文章编号:1674-2974(2025)06-0120-14 DOI:10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2025182

一种基于证据理论的主动学习可靠性分析方法

张哲†,宝文礼,姚中洋
(湖南大学 机械与运载工程学院,湖南 长沙 410082)

摘 要:针对具有单个失效模式、认知不确定性和“黑箱”模型特点的可靠性分析问题,提出了一种基于证据理论的主动学习可靠性分析方法,能够高效高精度地求解结构的可信度和似真度.通过证据理论对认知不确定性变量进行处理,抽取初始训练样本构建初始Kriging模型,将优化方法与主动学习过程相结合,实现在整个输入变量空间中搜索最佳训练样本,利用最佳训练样本对Kriging模型进行优化,通过优化后的Kriging模型代替功能函数,对未知点进行预测,以实现结构的可信度和似真度计算.该方法将优化方法与主动学习过程相结合,降低了传统方法搜索训练样本时对候选样本位置的约束,能够搜索到对Kriging模型优化效果更好的训练样本,提升了Kriging模型构建的效率和成功率.数值算例证明了该方法具有良好的计算效果,并将其应用于车辆正面碰撞的可靠性分析.

关键词:结构可靠性;可靠性分析;证据理论;“黑箱”问题;主动学习Kriging模型
中图分类号:TB114.3 **文献标志码**:A

An Active Learning Reliability Analysis Method Based on Evidence Theory

ZHANG Zhe†, BAO Wenli, YAO Zhongyang
(College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: For the reliability analysis problem characterized by a single failure mode, cognitive uncertainty, and “black-box” models, an active learning reliability analysis method based on evidence theory is proposed. This method efficiently and accurately determines the credibility and verisimilitude of structures. It handles cognitive uncertain variables using evidence theory, initiates initial training sample construction for a Kriging model, and combines optimization methods with active learning to search for optimal training samples across the entire input variable space. This approach refines the Kriging model chronically with optimal training samples, replacing the functional function with the Kriging model to predict unknown points for credibility and verisimilitude calculation of the structure. By integrating optimization methods with active learning, the method relaxes constraints on candidate sample locations during traditional training sample search, thereby identifying training samples that better enhance the Kriging model's correction effects and improve the efficiency and success rate of Kriging model construction. Numerical examples demonstrate the method's computational effectiveness and its application to the reliability analysis of vehicle frontal collisions.

* **收稿日期**:2024-06-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(52375242),National Natural Science Foundation of China(52375242);湖南省自然科学基金资助项目(2023JJ20011),Natural Science Foundation of Hunan Province(2023JJ20011)
作者简介:张哲(1988—),男,湖南邵阳人,湖南大学副教授
† 通信联系人,E-mail:zhangzhe0828@hnu.edu.cn

Key words: structural reliability; reliability analysis; evidence theory; black box problem; active learning kriging model

在实际工程问题中,由于测量条件受限、制造精度不足和服役环境多变等因素的影响,会产生各种不确定性.这些不确定性在多数情况下表现为均值附近的小范围波动,但是,结构运行的安全性可能因为多源不确定性的影响而发生波动,甚至失效.因此,采用恰当的方法量化和控制不确定性对于确保结构安全性至关重要.基于对信息的掌握情况,不确定性可以分为两类[1].一类是随机不确定性,基于系统内部的随机过程或外部随机事件的影响而产生[2],通常通过概率密度函数表征.另一类是认知不确定性,主要受当前认知水平和测量工具等限制,没有足够的信息表征不确定变量的分布类型.目前用于处理认知不确定性的理论有:证据理论[3]、区间分析理论[4]、模糊集理论[5]和可能性理论[6]等.相比之下,证据理论使用灵活的识别框架和基本可信度分配函数表征不确定信息,是当前用于解决认知不确定性的主要方法之一.

证据理论于1967年由Dempster提出,经过其学生Shafer进一步研究与发展,也被称为Dempster-Shafer(D-S)理论[7].由于认知不确定性的存在,证据理论使用可信度函数(belief function,Bel)和似真度函数(plausibility function,Pl)组成的信度区间共同量化不确定性,不同于概率理论使用单一的失效概率描述随机不确定性.证据理论使用基本可信度分配(basic probability assignment,BPA)函数量化认知不确定性,该函数是定义在集合上的可信度分配函数.当信息量足够多以至于能够获得概率密度函数时,证据理论近似等效于概率理论;反之,当信息量减少到只有上下界时,证据理论近似等效于区间分析理论[8].然而,基本可信度分配函数是定义于集合上的非连续函数,使得基于证据理论的可靠性分析需要对不确定域内每个集合上的功能函数进行极值分析,因此,近年来,如何提升基于证据理论的可靠性分析的计算效率成为该领域的研究重点之一[9-10].为此,同行学者提出了不同的求解策略,包括:顶点法、焦元削减法、概率等价法和代理模型法等.

顶点法:该方法最早由Dong等[11]提出.该方法考虑到在实际工程问题中,不确定性是以设计值为中心的小范围波动,将其分配到焦元内部后波动范围再次缩小.所以该方法以极限状态函数在焦元的微小范围内,非线性影响很小的前提,借助求解焦元顶点位置的响应值实现焦元类型的判断[12].顶点法相比于传统方法计算效率更高,结果鲁棒性强[13].但是顶点法需要计算所有焦元顶点的值,面对维度较高的证据可靠性分析问题,仍然存在沉重的计算负担.

焦元削减法:该方法通过非概率可靠性指标构造了不确定域内的一个辅助区域,落入该区域的焦元不需要计算功能函数的极值,从而降低计算成本[14].在证据可靠性分析中,很多工程问题的可靠度通常很高($P_r \geqslant 99\%$),可以断定大部分的焦元位于安全域,安全域内的焦元不再需要极值分析,从而大幅减少计算成本[15].Mourelatos等[16]将顺序划分策略用于焦元和可靠域之间关系的识别,提升了计算效率.

概率等价法:类似于概率理论中的最可能失效点,姜潮等[17]提出针对证据理论可靠性分析的最可能失效焦元,该焦元对证据理论可信度与似真度的计算具有重要贡献度.Xiao等[18]依据证据变量中BPA的面积与随机变量的PDF相等,提出两者之间的转换方法,能够实现在证据空间中稳定且准确地搜索到最可能失效焦元.Zhang等[19]以最大可能失效焦元为中心,使用一阶泰勒级数展开和二阶泰勒级数展开,提出证据理论可靠性分析的一次二阶矩法和二次二阶矩法,高效地实现了结构可靠度计算.

代理模型法:实际工程的"黑箱"问题,结构功能函数调用通常只能借助有限元仿真或者计算流体力学等方法实现.但是,对于某些复杂模型,如高铁或者飞机,单次仿真需要几天甚至几个月时间.使用传统证据可靠性分析方法解决此类问题,所需的计算成本难以接受.面对耗时且昂贵的实验或者仿真计算,很多学者通过构建代理模型替代原来的实验或者有限元仿真,大幅减少计算成本同时也有效地实现了可靠性分析的目的.Bae等[20]用多点逼近法通过在设计空间中选择一系列局部近似点构建极限状态函数的代理模型,通过代理模型取代了昂贵的结

构仿真. Zhang 等[21]借助实验设计技术,搜索重要控制点,并基于控制点构建高精度的径向基函数响应面,高效地完成了可靠性计算. 曹亮等[22]借助支持向量回归构建隐示功能函数的近似模型. Yin 等[23]借助均匀性方法为每个证据变量创建概率密度函数,使用多项式混沌展开来近似模拟证据变量变化范围内的声学系统响应,然后基于多项式混沌展开,通过数值求解器高效地完成所有焦元响应的上下界计算.

Kriging 模型是一种高精度的代理模型,通过显式高斯随机场逼近实际工程中的"黑箱"模型,能够提供未知点的最佳线性估计和预测误差[24, 25]. 为了提高 Kriging 模型的精度,学者们引入了主动学习过程,使得具有主动学习过程的 Kriging 模型在可靠性分析领域被广泛应用[26, 27]. Yang 等[28]提出了证据理论框架下的主动学习 Kriging 的可靠性分析方法,该方法使用主动学习 Kriging 模型为功能函数提供正确符号预测焦元以判断焦元类型,此外为了提高求解焦元极值的准确率和效率,基于卡罗需-库恩-塔克条件提出了 KKTO 优化方法. Zhang 等[29]以 U 学习函数为基础,根据基本变量的 BPA 将原证据空间进行细分,然后确定功能函数与细分得到空间的交点,通过交点构建 Kriging 模型,再用拉丁超立方抽样法(Latin hypercube sampling, LHS)生成额外的样本点,以提高初始 Kriging 模型的准确性. Yang 等[30]提出一种新的学习函数 UET(uncertainty estimation technique),使用识别功能函数的下限或上限预测符号错误的概率最大的焦元,通过实时监控预测误差,及时终止学习过程;陈泽权[31]从快速满足全局收敛条件的角度出发,基于 Kriging believer 准则及重要性抽样原理,提出了自适应结构可靠性分析的快速收敛策略.

传统基于 Kriging 模型的证据可靠性分析方法在构建 Kriging 模型过程中,通常抽样一定数量的样本作为候选样本,然后从确定的候选样本中搜索训练样本[30, 32],在文中称其为样本点法,该方法搜索到最佳训练样本的概率较小,导致模型构建效率下降,甚至失效. 因此提出了一种基于证据理论的主动学习可靠性分析方法,将优化方法和主动学习过程相结合,从整个输入变量空间中自适应地搜索训练样本,降低了传统方法对训练样本的约束,大幅提高搜索到最佳训练样本的概率,进而达到提升 Kriging 模型构建效率和成功率的效果. 本文的主要内容为:第 1 章阐述了证据可靠性分析的基本理论;第 2 章介绍了主动学习 Kriging 模型;第 3 章阐述所提方法的算法构造;第 4 章通过算例验证了本文方法的可行性;第 5 章为文本的结论和未来期望.

1 证据可靠性分析基本理论

在实际的结构可靠性分析中,通常需要使结构满足一定的功能特性,比如:强度、挠度、硬度等. 所需要满足的功能特性即功能函数,用 $g(\boldsymbol{X})$ 表示. 向量 $\boldsymbol{X}=\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 表示与结构有关的多维证据变量的集合,在文中表示证据变量.

$$g(\boldsymbol{X})=g\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right) \tag{1}$$

根据设计的结构是否满足某个功能特性,可以将不确定性输入变量组成的空间划分为安全域 $G=\{g|g(\boldsymbol{X})>0\}$ 和失效域 $F=\{g|g(\boldsymbol{X})\leqslant 0\}$,如图 1 所示.

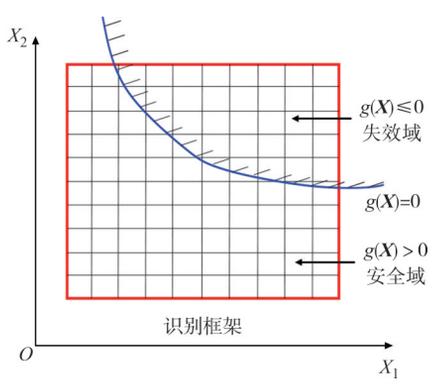


图 1 安全域与失效域示意图

Fig.1 Safety domain and failure domain diagram

在证据理论框架下进行可靠性分析,首先,定义每个变量 $\boldsymbol{X}$. 定义识别框架 $\boldsymbol{\Theta}=\{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n\}$. x_i 为识别框架 $\boldsymbol{\Theta}$ 的一个事件或元素,n 为元素个数,$i=1, 2, \cdots, n$. 识别框架中识别的含义是:对于一个命题,从与之相关的所有可能结果中区分并唯一区分出正确的解答. 识别框架中的所有基本元素构成一个幂集 $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{X})$. 基本可信度分配 m 用于描述命题的可信任程度,类似于概率理论中的概率密度函数. 设 $\boldsymbol{\Theta}$ 为识别框架,则基本可信度分配 m 定义为从集合 $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{X})$ 到 $[0, 1]$ 的映射函数,即 $m: \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{X}) \rightarrow [0, 1]$. 然后,对证据变量的每一个焦元定义基本可信度分配. 当信息来源于多个专家或者系统时,则需要使用信息融合的方式对多条信息进行融合,求解每个焦元的基本可信度分配[33].

多数情况下,结构的功能特性会受到多个输入变量的影响,需要建立多维证据变量的联合识别框

架和联合基本可信度分配[8]. 当认知不确定性变量之间相互独立,对于N维输入变量,可以使用笛卡儿乘积的方式求解,如式(2):

$$\begin{aligned}\Theta = \Omega(X_1)\times\Omega(X_2)\times\cdots\times\Omega(X_N) = \\ \{(A_{X_1}\times A_{X_2}\times\cdots\times A_{X_N})\}\end{aligned} \tag{2}$$

式中:Θ为联合识别框架;$A_{X_1},A_{X_2},\cdots,A_{X_N}$分别表示第1个,第2个,…,第$N$个证据变量的焦元;$\Omega(X_1)$,$\Omega(X_2),\cdots,\Omega(X_N)$分别表示第1个,第2个,…,第$N$个输入变量的识别框架. 联合焦元的求解:

$$A_X = A_{X_1}\times A_{X_2}\times\cdots\times A_{X_N} \tag{3}$$

因为$A_{X_1},A_{X_2},\cdots,A_{X_N}$都是区间,所以$A_X$是一个$N$维的空间. 联合基本可信度分配的求解:

$$m(A_X) = \begin{cases} m(A_{X_1})\cdot m(A_{X_2})\cdot\cdots\cdot m(A_{X_N}), A_{X_i}\in\Omega(X_i) \\ 0, \text{其他}\end{cases} \tag{4}$$

获得证据变量的联合基本可信度分配以及安全域之后,便可以对结构进行可信度和似真度的求解[34]. 证据理论框架下,结构可靠度的求解公式如式(5):

$$\begin{cases}\mathrm{Bel}(G) = \sum\limits_{A_X\subseteq G} m(A_X) \\ \mathrm{Pl}(G) = \sum\limits_{A_X\cap G\neq\varnothing} m(A_X)\end{cases} \tag{5}$$

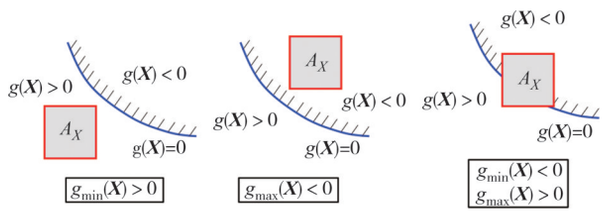
根据式(5),在求解可信度和似真度之前要先确定焦元A_X与安全域G的位置关系,表明焦元A_X完全还是部分位于安全域内部,或者A_X在安全域外. 为了能够准确地判断焦元A_X与安全域的位置关系,需要先求解功能函数$g(\boldsymbol{X})$在每一个焦元A_X上的极值.

$$[g_{\min}, g_{\max}] = [\min_{X\in A_X} g(\boldsymbol{X}),\ \max_{X\in A_X} g(\boldsymbol{X})] \tag{6}$$

目前求解极值的方法主要有顶点法和优化算法,鉴于大部分工程问题中,结构的极限状态函数通常表现出较强的非线性,为了减小非线性对可靠度计算结果的影响,通常采用SQP(sequential quadratic programming)优化算法对每一个A_X求解极值.

求解出每一个焦元的极大值和极小值后,根据A_X的极值分析A_X与极限状态面的位置关系. 如图2(a),以焦元A_X为例,A_X的极小值大于0,表明A_X全部位于安全域内,在计算安全性时,A_X需要同时计入Bel(G)和Pl(G)中;图2(b)中,A_X的极大值小于0,表明A_X完全位于失效域内,在计算安全性时,A_X不计入Bel(G)和Pl(G)中;图2(c)中,A_X的极大值大于0,极小值小于0,由此可以推断,A_X部分位于安全域内,部分位于失效域内,属于边界焦元,A_X只计入Pl(G)不计入Bel(G).

通过以上方法,逐个完成对所有焦元的分类,然后代入式(5)计算,结合$\mathrm{Bel}(G)\leqslant P(G)\leqslant\mathrm{Pl}(G)$,得到结构可靠度$P(G)$的范围[21]. 在极值的分析过程中往往会产生大量的计算成本,随着维度的增加,焦元数量指数级增长,给可靠性分析带来巨大挑战.



(a)可靠焦元　(b)失效焦元　(c)边界焦元

图2　焦元与极限状态函数的可能位置关系

Fig.2　Potential relationships between focal elements and limit state functions

2　主动学习Kriging模型

Kriging模型是一种常用的空间插值方法,可以根据已知数据点的空间分布估计未知位置的数值[25]. Kriging模型的预测功能是基于协方差函数来建立空间数据之间的相似性关系,借助数据之间的相关性与空间距离的关系,根据距离越近的数据之间的相关性越高原则,拟合已知数据点的空间半变异函数进行预测.

2.1　基本概念

给定一组有n个的设计点$\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$,其中$x_i\in\mathrm{IR}^n$,对应$\boldsymbol{X}$的响应值$\boldsymbol{Y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^{\mathrm{T}}$,其中$y_i\in\mathrm{IR}^q$. 设计点$\boldsymbol{X}$以及响应值都满足规范化条件[27].

$$G(\boldsymbol{X}) = f^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{\beta} + Z(x) \tag{7}$$

式中:$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)]^{\mathrm{T}}$,表示均值函数,反映模型的回归趋势,$f(x)$的值在本文中实际为单位向量$\boldsymbol{I}$,即一个长度为$n$的单位列向量;$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]^{\mathrm{T}}$是系数向量;$Z(x)$是具有零均值的平稳高斯随机过程,可以表示为$N(0,\sigma^2)$,描述了模型与其潜在趋势的偏离程度. 在实践中,平均函数最常见的形式是常数或者是以x为输入的线性函数,文中采用的是常数均值.

协方差函数的作用是捕捉$G(\boldsymbol{X})$与平均值的偏离程度. 除此之外,协方差可以调节这些偏差的大小、$G(\boldsymbol{X})$的粗糙度和纵向偏离的尺度. 关于各种协方差函数,统计学中经常使用马氏协方差,在涉及确

定性计算机模型近似时,高斯协方差函数的使用可以大大地降低计算的成本,故高斯协方差占主导地位.

在高斯随机过程中,两个样本点之间的协方差函数表示如式(8):

$$\mathrm{Cov}(Z(x_i), Z(x_j)) = \sigma^2 R(x_i, x_j; \theta) \tag{8}$$

式中:R是描述x_i与x_j之间相关性的相关函数;σ^2表示随机过程的方差.用高斯方法表示如式(9):

$$R(x_i, x_j; \theta) = \prod_{l=1}^{n} \exp\left[-\theta_l (x_{i,l} - x_{j,l})^2\right] \tag{9}$$

式中:n表示变量的维数;$x_{i,l}$和$x_{j,l}$分别是x_i和x_j的第l个变量;θ_l表示相关参数,该参数控制着样本点x_i和x_j之间第l个变量的相关性.

基于现有的样本点,可以计算得到回归系数β以及随机过程方差σ^2的估计值:

$$\hat{\beta} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{Y} \tag{10}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{k} (\boldsymbol{Y} - \hat{\beta}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}^{-1} (\boldsymbol{Y} - \hat{\beta}\boldsymbol{A}) \tag{11}$$

式中:$\boldsymbol{A}$是$k \times 1$的向量,里面所有的元素为1;$\boldsymbol{Y}$为列向量;$\boldsymbol{R}$为相关矩阵,通过相关参数求得.相关参数的确定方式有交叉验证法和最大似然估计法,在大部分文献中借助的是最大似然估计法.通过最大似然估计计算如下:

$$\theta_l = \arg\min_{\theta_l} \left(|\boldsymbol{R}|^{\frac{1}{p}} \hat{\sigma}^2\right) \tag{12}$$

式中:p为训练样本的总数.通过足够的训练样本得到满足精度要求的Kriging模型之后,可以基于现有的模型对任意未知点进行预测.其中预测过程不仅可以得到未知点的值,而且能够得到预测值的波动范围.预测的最佳线性无偏估计和方差如下:

$$\hat{\mu}(x) = \hat{\beta} + \boldsymbol{r}_0 \boldsymbol{R}^{-1} (\boldsymbol{Y} - \hat{\beta}\boldsymbol{A}) \tag{13}$$

$$\hat{\sigma}^2(x) = \hat{\sigma}^2\left[\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{r}_0{}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{r}_0\right] \tag{14}$$

式中:$\boldsymbol{r}_0$为相关系数向量,$\boldsymbol{r}_0 = [R(x_0, x_1), R(x_0, x_2), \cdots, R(x_0, x_k)]^{\mathrm{T}}$,预测的均值为$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{A}$.预测点的方差可以用于评估预测值的波动范围.方差越小代表波动越小,得到的预测误差越小.

2.2 学习准则

在大多数情况下,仅通过初始训练样本构建的初始Kriging模型,其精度通常较低.若直接使用初始Kriging模型进行可靠性分析,将不可避免地产生显著误差,进而引发工程问题的失败.面对这类问题,研究人员通常会寻找一些适当的点来加入训练集,以便更新和修正Kriging模型.在输入样本集中,寻找合适的样本点加入训练集中的准则,称为加点准则.因为这是主动寻找样本点的过程,所以称之为主动学习.目前常见的加点准则有:高效的全局优化(efficient global optimization,EGO)准则,使用期望改进作为搜索点的选择标准,把期望改进最大的点作为新的训练样本;在使用Kriging模型计算函数的极值时,通过期望改进函数(expected improvement function,EIF)准则构造学习函数,在能最大程度改进当前极值的地方增加训练样本;结合Kriging模型和蒙特卡罗的主动学习可靠性分析方法(U准则),使用U学习函数在功能函数的符号误判概率最大的地方增加训练样本[31].

3 算法构造

本文提出的算法主要围绕基于证据理论的主动学习Kriging模型展开.首先,利用拉丁超立方抽样生成初始训练样本,确保样本均匀分布在整个输入变量空间中.接着,构建初始Kriging模型,并结合优化方法与主动学习过程,通过U学习函数识别需要修正的区域,利用内点法优化算法在整个输入变量空间中搜索最佳训练样本,以修正和优化Kriging模型.然后,采用区间蒙特卡罗抽样方法减轻高维问题的计算负担,并对焦元进行分类,计算结构的可信度和似真度.整个算法流程包括证据理论处理认知不确定性、Kriging模型构建与更新以及可信度和似真度的计算,通过提高Kriging模型的构建效率和成功率,降低传统方法中搜索训练样本的约束,从而有效解决可靠性分析问题.

3.1 主动学习Kriging模型

主动学习Kriging模型的构建主要包括:确定初始训练集、利用初始训练集构建初始的Kriging模型、结合优化方法和主动学习过程搜索最佳训练样本、依据停止条件判断Kriging模型的精度.构建主动学习Kriing模型的具体流程如下:

由于在“黑箱”模型中,在进行采样时无法判断在Kriging模型中什么区域需要更多的样本点,什么区域需要更少的样本点.所以初始训练样本的采样原则期望尽可能使其均匀地分布在整个输入变量空间.故采用拉丁超立方抽样,该抽样方法常用于设计实验和可靠性分析.优点是:能够提供较好的抽样均匀性和覆盖性,有效捕捉多个变量之间的关系;在相同的样本数量下,LHS可以提供更多的信息和数据密度.在利用LHS时,首先在N维的超立方空间

$[0,1]^N$中抽取n个样本;然后将这n个样本映射到输入变量空间中抽取样本,将其记为$\boldsymbol{X}_{\text{in}}$,根据经验,抽取的样本数量$n=(N+1)(N+2)/2$;最后利用$\boldsymbol{X}_{\text{in}}$,调用功能函数求解相应的响应值$g_{\text{in}}$,由$\boldsymbol{X}_{\text{in}}$和$g_{\text{in}}$组合得到训练集$(\boldsymbol{X}_{\text{in}}, g_{\text{in}})$.

构建Kriging模型时采用高斯型相关函数(也称高斯核函数).

根据2.1节中Kriging模型的建立过程,通过训练集$(\boldsymbol{X}_{\text{in}}, g_{\text{in}})$,可以计算得到回归系数$\beta$以及随机过程方差$\sigma^2$的估计值,从而得到Kriging模型$\hat{g}(\boldsymbol{X})$. 通过$\hat{g}(\boldsymbol{X})$可以完成对输入变量空间内的任意点$x$的预测,获得点$x$的均值$\overline{g}(x)$,方差$\sigma_{\hat{g}}^2(x)$,其中$\hat{g}(x)\sim N(\overline{g}(x),\sigma_{\hat{g}}^2(x))$.

通过Kriging模型不仅可以获得该点的预测值,还可以得到预测值的偏离程度等重要信息. 可靠性分析是一个分类问题,可以通过未知焦元的符号判断其类型,进而实现可靠度计算. Kriging模型的功能是为未知点处提供符号预测,并不需要输出极限状态函数的真实值,从而构建一个局部逼近极限状态面的局部Kriging模型.

针对得到的初始Kriging模型,需要对其进行精度判断,在Kriging模型精度不够的区域加入训练样本,修正Kriging模型,使模型逼近真实的功能函数,达到要求的精度. 难点在于如何搜索到最佳的训练样本.

根据训练样本的特点,可以分为3类:第1类为极限状态面附近的点,这一类训练样本的特点是预测均值$\overline{g}(x)$在极限状态面附近,在预测工程中,预测值有较大概率穿越极限状态面,导致符号预测错误;第2类训练样本的不确定性程度高,即$\sigma_{\hat{g}}(x)$过大,这类训练样本预测值$\hat{g}(x)$的分布分散,其预测值同样有较大的可能性穿越极限状态面;第3类训练样本同时具备前两类训练样本的共同特征,仅仅考虑均值和方差无法将其准确地找出来.

搜索最佳训练样本策略如下:

通过拉丁超立方抽样(LHS)生成初始训练样本,确保样本均匀分布;利用Kriging模型中U学习函数判断预测输入变量的均值和方差的正确概率,识别需要修正的区域;然后通过停止条件控制Kriging模型循环更新的精度;最后结合优化算法内点法,从整个输入变量空间中搜索使预测均值或方差最小的点,作为新的训练样本加入训练集中,以修正和优化Kriging模型.

3.1.1　U学习函数

U学习函数最初是由Echard等[26]提出来的,可以用于间接度量Kriging模型预测值符号错误概率的大小,其公式如下:

$$U(x)=\frac{\left|\overline{g}(x)\right|}{\sigma_{\hat{g}}(x)} \tag{15}$$

式中:$\overline{g}(x)$代表点x的预测均值;$\sigma_{\hat{g}}(x)$代表预测标准差.

可靠性分析是一个二分类的过程,可以通过焦元上极大值点和极小值点的正负判断焦元位于安全域还是失效域内. 所以Kriging模型符号预测的正确率对可靠性计算的准确性有很大影响. 虽然借助$\sigma_{\hat{g}}(x)$的大小,可以简单地对符号预测错误的概率进行判断,即$\sigma_{\hat{g}}(x)$的值越大,符号预测错误的概率越大;$\sigma_{\hat{g}}(x)$越小,符号预测错误的概率越小,但是这种方式无法完成第1类和第3类训练样本的判断. 为了保证$\hat{g}(x)$符号预测的正确率,依据$\hat{g}(x)\sim N(\overline{g}(x),\sigma_{\hat{g}}^2(x))$,可以推导出$\hat{g}(x)$符号预测正确率概率的计算公式[31],如式(16):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}\left(U(x)\right)&=\begin{cases}\boldsymbol{\Phi}\left(\dfrac{\overline{g}(x)}{\sigma_{\hat{g}}(x)}\right),\hat{g}(x)>0\\ \boldsymbol{\Phi}\left(\dfrac{-\overline{g}(x)}{\sigma_{\hat{g}}(x)}\right),\hat{g}(x)<0\end{cases}=\\ &\Pr\left\{\operatorname{sign}\left(\hat{g}(x)\right)=\operatorname{sign}\left(\overline{g}(x)\right)\right\}=p\end{aligned} \tag{16}$$

式中:$\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$为标准高斯变量的累积分布函数;$\operatorname{sign}(\cdot)$是符号函数;$\hat{g}(x)$表示$g(x)$的预测值;$\operatorname{sign}\left(\overline{g}(x)\right)$表示$g(x)$的符号预测;$\Pr\left\{\operatorname{sign}\left(\hat{g}(x)\right)=\operatorname{sign}\left(\overline{g}(x)\right)\right\}$表示Kriging模型预测的符号与真实功能函数符号相同的概率. 式(16)成立的根本条件是任意点x处$\hat{g}(x)\sim N(\overline{g}(x),\sigma_{\hat{g}}^2(x))$,且$U(x)=\left|\overline{g}(x)\right|/\sigma_{\hat{g}}(x)$中$\sigma_{\hat{g}}(x)$不等于0.

U学习函数用于判断符号预测正确概率,如图3所示,当预测均值$\overline{g}(x)=2$时,通过改变方差来获得不同的概率密度函数. $U(x)$反映在x点处预测值$\hat{g}(x)$波动范围的大小,$U(x)$越大,$\hat{g}(x)$取值的波动范围就越小. 当预测均值$\overline{g}(x)=2$,$\sigma_{\hat{g}}(x)$为0.5、1和2时,$U(x)$分别为4、2和1,对应的正态分布曲线分别为实线、虚线和点画线. 从分布曲线中可以明显地看出实线的分布最集中,预测值$\hat{g}(x)$的波动范围最小,对应的$U(x)=4$,此时$\overline{g}(x)=2>0$,当预测值$\hat{g}(x)>0$时表示预测值与均值符号相同,根据正态分布的累

积分布函数计算原理,图3中实线与横轴大于0的区域面积代表预测值$\hat{g}(x)>0$的概率,表明Kriging模型$\hat{g}(\boldsymbol{X})$在x点处符号预测正确的概率,此时预测正确的概率值为$p \geqslant \Phi(4)$,即$p \approx 1$. 点画线的分布最为分散,对应的预测值$\hat{g}(x)$的波动范围最大,其$U(x)=1$,同样的原理,点画线对应的符号预测正确的概率为$p \geqslant \Phi(1)$,即$p \geqslant 0.841\,3$,表明该条件下,符号预测错误的概率约为16%. 对于虚线,$\hat{g}(x)$的分布相对点画线比较集中,它对应的$U(x)=2$,其符号预测正确的概率为$p \geqslant \Phi(2)$,即$p \geqslant 0.977\,2$. 在相关文献中,当$\Phi(U(x)) = \Phi(2)$时,可以认为有足够高的概率Kriging模型能够提供正确的符号预测. 当符号预测为负号时,也可以做出以上同样的推断.

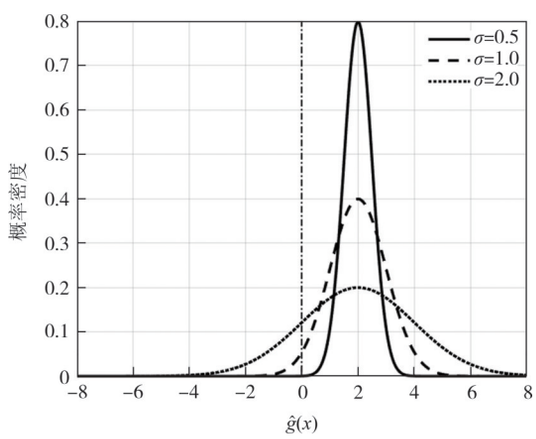


图3 点x处预测均值为2时,不同方差下正态分布图

Fig.3 Normal distribution plots at point x with predicted mean 2 under different variances

3.1.2 停止条件

在Kriging模型更新的循环过程中,停止条件用来控制模型的精度. 借助U学习函数衡量模型的精度,当Kriging模型预测的$U(x)$的最小值满足$U(x) \geqslant 2$时,可以认为Kriging模型已经达到精度要求;当Kriging模型预测的$U(x)$的最小值满足$U(x)<2$时,则继续加入新的训练样本修正Kriging模型.

3.1.3 内点法优化

内点法(interior point method)是一类求解凸优化问题的数值方法,通过在可行域内部进行迭代搜索进而逼近最优解[35-37]. 基本思想是将原始问题转化为一个带约束的优化问题,通过迭代的方式沿着可行域的内部路径逐步逼近最优解. 内点法的应用在于从整个输入变量空间中搜索使$U(x)$最小的点.

$$\begin{aligned}&\min\ U(x)\\&\text{s.t}\ \ [\bar{g}(x),\sigma_{\hat{g}}(x)]=\text{predictors}(x,\hat{g}(\boldsymbol{X}))\\&x=[x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_N]\\&\quad x_i=[x_i^{\mathrm{L}},x_i^{\mathrm{U}}]\end{aligned}\tag{17}$$

式中:$U(x)=\left|\bar{g}(x)\right|/\sigma_{\hat{g}}(x)$;$\hat{g}(\boldsymbol{X})$表示Kriging模型;$x$表示输入变量空间$\boldsymbol{X}$中的任意点;predictors(•)是Kriging模型的预测函数;$\bar{g}(x)$表示在输入变量为x时$\hat{g}(\boldsymbol{X})$的预测均值;$\sigma_{\hat{g}}(x)$表示在输入变量为x时$\hat{g}(\boldsymbol{X})$的预测误差.

本文结合优化方法和主动学习过程,从整个输入变量空间中搜索最佳训练样本,从而更好地提高了Kriging模型的构建效率以及成功率.

首先,根据不确定性确定证据输入变量空间$\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}X_1^{\mathrm{L}},X_1^{\mathrm{U}}\\ \vdots\quad\ \vdots\\ X_i^{\mathrm{L}},X_i^{\mathrm{U}}\\ \vdots\quad\ \vdots\\ X_N^{\mathrm{L}},X_N^{\mathrm{U}}\end{bmatrix}\tag{18}$$

式中:X_i^{L}表示第i个变量的下限值;X_i^{U}表示第i个变量的上限值. 由求解空间$\boldsymbol{X}$的中心点$\boldsymbol{X}^{\mathrm{C}}$:

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{C}}=\left[\frac{X_1^{\mathrm{L}}+X_1^{\mathrm{U}}}{2},\cdots,\frac{X_i^{\mathrm{L}}+X_i^{\mathrm{U}}}{2},\cdots,\frac{X_N^{\mathrm{L}}+X_N^{\mathrm{U}}}{2}\right]\tag{19}$$

然后将中心点$\boldsymbol{X}^{\mathrm{C}}$作为优化的初始点$\boldsymbol{X}_0$,设置评估次数以及容差,调用MATLAB中的fmincon工具箱进行最优化求解,根据式(17)输出$U(x)$的最小值. 如果$U(x)$最小值< 2,该点即为下一个训练样本.

$$x_{\text{next}}=\arg\min_{x\in X}U(x)\tag{20}$$

式中:x_{next}为下一个训练样本,即最佳训练样本. 根据以上主动学习过程,定位到最佳训练样本的位置. 然后根据x_{next}的值进行有限元仿真计算求解得到$g_{\text{next}}(x_{\text{next}})$,并将$(x_{\text{next}},g_{\text{next}}(x_{\text{next}}))$作为新的训练样本加入训练集$(\boldsymbol{X}_{\text{in}},g_{\text{in}})$中,修正Kriging模型,直到满足精度要求.

3.2 区间蒙特卡罗抽样

尽管使用Kriging模型能够大幅地降低计算的成本和难度,但是在面对高维问题的时候,仍然会面临沉重的计算负担. 对于复杂问题,构建的Kriging模型同样会比较复杂,在未知点的预测解速度也会下降,要完成大规模焦元的预测,可能花费几天的时间. 实现大规模焦元极值的计算对计算机的性能要求也会大幅提升. 因此,在计算可信度和似真度的过程中需要借助区间蒙特卡罗模拟(Monte Carlo simulation,

MCS)[30]来减轻计算的压力. MCS的关键在于如何生成与基本可信度分配(BPA)相对应的区间样本. 对具有N个证据变量的输入变量,用区间蒙特卡罗抽取N_{mc}个样本,具体步骤如下:

步骤 1:初始化$i=1, j=1$.

步骤 2:在区间$[0,1]$上生成一个均匀分布的随机数u.

步骤 3:如图4所示,对于第j个变量的第i次模拟,生成区间样本$A_j^{k_j}$,其中$A_j^{k_j}\in[A_j^1,\cdots,A_j^{n_j}]$,如果满足$\sum_{l=1}^{k_j-1}m(A_j^l)<u\leqslant\sum_{l=1}^{k_j}m(A_j^l)$,其中$l=1,2,\cdots,n_j$,且$\sum_{l=1}^{0}m(A_j^l)=0$,便可以将焦元$A_j^{k_j}$记为$A_j^i$. 当抽取的样本数量足够大,在$A_j^i$内生成的样本的概率等于$m(A_j^i)$.

步骤 4:对步骤3进行循环计算,直到满足$j=N, i=N_{mc}$.

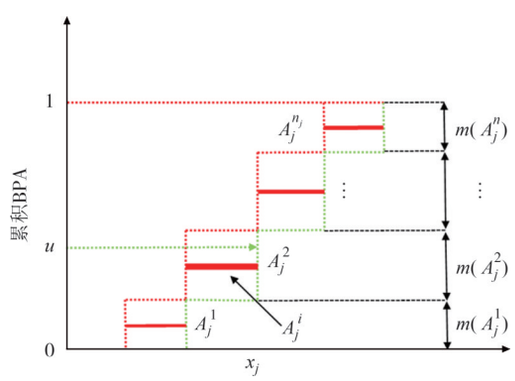


图4　第j个变量的区间蒙特卡罗抽样示意图

Fig.4　The interval Monte Carlo sampling diagram for variable j

3.3　可信度和似真度计算

在计算结构的可信度和似真度之前需要对焦元进行分类. 其中Kriging模型为区间MCS抽取的焦元进行预测,考虑到功能函数的非线性,采用SQP优化算法对焦元的极值进行求解,由式(6)每一个焦元的极值可以表示为$[g_{\min},g_{\max}]\exists[\min_{x\in A^i}\hat{g}(\boldsymbol{X}),\max_{x\in A^i}\hat{g}(\boldsymbol{X})]$,其中$\hat{g}(\boldsymbol{X})$表示Kriging代理模型,$A^i$表示焦元.

根据焦元极值进行分类,可以分为可靠焦元$G=A^i\{A^i:[g_{\min}>0,g_{\max}>0]\}$;边界焦元$B=A^i\{A^i:[g_{\min}<0,g_{\max}>0]\}$和失效焦元$F=A^i\{A^i:[g_{\min}<0,g_{\max}<0]\}$. 完成焦元分类之后,根据式(5),可信度表示为$\mathrm{Bel}(G)=\frac{1}{N_{mc}}\sum_{i=1}^{N_{mc}}G$;似真度表示为$\mathrm{Pl}(G)=\frac{1}{N_{mc}}\sum_{i=1}^{N_{mc}}(G+B)$,其中$N_{mc}$为使用区间蒙特卡洛从输入变量空间中抽取的样本个数.

3.4　算法流程总结

算法的基本流程如图5所示,主要分为3个模块:第1个模块在证据理论框架下对认知不确定性进行处理. 第2个模块Kriging模型的构建过程,其中Kriging模型的更新是难点,本文结合优化方法和主动学习过程,实现最佳训练样本的搜索;第3个模块计算可信度和似真度,主要是进行IMCS抽样和焦元类别的判断,以及可信度和似真度的计算.

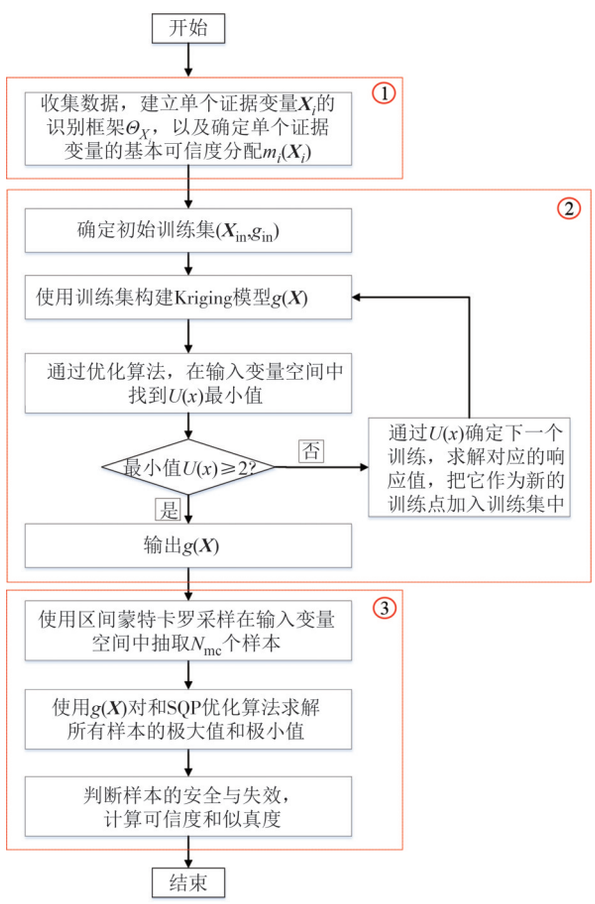


图5　基本算法流程

Fig.5　The basic algorithm flowchart

4　算例验证

4.1　数值算例一

曲柄-滑块机构[38]通常用于工程机械中,其结构如图6所示. 在本次可靠性分析中,考虑曲柄滑块机构的材料强度与最大应力之间的差值. 结构的基本参数如下:杆O_1O_2的长度a,杆O_2O_3的长度b,杆O_2O_3为空心管,内径为d_1,外径为d_2,O_1和O_3之间垂直距离(偏心距)为e,μ为摩擦系数. 在工作状态时

滑块受到一个水平力,载荷为P. 结构的许用应力S = 2.1 GPa,极限状态函数如下:

$$g(a,b,P,e) = S - \frac{4P(b-a)}{\pi(\sqrt{(b-a)^2-e^2}-\mu e)(d_2^2-d_1^2)} \tag{21}$$

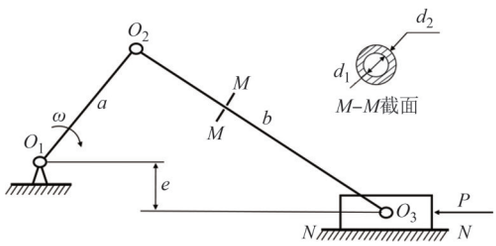


图6 曲柄-滑块机构示意图

Fig.6 Schematic diagram of crank-slider mechanism

曲柄-滑块机构杆O_1O_2和杆O_2O_3长度a和b的BPA如表1所示,承受的载荷P及其偏心距e所对应的BPA如表2所示.

表1 杆长a和b的BPA

Tab.1 Basic probability assignment of rods a and b

焦元	杆长a对应的BPA/mm	焦元	杆长b对应的BPA/mm
[94,96]	0.1	[290,293.33]	0.1
[96,98]	0.2	[293.33,296.67]	0.2
[98,100]	0.2	[296.67,300]	0.2
[100,102]	0.2	[300,303.33]	0.2
[102,104]	0.2	[303.33,306.67]	0.2
[104,106]	0.1	[306.67,310]	0.1

表2 载荷P和偏心距e的BPA

Tab.2 Basic probability assignment of load P and eccentricity e

焦元	载荷P对应的BPA/kN	焦元	偏心距e对应的BPA/mm
[220,230]	0.1	[100,108.33]	0.1
[230,240]	0.2	[108.33,116.67]	0.2
[240,250]	0.2	[116.67,125]	0.2
[250,260]	0.2	[125,133.33]	0.2
[260,270]	0.2	[133.33,141.67]	0.2
[270,280]	0.1	[141.67,150]	0.1

基于变量信息,构建证据输入变量空间$\boldsymbol{X}$. 每一变量的范围为:X_1 = [94, 106],X_2 = [290, 310],X_3 = [220, 280],X_4 = [100, 150];通过LHS从$\boldsymbol{X}$中抽取15个初始训练样本,代入功能函数$g(a,b,P,e)$中求解结构的响应值g_{in},得到初始训练集$(\boldsymbol{X}_{\text{in}}, g_{\text{in}})$;然后通过$(\boldsymbol{X}_{\text{in}}, g_{\text{in}})$构建初始Kriging模型$\hat{g}(\boldsymbol{X})$;接下来利用$\hat{g}(\boldsymbol{X})$提供预测,通过结合内点法和主动学习过程从$\boldsymbol{X}$中搜索最佳训练样本,判断$U(x)$的最小值是否满足停止条件$U(x) \geqslant 2$,若满足停止条件,即可输出Kriging模型,否则继续更新Kriging模型直到所有$U(x)$的最小值满足$U(x) \geqslant 2$.

为了验证本文方法中新增训练样本的修正效果,将其与样本点法进行比较. 在Kriging模型更新过程中,样本点法搜索到的第一个训练样本对应的U函数值为0.001 169,使用本文方法搜索到的第一个训练样本U函数的值为4.94×10^{-5},在同样的初始样本下构建得到的Kriging模型,采用本文方法搜索到的第一个训练样本处,Kriging模型的预测错误率更大,在该位置处加入训练样本对Kriging模型的修正效果更好,表明本文方法搜索到的训练样本比样本点法搜索到的训练样本修改效果更好. 表3为样本点法和本文方法构建Kriging模型使用的初始训练样本和新增训练样本数量. 样本点法和本文方法使用相同的初始训练样本条件下,样本点法新增训练样本为14,一共用了29个训练样本,本文方法新增训练样本数为6,一共用了21个训练样本. 相比之下,本文方法使用训练样本数比样本点法有所减少,表明本文方法Kriging模型构建的效率得到了一定的提升.

表3 构建Kriging模型的初始训练样本数和新增训练样本数

Tab.3 Initial training sample size and additional training sample size for constructing Kriging models 个

计算方法	初始训练样本数	新增训练样本数
样本点法	15	14
本文方法	15	6

为了验证本文方法的计算效率,将其与优化法[39]和样本点法进行对比. 优化法[39]是一种传统的证据可靠性分析方法,通常使用SQP优化算法对每一个焦元求解极值,进而对焦元进行分类,实现可信度和似真度的计算,该方法计算精度较高,通常作为其他方法的参考. 使用SQP进行焦元极值计算时通常需要调用功能函数几十次到几百次,文中用t表示优化法调用功能函数的次数. 在计算可信度和似真度时,采用了IMCS进行抽样,样本规模为1×10^5,优化法调用功能函数次数为$t\times10^5$. 样本点法和本文方法使用Kriging模型代替功能函数,因此功能函数的调用次数为构建Kriging模型使用的样本数. 可以

得到样本点法和本文方法的功能函数调用次数分别为29和21. 通过对比,本文方法对功能函数的调用次数最少,表明本文方法有较高的计算效率.

表4为优化法、样本点法和本文方法的可靠性分析结果及其相对误差. 优化法计算的Bel(G)为0.891 8,Pl(G)为0.997 83,以其为参考,样本点法计算的Bel(G)为0.892 3,相对误差约为0.056%,Pl(G)为0.998 1,相对误差约为0.03%. 本文方法计算的Bel(G)为0.891 85,相对误差约为0.006%,Pl(G)为0.997 83,相对误差为0. 可见本文方法有较高的计算精度. 通过这个算例可以看出本文方法可以用于解决可靠性分析问题.

表4　可靠性分析结果及其相对误差

Tab.4　Reliability analysis results and their relative errors

计算方法	计算结果		相对误差/%	
	Bel(G)	Pl(G)	Bel(G)	Pl(G)
优化法	0.891 80	0.997 83	—	—
样本点法	0.892 30	0.998 10	0.056	0.03
本文方法	0.891 85	0.997 83	0.006	0

4.2　数值算例二

以13个独立证据变量的组合梁结构的可靠性分析问题为例[40],验证本文方法在高维高非线性问题中的适用性. 组合梁的结构如图7所示.

梁的杨氏模量为E_{W},截面的宽度为A、高度为B、长度为L. 梁下面安装的铝板,其杨氏模量为E_{a},截面的宽度为C、高度为D,其长度和梁一样,此外该铝板固定在梁的底面. 在梁的上方施加有外力P_1、P_2、P_3、P_4、P_5和P_6,分别对应梁的L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6位置,方向垂直于梁平面. 许用的拉应力为S. 梁承受

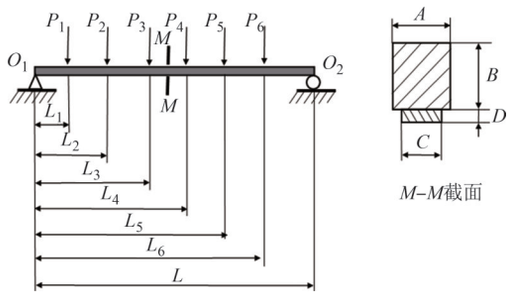


图7　组合梁结构示意图[40]

Fig.7　Diagram of composite beam structure

的最大应力出现在中间的截面M–M中,为了保证组合梁的安全性,梁所承受的最大应力$\sigma_{\max}$必须小于梁的最大许用应力S,组合梁安全使用的功能函数如下:

$$G(X,Y)=S-\sigma_{\max} \tag{22}$$

其中组合梁承受的最大应力公式如下:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\max}=\frac{a_1\Delta}{a_2+a_3}\\
&a_1=\sum_{i=1}^{6}\frac{P_i(L-L_i)}{L}L_3-P_1(L_2-L_1)-P_2(L_3-L_2)\\
&a_2=\frac{1}{12}AB^3+AB(\Delta-0.5B)^2+\frac{1}{12}\frac{E_{\mathrm{a}}}{E_{\mathrm{W}}}CD^3\\
&a_3=\frac{E_{\mathrm{a}}}{E_{\mathrm{W}}}CD(0.5D+B-\Delta)^2\\
&\Delta=\frac{0.5AB^2+\dfrac{E_{\mathrm{a}}}{E_{\mathrm{W}}}CD(B+D)}{AB+\dfrac{E_{\mathrm{a}}}{E_{\mathrm{W}}}CD}
\end{aligned} \tag{23}$$

组合梁结构承受的载荷变量的BPA结构如表5和表6所示,梁的材料强度的BPA结构如表7所示,梁的截面尺寸变量的BPA结构如表8所示,以及铝板截面尺寸的BPA结构如表9所示.

表5　载荷变量P_1,P_2,P_3的BPA

Tab.5　Basic probability assignment of P_1, P_2, P_3

焦元	P_1对应的BPA/kN	焦元	P_2对应的BPA/kN	焦元	P_3对应的BPA/kN
[10.5,12]	0.1	[10.5,12]	0.1	[10.5,12]	0.1
[12,13.5]	0.2	[12,13.5]	0.2	[12,13.5]	0.2
[13.5,15]	0.3	[13.5,15]	0.3	[13.5,15]	0.3
[15,16.5]	0.2	[15,16.5]	0.2	[15,16.5]	0.2
[16.5,18]	0.15	[16.5,18]	0.15	[16.5,18]	0.15
[18,19.5]	0.05	[18,19.5]	0.05	[18,19.5]	0.05

表10样本点法和本文方法构建Kriging模型时的初始训练样本数和新增训练样本数. 使用相同的初始训练点得到初始Kriging模型,样本点法没有完成Kriging模型的更新,这是由于在更新过程中,样本点法重复搜索到同一个训练样本,导致Kriging模型的更新过程无法继续进行. 本文方法的初始训练样

表6 载荷变量P_4, P_5, P_6的BPA

Tab.6 Basic probability assignment of P_4, P_5, P_6

焦元	P_4对应的BPA/kN	焦元	P_5对应的BPA/kN	焦元	P_6对应的BPA/kN
[10.5,12]	0.10	[10.5,12]	0.10	[10.5,12]	0.10
[12,13.5]	0.20	[12,13.5]	0.20	[12,13.5]	0.20
[13.5,15]	0.30	[13.5,15]	0.30	[13.5,15]	0.30
[15,16.5]	0.20	[15,16.5]	0.20	[15,16.5]	0.20
[16.5,18]	0.15	[16.5,18]	0.15	[16.5,18]	0.15
[18,19.5]	0.05	[18,19.5]	0.05	[18,19.5]	0.05

表7 组合梁结构材料强度的BPA

Tab.7 Basic probability assignment of material strength

焦元	E_a对应的BPA/GPa	焦元	E_w对应的BPA/GPa	焦元	S对应的BPA/MPa
[49,56]	0.022 8	[6.125,7]	0.10	[17.15,19.6]	0.10
[56,63]	0.135 9	[7,7.875]	0.20	[19.6,22.05]	0.15
[63,70]	0.341 3	[7.875,8.75]	0.30	[22.05,24.5]	0.35
[70,77]	0.341 3	[8.75,9.625]	0.20	[24.5,26.95]	0.20
[77,84]	0.135 9	[9.625,10.5]	0.15	[26.95,29.45]	0.15
[84,91]	0.022 8	[10.5,11.375]	0.05	[29.45,31.9]	0.05

表8 梁截面尺寸的BPA

Tab.8 Basic probability assignment of beam cross-section dimensions

焦元	截面A对应的BPA/mm	焦元	截面B对应的BPA/mm
[99.7,99.8]	0.05	[199.7,199.8]	0.10
[99.8,99.9]	0.15	[199.8,199.9]	0.20
[99.9,100]	0.30	[199.9,200]	0.30
[100,100.1]	0.30	[200,200.1]	0.20
[100.1,100.2]	0.15	[200.1,200.2]	0.15
[100.2,100.3]	0.05	[200.2,200.3]	0.05

表9 铝板截面尺寸的BPA

Tab.9 Basic probability assignment of aluminum sheet cross-section dimensions

焦元	截面C对应的BPA/mm	焦元	截面D对应的BPA/mm
[79.7,79.8]	0.10	[19.7,19.8]	0.05
[79.8,79.9]	0.20	[19.8,19.9]	0.15
[79.9,80]	0.30	[19.9,20]	0.30
[80,80.1]	0.20	[20,20.1]	0.30
[80.1,80.2]	0.15	[20.1,20.2]	0.15
[80.2,80.3]	0.05	[20.2,20.3]	0.05

本数为105,新增训练样本数为83,一共使用188个训练样本,对应的调用功能函数188次.表明在高维问题中,本文方法能够成功构建Kriging模型并且有较高的计算效率.

表11为优化法、样本点法和本文方法的计算结果.样本点法因为没有成功构建Kriging模型,所以没有得到可靠性分析结果.优化法计算的Bel(G)为0.812 83,Pl(G)为0.996 11.本文方法计算的Bel(G)为0.817 20,相对误差约为0.538%,Pl(G)为0.996 11,相对误差为0,可见本文方法有较高的计算精度.该算例表明本文方法可以用于高维可靠性分析问题的求解.

表10 构建Kriging模型的初始训练样本和新增训练样本数

Tab.10 Initial training sample size and additional training sample size for constructing Kriging models 个

计算方法	初始训练样本数	新增训练样本数
样本点法	105	—
本文方法	105	83

表11 可靠性分析结果及其相对误差

Tab.11 Reliability analysis results and their relative errors

计算方法	计算结果		相对误差/%	
	Bel(G)	Pl(G)	Bel(G)	Pl(G)
优化法	0.812 83	0.996 11	—	—
样本点法	—	—	—	—
本文方法	0.817 20	0.996 11	0.538	0

4.3 车辆正面碰撞可靠性分析

将本文方法应用到车辆正面碰撞的可靠性分析问题中,测试其在实际工程问题中的计算效果.在汽车事故中,很大的比例是由汽车正面碰撞[41]造成的,所以对汽车正面碰撞的安全性分析对保护人的生命

健康安全有很大的意义.据分析,车辆正面碰撞时危害主要来自车身的加速度.图 8 为车辆正面碰撞示意图[41],通过车辆的防撞梁、前轨、前轨罩和加强板结构实现吸收碰撞能量的功能,其中防撞梁的厚度为t_1,前轨的厚度为t_2,前轨罩的厚度为t_3,加强板的厚度为t_4及材料强度为E和密度为ρ,它们均被看作是证据变量而且两两之间是相互独立的,防撞梁的结构尺寸、材料强度和密度的焦元及 BPA 如表 12 和表 13 所示.考虑加速度的影响,建立了功能函数如下:

$$g_a = a_{\max} - a(t_1, t_2, t_3, t_4, E, \rho) \tag{24}$$

为了提高计算的效率,使用二次响应面法和拉丁超立方设计构建了加速度的响应面$a(t_1, t_2, t_3, t_4, E, \rho)$:

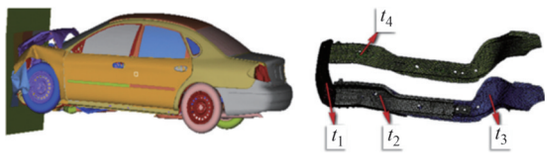


图 8　车辆正面碰撞示意图

Fig.8　Diagram of frontal vehicle collision

$$\begin{aligned}a(t_1, t_2, t_3, t_4, E, \rho) = {} & \\ & 346.886\,2 - 5.091\,3t_1 + 3.562\,7t_2 - 6.957\,8t_3 + \\ & 4.075\,8t_4 - 0.222E + 0.852\,1\rho - 10.720\,3t_1t_2 + \\ & 6.307\,4t_1t_3 - 0.874\,2t_1t_4 + 5.153t_1E + 0.593\,4t_1\rho + \\ & 4.388\,2t_2t_3 + 4.055\,6t_2t_4 - 5.174\,5t_2E + 9.576\,3t_2\rho + \\ & 7.606\,3t_3t_4 + 3.273\,6t_3E - 3.576\,6t_3\rho - 1.137\,9t_4E + \\ & 12.953\,9t_4\rho - 5.487\,6E\rho + 8.725\,8t_1^2 + 6.445\,2t_2^2 - \\ & 7.041\,7t_3^2 + 10.190\,1t_4^2 + 16.009\,1E^2 - 4.055\,7\rho^2\end{aligned} \tag{25}$$

表 12　防撞梁尺寸的 BPA

Tab.12　Basic probability assignment of bumper beam dimensions

焦元	t_1对应的 BPA/mm	焦元	t_2对应的 BPA/mm	焦元	t_3对应的 BPA/mm
[1.10,1.15]	0.202	[1.6,1.7]	0.061	[1.6,1.7]	0.061
[1.15,1.20]	0.486	[1.7,1.8]	0.072	[1.7,1.8]	0.072
[1.20,1.25]	0.100	[1.8,1.9]	0.367	[1.8,1.9]	0.367
[1.25,1.30]	0.080	[1.9,2.0]	0.367	[1.9,2.0]	0.367
[1.30,1.35]	0.070	[2.0,2.1]	0.072	[2.0,2.1]	0.072
[1.35,1.40]	0.070	[2.1,2.2]	0.061	[2.1,2.2]	0.061

表 13　防撞梁尺寸及其材料强度和密度的 BPA

Tab.13　Basic probability assignment of bumper beam dimensions、material strength and density

焦元	t_4对应的 BPA/mm	焦元	E对应的 BPA/($\times10^5$ MPa)	焦元	ρ对应的 BPA/($\times10^6$ kg·mm^{-3})
[1.85,2.0]	0.034	[1.85,1.90]	0.10	[7.47,7.56]	0.1
[2.0,2.15]	0.291	[1.90,1.95]	0.15	[7.56,7.65]	0.1
[2.15,2.25]	0.350	[1.95,2.00]	0.35	[7.65,7.85]	0.3
[2.25,2.40]	0.291	[2.00,2.05]	0.15	[7.85,8.05]	0.3
[2.40,2.50]	0.017	[2.05,2.10]	0.15	[8.05,8.15]	0.1
[2.50,2.55]	0.017	[2.10,2.15]	0.10	[815,8.25]	0.1

表 14 为样本点法和本文方法构建 Kriging 模型时的初始训练样本数和新增训练样本数.在相同的初始训练样本下,样本点法的新增训练样本数为 153,一共使用 181 个训练样本,即调用功能函数 181 次;本文方法新增训练样本数为 30,一共使用 58 个训练样本,即调用功能函数 58 次,可见本文方法相比于样本点法计算效率有一定的提升.

表 14　构建 Kriging 模型的初始训练样本数和新增训练样本数

Tab.14　Initial training sample size and additional training sample size for constructing Kriging models　个

计算方法	初始训练样本数	新增训练样本数
样本点法	28	153
本文方法	28	30

表 15 为使用优化法、样本点法和本文方法的计算结果.优化法计算得到的 Bel(G)为 0.922 29,Pl(G)为 0.996 78.样本点法计算得到的 Bel(G)为 0.961 11,相对误差约为 4.209%,Pl(G)为 0.961 11,相对误差约为 3.579%,相对误差较大,计算结果失效.本文方法计算得到的 Bel(G)为 0.961 27,相对误差约为 0.067%,Pl(G)为 0.996 81,相对误差约为 0.003%,可见本文方法有较高的计算精度.本文方法对车辆正

面碰撞的可靠性分析问题的成功求解,表明本文方法具有一定的工程价值.

表 15 可靠性计算结果及相对误差

Tab.15 Reliability analysis results and their relative errors

计算方法	计算结果		相对误差/%	
	Bel(G)	Pl(G)	Bel(G)	Pl(G)
优化法	0.922 29	0.996 78	—	—
样本点法	0.961 11	0.961 11	4.209	3.579
本文方法	0.921 67	0.996 81	0.067	0.003

5 结 论

本文提出了一种基于证据理论的主动学习可靠性分析方法,该方法将优化方法和主动学习过程相结合,从整个输入变量空间中搜索训练样本,确保每一次搜索得到的训练样本为最佳训练样本,提高了Kriging模型的构建效率和成功率.并通过数值算例验证了该方法在解决可靠性分析问题的有效性,最后将该方法应用到车辆正面碰撞的可靠性分析问题中,成功完成了可靠性分析计算.可见,本文方法在解决可靠性分析问题时有较高计算效率和计算精度.在未来,希望本文方法能考虑变量之间的相关性,解决更多的实际工程问题,此外将其拓展到混合不确定性的可靠性分析问题中.

参考文献

[1] FERSON S, GINZBURG L R. Different methods are needed to propagate ignorance and variability[J]. Reliability Engineering & System Safety, 1996, 54(2/3): 133-144.

[2] HELTON J C. Uncertainty and sensitivity analysis in the presence of stochastic and subjective uncertainty[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 1997, 57(1/2/3/4): 3-76.

[3] DEMPSTER A P, LAIRD N M, RUBIN D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology, 1977, 39(1): 1-22.

[4] JIANG C, LI W X, HAN X, et al. Structural reliability analysis based on random distributions with interval parameters[J]. Computers & Structures, 2011, 89(23/24): 2292-2302.

[5] MÖLLER B, GRAF W, BEER M. Fuzzy structural analysis using α-level optimization[J]. Computational Mechanics, 2000, 26(6): 547-565.

[6] ZADEH L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 100: 9-34.

[7] DEMPSTER A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(2): 325-339.

[8] 张哲. 基于证据理论的结构可靠性分析方法[D]. 长沙: 湖南大学, 2016.
ZHANG Z. Structural reliability analysis method based on evidence theory [D]. Changsha: Hunan University, 2016. (in Chinese)

[9] YIN S W, YU D J, YIN H, et al. A new evidence-theory-based method for response analysis of acoustic system with epistemic uncertainty by using Jacobi expansion[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 322: 419-440.

[10] 刘鑫,龚敏,周振华,等. 基于证据理论的机械结构高效可靠性分析方法[J]. 中国机械工程, 2020, 31(17): 2031-2037.
LIU X, GONG M, ZHOU Z H, et al. An efficient mechanical structure reliability analysis method based on evidence theory[J]. China Mechanical Engineering, 2020, 31(17): 2031-2037. (in Chinese)

[11] DONG W M, SHAH H C. Vertex method for computing functions of fuzzy variables[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 24(1): 65-78.

[12] GAO R G, YIN S W, XIONG F. Response analysis and reliability-based design optimization of structural-acoustic system under evidence theory [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2019, 59(3): 959-975.

[13] BAE H R, GRANDHI R V, CANFIELD R A. An approximation approach for uncertainty quantification using evidence theory[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 86(3): 215-225.

[14] ZHANG Z, JIANG C, HAN X, et al. A response surface approach for structural reliability analysis using evidence theory [J]. Advances in Engineering Software, 2014, 69: 37-45.

[15] ZHANG Z, RUAN X X, DUAN M F, et al. An efficient epistemic uncertainty analysis method using evidence theory[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 339: 443-466.

[16] MOURELATOS Z P, ZHOU J. A design optimization method using evidence theory[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(4): 901-908.

[17] 姜潮, 张哲, 韩旭, 等. 一种基于证据理论的结构可靠性分析方法[J]. 力学学报, 2013, 45(1): 103-115.
JIANG C, ZHANG Z, HAN X, et al. An evidence-theory-based reliability analysis method for uncertain structures [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 45(1): 103-115. (in Chinese)

[18] XIAO M, XIONG H H, GAO L, et al. An efficient method for structural reliability analysis using evidence theory [C]//2014 IEEE 17th International Conference on Computational Science and Engineering. December 19-21, 2014, Chengdu, China. IEEE, 2014: 144-149.

[19] ZHANG Z, JIANG C, WANG G G, et al. First and second order approximate reliability analysis methods using evidence theory[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2015, 137: 40-49.

[20] BAE H R, GRANDHI R V, CANFIELD R A. Epistemic uncertainty quantification techniques including evidence theory for large-scale structures[J]. Computers & Structures, 2004, 82(13/14): 1101-1112.

[21] ZHANG Z, JIANG C, WANG G G, et al. An efficient reliability analysis method for structures with epistemic uncertainty using evidence theory[C]//International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. American Society of Mechanical Engineers, 2014, 46322: V02BT03A055.

[22] 曹亮,龚曙光,陈国强,等. 基于支持向量机和证据理论的复杂系统可靠性分析方法[J]. 机械设计,2024,41(5):131-137.
CAO L, GONG S G, CHEN G Q, et al. Method of reliability analysis on complex systems based on support vector machine and evidence theory[J]. Journal of Machine Design, 2024, 41(5): 131-137. (in Chinese)

[23] YIN S W, YU D J, LUO Z, et al. An arbitrary polynomial chaos expansion approach for response analysis of acoustic systems with epistemic uncertainty [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 332: 280-302.

[24] JONES D R, SCHONLAU M, WELCH W J. Efficient global optimization of expensive black-box functions [J]. Journal of Global Optimization, 1998, 13(4): 455-492.

[25] KAYMAZ I. Application of Kriging method to structural reliability problems[J]. Structural Safety, 2005, 27(2): 133-151.

[26] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation[J]. Structural Safety, 2011, 33(2): 145-154.

[27] LV Z Y, LU Z Z, WANG P. A new learning function for Kriging and its applications to solve reliability problems in engineering [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2015, 70(5): 1182-1197.

[28] YANG X F, LIU Y S, GAO Y. Unified reliability analysis by active learning Kriging model combining with random-set based Monte Carlo simulation method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2016, 108(11): 1343-1361.

[29] ZHANG D Q, LIANG Y F, CAO L X, et al. Evidence-theory-based reliability analysis through Kriging surrogate model [J]. Journal of Mechanical Design, 2022, 144(3): 031701.

[30] YANG X F, LIU Z Q, CHENG X. An enhanced active learning Kriging model for evidence theory-based reliability analysis[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 6 4(4): 2165-2181.

[31] 陈泽权. 基于Kriging模型的结构可靠性及全局灵敏度自适应分析方法研究 [D]. 长春; 吉林大学, 2023.
CHEN Z Q. Research on Adaptive analysis method for structural reliability and global sensitivity based on kriging model [D]. Changchun: Jilin University, 2023. (in Chinese)

[32] 韦新鹏, 姚中洋, 宝文礼, 等. 一种基于主动学习克里金模型的证据理论可靠性分析方法[J]. 机械工程学报,2024,60(2): 356-368.
WEI X P, YAO Z Y, BAO W L, et al. Evidence-theory-based reliability analysis method using active-learning Kriging model [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(2): 356-368. (in Chinese)

[33] ZHANG Z, JIANG C. Evidence-theory-based structural reliability analysis with epistemic uncertainty: a review [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 63(6): 2935-2953.

[34] 于俊涛, 邓卫, 王巨, 等. 基于近似移动矢量的证据理论可靠性设计优化方法 [J]. 湖南大学学报(自然科学版), 48(8): 59-67
YU J T, DENG W, WANG J, et al. An evidence-theory-based design optimization method using approximate shifting vector. [J] Journal of Hunan University (Natural Sciences), 48(8): 59-67. (in Chinese)

[35] 高峰,张连生. 线性约束凸规划内点法及其修正算法[J]. 运筹学学报,1998,2(1):79-94.
GAO F, ZHANG L S. Interior point methods for convex programming with linear constraint and their modified algorithms [J]. Operation Research Transactions, 1998, 2(1): 79-94. (in Chinese)

[36] EL-BAKRY A S, TAPIA R A, TSUCHIYA T, et al. On the formulation and theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1996, 89(3): 507-541.

[37] YAMASHITA H. A globally convergent primal-dual interior point method for constrained optimization[J]. Optimization Methods and Software, 1998, 10(2): 443-469.

[38] GUO J, DU X P. Sensitivity analysis with mixture of epistemic and aleatory uncertainties [J]. AIAA Journal, 2007, 45(9): 2337-2349.

[39] ROBINSON J A. Probability and statistics for engineers and scientists[J]. Technometrics, 1990, 32(3): 348-349.

[40] HUANG B Q, DU X P. Probabilistic uncertainty analysis by mean-value first order Saddlepoint Approximation [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2008, 93(2): 325-336.

[41] JIANG C, ZHANG W, WANG B, et al. Structural reliability analysis using a copula-function-based evidence theory model [J]. Computers & Structures, 2014, 143: 19-31