\begin{cases}7, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4),\\ 8, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\\ 9, & i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4),\ i\neq n-1,\\ 10, & i=n-1;\end{cases}$$

$$\phi(b_i)=\begin{cases}7, & i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4),\ i\neq n-1,\\ 8, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\ i=n-1,\\ 9, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4),\ i=n-2,\\ 10, & i=n-3;\end{cases}$$

$$\phi(c_i)=\begin{cases}8, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\ i\neq n-2,\\ 9, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\ i=n-2,\ i\neq n-1,n-3,\\ 10, & i=n-1,n-3;\end{cases}$$

$$\phi(d_i)=\begin{cases}7, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\\ 8, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\ i\neq n-3,n-1,\\ 9, & i=n-1,n-3.\end{cases}$$

因为各相邻点权重不同，所以 f_2 为 F_n 的一个邻点全和可区别2-全染色.

情形3) $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$且 $n\geqslant 4$.

定义 F_n 的一个染色 f_3：$V(F_n)\cup E(F_n)\to[1,2]$如下：

$f_3(v)=1$，$v\in V(F_n)$；

$f_3(e)=2$，其中 $e\in\{c_ic_{i+1}\mid i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{c_id_i\mid i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{a_ia_{i+1}\mid i\equiv 2,3(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{b_ib_{i+1}\mid i\equiv 2,3(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{a_{n-1}b_0,b_{n-1}a_0\}$；

$f_3(e_0)=1$，$e_0\in E(F_n)\backslash\{e\}$.

由染色 f_3 可得：

$$\phi(a_i)=\begin{cases}7, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4),\\ 8, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 9, & i\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4);\end{cases}$$

$$\phi(b_i)=\begin{cases}7, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4),\\ 8, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 9, & i\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4);\end{cases}$$

$$\phi(c_i)=\begin{cases}8, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 9, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2);\end{cases}$$

$$\phi(d_i)=\begin{cases}7, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 8, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

因为各相邻点权重不同，所以 f_3 为 F_n 的一个邻点全和可区别2-全染色.

情形4) $n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$且 $n\geqslant 4$.

定义 F_n 的一个染色 f_4：$V(F_n)\cup E(F_n)\to[1,2]$如下：

$f_4(v)=1$，$v\in V(F_n)$；

$f_4(e)=2$，其中 $e\in\{c_ic_{i+1}\mid i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{c_id_i\mid i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{a_ia_{i+1}\mid i\equiv 0,3(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{b_ib_{i+1}\mid i\equiv 1,2(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{a_id_i,b_id_i\mid 0\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{b_{n-1}a_0\}$；

$f_4(e_0)=1$，$e_0\in E(F_n)\backslash\{e\}$.

由染色 f_4 可得：

$$\phi(a_i)=\begin{cases}8, & i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4),\\ 9, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\\ 10, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4);\end{cases}$$

$$\phi(b_i)=\begin{cases}8, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4),\\ 9, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\\ 10, & i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4);\end{cases}$$

$$\phi(c_i)=\begin{cases}8, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 9, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2);\end{cases}$$

$$\phi(d_i)=\begin{cases}9, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 10, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

因为各相邻点权重不同，所以 f_4 为 F_n 的一个邻点全和可区别 2-全染色.

定理 2　$\mathrm{fgndi}_{\sum}(B_k)=2$.

证明：由定义 3 知，图 B_k 是一个三正则图. 由引理 1 知，至少用 2 种颜色才能完成 B_k 的一个邻点全和可区别全染色. 对 B_k 给出染色方案 f_5：$V(B_k)\cup E(B_k)\to[1,2]$如下：

$f_5(v)=1$，$v\in V(B_k)$；

$f_5(e)=2$，其中 $e\in\{v_6^iv_7^i,v_6^iv_8^i,v_2^iv_8^i\mid 0\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{v_5^iv_6^i\mid i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{v_5^iv_5^{i+1}\mid i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{v_3^iv_8^i\mid i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{v_4^iv_7^i\mid i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{v_3^iv_4^i\mid i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{v_4^iv_3^{i+1}\mid i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\}$；

$f_5(e_0)=1$，$e_0\in E(B_k)\backslash\{e\}$.

由染色 f_5 可得：

$$\phi(v_1^i)=7;\qquad \phi(v_2^i)=8;$$

$$\phi(v_3^i)=\begin{cases}8, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\ i=0,\\ 9, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\ i\neq 0;\end{cases}$$

$$\phi(v_4^i)=\begin{cases}7, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 10, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2);\end{cases}$$

$$\phi(v_5^i)=\begin{cases}7, & i=0,\\ 8, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\ i\neq 0,\\ 9, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2);\end{cases}$$

$$\phi(v_6^i)=\begin{cases}9, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 10, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2);\end{cases}$$

$$\phi(v_7^i)=\begin{cases}8, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 9, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2);\end{cases}$$

$$\phi(v_8^i)=\begin{cases}9, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\\ 10, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

因为各相邻点权重不同，所以 f_5 为 B_k 的一个邻点全和可区别 2-全染色.

定理 3　$\mathrm{fgndi}_{\sum}(D_n)=2$.

证明：由定义 4 知，图 D_n 是一个三正则图. 由引理 1 知，至少用 2 种颜色才能完成 D_n 的一个邻点全和可区别全染色.

情形 1) $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$且 $n\geqslant 4$.

染色方案 f_6：$V(D_n)\cup E(D_n)\to[1,2]$如下：

$f_6(v)=1$，$v\in V(D_n)$；

$f_6(e)=2$，其中 $e\in\{v_5^0v_9^0, v_6^{n-1}v_5^0, v_2^{n-1}v_1^0, v_8^{n-1}v_7^0\}\cup\{v_1^iv_3^i\}\cup\{v_6^iv_{10}^i \mid i\neq n-1\}\cup\{v_{10}^iv_9^{i+1} \mid i\neq n-1\}\cup\{v_1^iv_7^i \mid i\neq 0\}\cup\{v_2^iv_8^i \mid i\neq n-1\}\cup\{v_8^iv_7^{i+1} \mid i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{v_7^iv_8^i \mid i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\}$；

$f_6(e_0)=1$，$e_0\in E(D_n)\backslash\{e\}$.

由染色 f_6 可得：

$\phi(v_1^i)=9$； $\phi(v_2^i)=8$； $\phi(v_3^i)=8$； $\phi(v_4^i)=7$； $\phi(v_6^i)=8$； $\phi(v_8^i)=9$； $\phi(v_9^i)=8$；

$$\phi(v_5^i)=\begin{cases}7, & 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ 9, & i=0;\end{cases}$$

$$\phi(v_7^i)=\begin{cases}8, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 10, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2);\end{cases}$$

$$\phi(v_{10}^i)=\begin{cases}7, & i=n-1,\\ 9, & 0\leqslant i\leqslant n-2.\end{cases}$$

因为各相邻点权重不同，所以 f_6 为 D_n 的一个邻点全和可区别 2-全染色.

情形 2) $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$且 $n\geqslant 3$.

染色方案 f_7：$V(D_n)\cup E(D_n)\to[1,2]$如下：

$f_7(v)=1$，$v\in V(D_n)$；

$f_7(e)=2$，其中 $e\in\{v_5^0v_9^0, v_6^{n-1}v_5^0, v_2^{n-1}v_1^0\}\cup\{v_1^iv_3^i\}\cup\{v_6^iv_{10}^i \mid i\neq n-1\}\cup\{v_{10}^iv_9^{i+1} \mid i\neq n-1\}\cup\{v_1^iv_7^i\}\cup\{v_2^iv_8^i \mid i\neq n-1\}\cup\{v_8^iv_7^{i+1} \mid i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{v_7^iv_8^i \mid i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\}$；

$f_7(e_0)=1$，$e_0\in E(D_n)\backslash\{e\}$.

由染色 f_7 可得：

$\phi(v_2^i)=8$； $\phi(v_3^i)=8$； $\phi(v_4^i)=7$； $\phi(v_6^i)=8$； $\phi(v_8^i)=9$； $\phi(v_9^i)=8$；

$$\phi(v_1^i)=\begin{cases}9, & 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ 10, & i=0;\end{cases}$$

$$\phi(v_5^i)=\begin{cases}7, & 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ 9, & i=0;\end{cases}$$

$$\phi(v_7^i)=\begin{cases}8, & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ 10, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2);\end{cases}$$

$$\phi(v_{10}^i)=\begin{cases}7, & i=n-1,\\ 9, & 0\leqslant i\leqslant n-2.\end{cases}$$

因为各相邻点权重不同，所以 f_7 为 D_n 的一个邻点全和可区别 2-全染色.

定理 4 $\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(L_n)=2$.

证明：由定义 5 知，图 L_n 是一个三正则图. 由引理 1 知，至少用 2 种颜色才能完成 L_n 的一个邻点全和可区别全染色. 下面定义 L_n 的一个 2-全染色 f_8：$f_8(v)=1$，$v\in V(L_n)$；$f_8(e)=2$，$e\in\{v_1^iv_5^i, v_1^iv_4^i, v_2^iv_3^i, v_3^iv_7^i\}$；$f_8(e_0)=1$，$e_0\in E(L_n)\backslash\{e\}$. 则

$\phi(v_1^i)=9$； $\phi(v_2^i)=8$； $\phi(v_3^i)=9$； $\phi(v_4^i)=8$； $\phi(v_5^i)=8$； $\phi(v_6^i)=7$； $\phi(v_7^i)=8$； $\phi(v_8^i)=7$.

故 f_8 为 L_n 的一个邻点全和可区别 2-全染色.

参 考 文 献

[1] KAROŃSKI M, LUCZAK T, THOMASON A. Edge Weights and Vertex Colours [J]. Journal of Combinatorial Theory (Series B), 2004, 91(1): 151-157.

[2] KALKOWSKI M, KAROŃSKI M, PFENDER F. Vertex-Coloring Edge-Weightings: Towards the 1-2-3-Conjecture [J]. Journal of Combinatorial Theory (Series B), 2010, 100(3): 347-349.

[3] ADDARIO-BERRY L, DALAL K, MCDIARMID C, et al. Vertex-Colouring Edge-Weightings [J]. Combinatorica, 2007, 27(1): 1-12.

[4] ADDARIO-BERRY L, DALAL K, REED B A, et al. Degree Constrained Subgraphs [J]. Discrete Applied

Mathematics, 2008, 156(7): 1168-1174.

[5] WANG T, YU Q L. On Vertex-Coloring 13-Edge-Weighting [J]. Frontiers of Mathematics in China, 2008, 3(4): 581-587.

[6] PRZYBYLO J. The 1-2-3 Conjecture Almost Holds for Regular Graphs [J]. Journal of Combinatorial Theory (Series B), 2021, 147: 183-200.

[7] PRZYBYLO J, WOŹNIAK M. On a 1,2 Conjecture [J]. Discrete Mathematics Theoretical Computer Science, 2010, 12(1): 101-108.

[8] KALKOWSKI M. A Note on the 1,2-Conjecture [D]. Poznan: Adam Mickiewicz University, 2010.

[9] FLANDRIN E, LI H, MARCZYK A, et al. A Note on Neighbor Expanded Sum Distinguishing Index [J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2017, 37(1): 29-37.

[10] BAUDON O, HOCQUARD H, MARCZYK A, et al. On a Total Version of 1,2,3 Conjecture [J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2020, 40(4): 1175-1186.

[11] 程银万，杨超，姚兵. 关于哈林图的邻和可区别染色的注记 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2022，60(4)：833-837. (CHENG Y W, YANG C, YAO B. Notes on Neighbor Sum Distinguishing Coloring of Halin Graphs [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2022, 60(4): 833-837.)

[12] 王芹，杨超，常景智，等. 平方图的邻点全和可区别全染色 [J]. 华南师范大学学报(自然科学版)，2022，54(1)：107-112. (WANG Q, YANG C, CHANG J Z, et al. Neighbor Full Sum Distinguishing Total Coloring of Square Graphs [J]. Journal of South China Normal University (Natural Science Edition), 2022, 54(1): 107-112.)

[13] 常景智，杨超，程银万，等. 两类正则图的邻点全和可区别全染色 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2022，44(4)：117-121. (CHANG J Z, YANG C, CHENG Y W, et al. Neighbor Full Sum Distinguishing Total Coloring of Two Types of Regular Graphs [J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2022, 44(4): 117-121.)

[14] 程银万，杨超，姚兵. 若干倍图的邻点全和可区别全染色 [J]. 华中师范大学学报(自然科学版)，2023，57(5)：682-687. (CHENG Y W, YANG C, YAO B. Neighbor Full Sum Distinguishing Total Coloring of Some Double Graphs [J]. Journal of Central China Normal University (Natural Sciences), 2023, 57(5): 682-687.)

[15] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. London: The MaCmillan Press Ltd, 1976: 1-170.

[16] 董晓媛. Flower Snark 图的强边染色 [J]. 长春师范大学学报，2019，38(2)：4-8. (DONG X Y. Strong Edge Coloring of Flower Snark [J]. Journal of Changchun Normal University, 2019, 38(2): 4-8.)

[17] 董晓媛，马登举. Goldberg Snark 图的强边染色 [J]. 东北师大学报(自然科学版)，2018，50(4)：16-19. (DONG X Y, MA D J. Strong Edge Coloring of Goldberg Snark [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 2018, 50(4): 16-19.)

(责任编辑：赵立芹)