研究论文|Research Article
数理基础科学|Mathematics and Physics

引用格式:高瑞敏, 姚朝李. 集值 sub-topical 映射的抽象凸理论 [J]. 海南大学学报(自然科学版中英文), 2026, 44(4): 430−439.

Citation: Gao Ruimin, Yao Chaoli. Abstract convex theory for set-valued sub-topical mappings[J]. Natural Science of Hainan University, 2026, 44(4): 430−439.

Open Access

集值 sub-topical 映射的抽象凸理论

高瑞敏, 姚朝李 ✉
(海南大学 数学与统计学院, 海南 海口 570228)

摘　要: sub-topical 函数作为一类重要的抽象凸函数, 在优化理论等领域具有较大的研究价值。针对抽象凸分析中标量 sub-topical 函数无法直接处理具有序结构的集值优化的问题, 本文将 sub-topical 函数的相关概念从标量情形拓展至集值情形, 以处理更广泛的优化问题。借助向量空间中的弱上确界概念, 首先构造了一类具有特定性质的集值基本映射作为承托元素, 然后引入集值 sub-topical 映射的承托集, 并在此基础上建立了其相对于该基本映射族的上包络刻画, 最后为集值 sub-topical 映射构建了相应的抽象凸理论, 为后续在集值优化等领域的应用奠定了基础。

关键词: 集值 sub-topical 映射; 抽象凸分析; 偏序上确界; 集值承托
中图分类号: O224　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1004-1729(2026)04-0430-10
DOI: 10.65658/j.hndk.2026011902　　CSTR: 32403.14.hndk.2026011902

Abstract convex theory for set-valued sub-topical mappings

Gao Ruimin, Yao Chaoli ✉
(School of Mathematics and Statistics, Hainan University, Haikou 570228, China)

Abstract: Sub-topical functions constitute a significant class of abstract convex functions and play a pivotal role in optimization theory. However, the scalar framework of sub-topical functions faces limitations when addressing set-valued optimization problems equipped with order structures. To bridge this gap, this paper generalizes the concept of sub-topicality from scalar-valued mappings to set-valued mappings. By leveraging the notion of weak supremum in vector spaces, we first construct a class of set-valued elementary mappings with specific algebraic properties to serve as supporting elements. Subsequently, we introduce the support set for these set-valued sub-topical mappings and establish their upper envelope representation with respect to this family of elementary mappings. Finally, we develop a comprehensive abstract convexity theory for set-valued sub-topical mappings. This framework lays a solid theoretical foundation for future research in set-valued optimization and related fields.

Keywords: set-valued sub-topical mapping; abstract convex analysis; partially ordered supremum; set-valued support

Received: 2026−01−19; **Revised:** 2026−02−20; **Accepted:** 2026−02−21.
✉ **Corresponding author(s):** Yao Chaoli, E-mail: clyao@hainanu.edu.cn.

0 引 言

凸分析作为解决优化问题的核心数学工具,在处理具有凸性结构的问题时表现出显著优势,其理论基础与应用已在文献 [1−2] 中得到系统阐述。但面对非凸情形,经典凸分析的方法往往无法直接应用。为此,学者们开始转向对广义凸性的研究,抽象凸便是其中一种,相关研究可见参考文献 [3−5]。抽象凸性是在全局意义上对经典凸性的一种推广,能使一系列优化问题在更宽泛的条件下得到解决。在经典凸分析中,任意下半连续凸函数均可表示为所有在其下方的连续仿射函数族的上包络。文献 [6] 指出,在抽象凸框架下,连续仿射函数族可被替换为一类具有特定性质的函数族,若一个函数可表示为该族函数的上包络,则称其为抽象凸函数。sub-topical 函数是经典的抽象凸函数之一,其概念最初由 Gunawardena 等[7] 提出;在此基础上,Rubinov 等[8] 借助一类 min-type 函数,将 sub-topical 函数与向下集联系起来;Bakhtiari 等[9] 从下水平集、上图和极函数的角度分别给出了 sub-topical 函数的不同刻画。此外,Doagooei 等[10] 和 Kermani 等[11] 进一步研究了 sub-topical 函数的承托集、极化集和次微分等概念,并基于 sub-topical 函数,给出了针对 plus-radiant 集和 plus-co-radiant 集的若干分离定理;Daryaei 等[12] 提出了一个专门用于在单纯形上寻找 sub-topical 函数全局最小化的算法,将 sub-topical 函数的抽象凸性应用到了具体的数值优化算法设计中。

以往关于 sub-topical 函数的研究主要集中于标量的情况,但在许多实际应用中,所研究的问题往往需要用集值映射来刻画。如在向量优化中,目标函数是向量值,因此最优解通常定义为 Pareto 意义下的最优解。最优解集通常不是一个单点,而是一个集合,因此从目标函数到 Pareto 解集的映射为集值映射。Bao 等[13] 研究了参数向量优化问题中边缘映射的二阶集值方向导数,其核心概念边缘映射即为一种集值映射,展示了集值映射在灵敏度分析中的高阶应用。在抽象凸框架下,可以定义集值映射关于某个函数族的凸性,这为分析最优解集的结构和稳定性提供了新工具。Yao 等[14−15] 分别引入了一种集值与向量值 topical 映射,通过对集值和向量值 topical 映射的承托函数的相应推广和研究,建立了集值与向量值 topical 映射的上包络结果,并进一步在抽象凸框架下,引入共轭函数,次微分等相关概念,对其关系进行了讨论。Yao 等[16] 将集值 topical 映射的抽象凸性,应用于 DC 型集值优化问题,获得最优性条件与对偶结果。在上述研究的启发下,本文首先定义了集值 sub-topical 映射,并在此基础上研究其抽象凸性,通过定义一类集值映射作为承托元素,给出了集值 sub-topical 映射的承托集,并建立了其上包络刻画。

1 预备知识

假设X,Y均为偏序 Banach 空间,$0_X,0_Y$分别表示相应空间的原点。对于X中的子集A,用$\mathrm{int}A$表示其在X中的拓扑内部,$\mathrm{cl}A$表示其拓扑闭包。假设C,D分别为X,Y上的非空闭凸尖锥(即C,D为闭的凸锥且满足$C\cap -C=\{0_X\},D\cap -D=\{0_Y\}$),并且具有非空拓扑内部。同时,假设$\mathbf{1}_X\in \mathrm{int}C$与$\mathbf{1}_Y\in \mathrm{int}D$为 2 个固定元素。$X,Y$上的偏序关系分别由锥$C,D$来定义,即

$$x_1\preccurlyeq_C x_2 \Longleftrightarrow x_2-x_1\in C(\forall x_1,x_2\in X)$$

$$y_1\preccurlyeq_D y_2 \Longleftrightarrow y_2-y_1\in D(\forall y_1,y_2\in Y)$$

假设X_0为X的一个非平凡线性子空间,将从X_0到Y的全体有界线性算子所组成的集合记为$L(X_0,Y)$,假设$T_0\in L(X_0,Y)$是一个双射,并且满足$T_0(C\cap X_0)=D$。这意味着X_0与Y作为线性空间同构,从而Y中的元素可以与X_0中的元素一一对应。同时,$T_0(C\cap X_0)=D$意味着将X_0中的锥C映为Y中的锥,这保证了序关系的一致性。

下面的例子表明上述假设所定义的算子T_0存在。

例 1 假设$X=\mathbf{R}^2,Y=\mathbf{R}$,取子空间$X_0=\{(t,t):t\in\mathbf{R}\}$。假设 X 和 Y 上的序锥分别为$C=\{(a,b):a\geqslant 0,b\geqslant 0\}$,$D=\{c:c\geqslant 0\}$。算子$T_0:X_0\to Y$定义为$T_0((t,t))=\alpha t$,其中$\alpha>0$为常数。

首先,对任意$(t,t),(s,s)\in X_0$,$\lambda\in\mathbf{R}$,有

$$T_0((t,t)+(s,s))=T_0(t+s,t+s)=\alpha t+\alpha s=T_0(t,t)+T_0(s,s)$$

$$T_0(\lambda(t,t))=T_0((\lambda t,\lambda t))=\alpha(\lambda t)=\lambda(\alpha t)=\lambda T_0((t,t))$$

因此T_0为线性映射。

其次,设$T_0((t,t))=0$,则$\alpha t=0$,即$t=0$,从而$(t,t)=(0,0)$,因此T_0为单射。对任意$y\in\mathbf{R}$,取$t=\dfrac{y}{\alpha}$,则$(t,t)\in X_0$,且$T_0((t,t))=\alpha\cdot\dfrac{y}{\alpha}=y$,所以每个$y$都有原像,因此$T_0$为满射,从而可知$T_0$为双射。

同时,$T_0(\{(t,t):\ t\geqslant 0\})=\{\alpha t:\ t\geqslant 0\}=[0,\infty)$,满足$T_0(C\cap X_0)=D$。

另外,在空间Y中加入2个元素$+\infty$与$-\infty$,得到一个拓展空间,记为$\overline{Y}$,并约定序关系为

$$\forall y\in Y,\quad -\infty\leqslant_D y\leqslant_D+\infty$$

定义1[17] 假设A为X的非空子集,$\bar{x}\in A$。如果$(\{\bar{x}\}+C)\cap A=\{\bar{x}\}$,则称$\bar{x}$为集合$A$的极大元,集合$A$的所有极大元构成的集合记为$\mathrm{Max}A$;如果$(\{\bar{x}\}+\mathrm{int}C)\cap A=\varnothing$,则称$\bar{x}$为集合$A$的弱极大元,集合$A$的所有弱极大元构成的集合记为$\mathrm{WMax}A$。

接下来,为了引入偏序向量空间中上确界的概念,首先介绍集合下闭包的定义。

定义2[17] 对于集合$A\subset\overline{Y}$,A的下闭包$\mathrm{cl_}A$定义为

$$\mathrm{cl_}A:=\begin{cases}Y & +\infty\in A\\ \varnothing & A=\{-\infty\}\\ \mathrm{cl}(A\backslash\{-\infty\}-D) & \text{其他}\end{cases}$$

定义3[17] 对于集合$A\subset\overline{Y}$,A的弱上确界$\sup_{\mathrm{w}}A$定义为

$$\sup_{\mathrm{w}}A:=\begin{cases}\mathrm{WMax}\,(\mathrm{cl_}A) & \mathrm{cl_}A\neq\varnothing,\ \mathrm{cl_}A\neq Y\\ \{-\infty\} & \mathrm{cl_}A=\varnothing\\ \{+\infty\} & \mathrm{cl_}A=Y\end{cases}$$

定义4[18] 假设集合$H\subseteq\{h:\ X\to\mathbf{R}\}$。函数$f:\ X\to\mathbf{R}$被称作抽象凸或$H$-凸,如果

$$f(x)=\sup\{h(x):\ h\in\mathrm{supp}(f,H)\},\quad\forall x\in X$$

其中,$\mathrm{supp}(f,H):=\{h\in H:\ h\leqslant f\}$为$f$的$H$-承托集。

定义5[8] 若$f:\ X\to\overline{\mathbf{R}}$满足:

(1)f在X上单调,即:$\forall x,y\in X,x\leqslant_C y\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$;

(2)f关于$\mathbf{1}_X$具有次加齐次性(plus-sub-homogeneous),即

$$\forall x\in X,\ \lambda\geqslant 0,\ f(x+\lambda\mathbf{1}_X)\leqslant f(x)+\lambda$$

则f被称作是相对于$\mathbf{1}_X$的sub-topical函数。

命题1[17] 对于集合$A,B\subset\overline{Y}$,有:

(1)$\sup_{\mathrm{w}}\sup_{\mathrm{w}}A=\sup_{\mathrm{w}}A$,$\mathrm{cl_cl_}A=\mathrm{cl_}A$,$\sup_{\mathrm{w}}\mathrm{cl_}A=\sup_{\mathrm{w}}A$,$\mathrm{cl_}\sup_{\mathrm{w}}A=\mathrm{cl_}A$;

(2)$\sup_{\mathrm{w}}(\sup_{\mathrm{w}}A+\sup_{\mathrm{w}}B)=\sup_{\mathrm{w}}(A+B)$;

(3)$\alpha\sup_{\mathrm{w}}A=\sup_{\mathrm{w}}(\alpha A)$,$\forall\alpha>0$;

(4)$\sup_{\mathrm{w}}A=\{-\infty\}$当且仅当$A=\varnothing$或者$A=\{-\infty\}$,$\sup_{\mathrm{w}}A=\{+\infty\}$当且仅当$+\infty\in A$或者$A-\mathrm{int}D=Y$。

命题2[17] 对于集合$A,B\subset\overline{Y}$,若$\mathrm{cl_}A\neq\varnothing$,$\mathrm{cl_}A\neq Y$,$\mathrm{cl_}B\neq\varnothing$,$\mathrm{cl_}B\neq Y$,则有:

(1)$\sup_{\mathrm{w}}A=\{y\in Y:\ y\notin A-\mathrm{int}D,y-\mathrm{int}D\subset A-\mathrm{int}D\}$;

(2)$A-\mathrm{int}D=B-\mathrm{int}D$ 当且仅当 $\sup_{\mathrm{w}}A=\sup_{\mathrm{w}}B$;

(3)$A-\mathrm{int}D=\sup_{\mathrm{w}}A-\mathrm{int}D$;

(4)$\mathrm{cl_}A=\sup_{\mathrm{w}}A\bigsqcup(\sup_{\mathrm{w}}A-\mathrm{int}D)$;

(5)$\sup_{\mathrm{w}}A\bigsqcup(\sup_{\mathrm{w}}A+\mathrm{int}D)\bigsqcup(\sup_{\mathrm{w}}A-\mathrm{int}D)=Y$。

命题 3[17] 假设有集合$A_i \subset \overline{Y}, i \in I$, 其中$I$为任意指标集, 则有:

(1)$\mathrm{cl_}\bigcup_{i\in I} A_i = \mathrm{cl_}\bigcup_{i\in I} \mathrm{cl_}A_i$;

(2)$\sup_{\mathrm{w}}\bigcup_{i\in I} A_i = \sup_{\mathrm{w}}\bigcup_{i\in I}\sup_{\mathrm{w}}A_i$。

在Y中满足$\sup_{\mathrm{w}}A = A$的一类集合称为自上确集, 把这一类集合所构成的集族记为$\mathcal{B}$。这一类集合自身就具备某种极大性, 借助这一性质, 在$\mathcal{B}$上定义如下的线性运算与偏序关系:

(1)对任意$A, B \in \mathcal{B}$, $A \oplus_{\mathcal{B}} B := \sup_{\mathrm{w}}(A+B)$;

(2)对任意$A \in \mathcal{B}$以及$\alpha \in \mathbf{R}_+$, $\alpha \odot_{\mathcal{B}} A := \sup_{\mathrm{w}}(\alpha A)$;

(3)对任意$A, B \in \mathcal{B}$, $A \leqslant_{\mathcal{B}} B$当且仅当$\mathrm{cl_}A \subset \mathrm{cl_}B$。

利用集族$\mathcal{B}$, 引入一个映射集

$$\mathcal{H} = \{H: X \rightrightarrows Y, H(x) \in \mathcal{B}, \quad \forall x \in X\}$$

同时, $\mathcal{H}$上的序关系定义为: 对任意$H_1, H_2 \in \mathcal{H}, H_1 \leqslant_{\mathcal{H}} H_2$, 当且仅当对任意$x \in X$, 都有$H_1(x) \leqslant_{\mathcal{B}} H_2(x)$。

2 集值 sub-topical 映射

关于标量 sub-topical 函数的研究已经非常丰富, 但在实际应用中, 尤其是在向量优化问题的讨论过程中, 难免会涉及集值映射。因此, 借助文献 [14] 中研究集值 topical 映射抽象凸性的方法, 将 sub-topical 映射的概念扩展到集值映射上。首先, 给出集值 sub-topical 映射的定义。

定义 6 如果集值映射$F: X \rightrightarrows \overline{Y}$满足:

(1)F在X上单调, 即对任意$x_1, x_2 \in X, x_1 \leqslant_C x_2 \Rightarrow F(x_1) \leqslant_{\mathcal{B}} F(x_2)$;

(2)F关于T_0具有次加齐次性, 即对于任意$x \in X, x_0 \in X_0$, 当$x_0 \geqslant_C 0_X$时有$F(x+x_0) \leqslant_{\mathcal{B}} F(x) + \{T_0(x_0)\}$;

则F被称作是相对于T_0的集值 sub-topical 映射。

给出一个集值 sub-topical 映射的例子。

例 2 令$X = \mathbf{R}^2 = \{(a,b): a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$, $Y = \mathbf{R}$。X和Y上的序锥分别由$C = \{(a,b): a \geqslant 0, b \geqslant 0\}$和$D = \{c: c \geqslant 0\}$定义, 并取$X_0 = \{(0,b): b \in \mathbf{R}\}$。算子$T_0 \in L(X_0, Y)$定义为$T_0(0,b) = \mathrm{m}b$, 其中$\mathrm{m} \geqslant 1$, 则$T_0$为一个双射且满足$T_0(C \cap X_0) = T_0(\{(0,b): b \geqslant 0\}) = D$。集值映射$F: X \rightrightarrows Y$定义为:

$$F(x) = F(a,b) = \{y \in \mathbf{R}: y \leqslant a+b\}, \quad \forall x = (a,b) \in X$$

首先, 对于任意$(a_1,b_1), (a_2,b_2) \in X$, 若$(a_1,b_1) \leqslant_C (a_2,b_2)$, 即有$a_1 \leqslant a_2, b_1 \leqslant b_2$, 则$a_1 + b_1 \leqslant a_2 + b_2$。可以得到:

$$F(a_1,b_1) = \{y \in \mathbf{R}: y \leqslant a_1 + b_1\} \subset \{y \in \mathbf{R}: y \leqslant a_2 + b_2\} = F(a_2,b_2)$$

故有$\mathrm{cl_}F(a_1,b_1) \subset \mathrm{cl_}F(a_2,b_2)$, 即$F(a_1,b_1) \leqslant_{\mathcal{B}} F(a_2,b_2)$。

另外, 任取$x = (a,b) \in X$, $x_0 = (0,b_0) \in X_0$, 其中$b_0 \geqslant 0$。由$\mathrm{m} \geqslant 1$, 可知:

$$F(x+x_0) = F(a, b+b_0) = \{y \in \mathbf{R}: y \leqslant a+b+b_0\} \subset \{y \in \mathbf{R}: y \leqslant a+b+\mathrm{m}b_0\}$$

因此, 对于任意$\bar{y} \in \{y \in \mathbf{R}: y \leqslant a+b+b_0\}$, 都有$\bar{y} \leqslant a+b+\mathrm{m}b_0$, 即$\bar{y} - \mathrm{m}b_0 \leqslant a+b$。故$\bar{y} - \mathrm{m}b_0 \in F(a,b)$, 这意味着$\bar{y} \in F(a,b) + \{\mathrm{m}b_0\}$。由$\bar{y}$的任意性可知:

$$F(x+x_0) \subset F(a,b) + \{\mathrm{m}b_0\} = F(x) + \{T_0(x_0)\}$$

故$\mathrm{cl_}F(x+x_0) \subset \mathrm{cl_}(F(x) + \{T_0(x_0)\})$, 即$F(x+x_0) \leqslant_{\mathcal{B}} F(x) + \{T_0(x_0)\}$。因此$F$是关于$T_0$的 sub-topical 映射。

下面的命题揭示了集值映射F相对于T_0的次加齐次性的等价刻画。

命题 4 集值映射$F: X \rightrightarrows \overline{Y}$相对于$T_0$具有次加齐次性, 当且仅当对于任意$x \in X$, $\widetilde{x} \in X_0$, 若$\widetilde{x} \leqslant_C 0_X$, 则有$F(x+\widetilde{x}) \geqslant_{\mathcal{B}} F(x) + \{T_0(\widetilde{x})\}$。

证明 首先, 假设F相对于T_0具有次加齐次性, 则由定义 6 可知, 对于任意$x \in X, x_0 \in X_0$, 若$x_0 \geqslant_C 0_X$, 令$\bar{x} = x - x_0 \in X$, 则有

$$F(x)+\{T_0(-x_0)\}=F(x)-\{T_0(x_0)\}=F(\overline{x}+x_0)-\{T_0(x_0)\}\leqslant_{\mathcal{B}}F(\overline{x})+\{T_0(x_0)\}-\{T_0(x_0)\}=F(\overline{x})=F(x-x_0)$$

对任意$\widetilde{x}\leqslant_C 0_X$,令$x_0=-\widetilde{x}$,则有$x_0\geqslant_C 0_X$,因此有$F(x+\widetilde{x})\geqslant_{\mathcal{B}}F(x)+\{T_0(\widetilde{x})\}$。

另一方面,若对于任意$x\in X$,$\widetilde{x}\in X_0$,当$\widetilde{x}\leqslant_C 0_X$时,有$F(x+\widetilde{x})\geqslant_{\mathcal{B}}F(x)+\{T_0(\widetilde{x})\}$。对任意$\overline{x}\in X, x_0\in X_0$且$x_0\geqslant_C 0_X$,令$\widetilde{x}=-x_0$,则有$\widetilde{x}\leqslant_C 0_X$。再令$x=\overline{x}+x_0$,那么

$$F(\overline{x})=F(x+\widetilde{x})=F(\overline{x}+x_0+\widetilde{x})\geqslant_{\mathcal{B}}F(\overline{x}+x_0)+\{T_0(\widetilde{x})\}$$

这意味着$F(\overline{x})\geqslant_{\mathcal{B}}F(\overline{x}+x_0)-\{T_0(x_0)\}$,因此有$F(\overline{x}+x_0)\leqslant_{\mathcal{B}}F(\overline{x})+\{T_0(x_0)\}$。

证毕。

3 集值 sub-topical 映射的抽象凸理论

为了建立集值 sub-topical 映射的抽象凸理论,除了借助上文中在偏序向量空间定义的上确界,还要合理地引入集值情形下的承托映射以及承托集。

定义 7 给定$\omega\in X$,$y_0\in Y$,集值映射$\varphi_{(\omega,y_0)}: X\rightrightarrows Y$定义为

$$\varphi_{(\omega,y_0)}(x)=\sup_{\mathrm{w}}\{y\in Y: T_0^{-1}(y)\leqslant_C x+\omega, y\leqslant_D y_0\},\quad \forall x\in X$$

同时,定义集合$W_\psi=\{\varphi_{(\omega,y_0)}: \omega\in X, y_0\in Y\}$。由命题 1,可知$\sup_{\mathrm{w}}\varphi_{(\omega,y_0)}(x)=\varphi_{(\omega,y_0)}(x)$,这表明$\varphi_{(\omega,y_0)}(x)$是自上确集$\mathcal{B}$中的元素。因此,$\varphi_{(\omega,y_0)}(x)$也满足$\mathcal{B}$中所定义的偏序关系。下面给出集值映射$\varphi_{(\omega,y_0)}$所满足的一些性质。

命题 5 假设$x,\omega\in X$,$y_0\in Y$以及$\varphi_{(\omega,y_0)}(x)\in 2^Y$,那么

$$T_0^{-1}(y)\leqslant_C x+\omega,\quad y\leqslant_D y_0,\quad \forall y\in\varphi_{(\omega,y_0)}(x)$$

证明 对于任意$x\in X$,如果$\varphi_{(\omega,y_0)}(x)\in 2^Y$,那么可知$\varphi_{(\omega,y_0)}(x)\neq\{-\infty\}$或$\{+\infty\}$。

令$A=\sup_{\mathrm{w}}\{y\in Y: T_0^{-1}(y)\leqslant_C x+\omega, y\leqslant_D y_0\}$,那么$\varphi_{(\omega,y_0)}(x)=\sup_{\mathrm{w}}A$。对于任意$\overline{y}\in\varphi_{(\omega,y_0)}(x)$,有$\overline{y}\in\sup_{\mathrm{w}}A$。根据命题 2,可以得到$\overline{y}-\mathrm{int}D\subset A-\mathrm{int}D$。

取某个$q_0\in\mathrm{int}D$,对任意$\varepsilon>0$,都有

$$\overline{y}-\varepsilon q_0\in A-\mathrm{int}D$$

因此,存在某个$\widetilde{y}\in A$(即$T_0^{-1}(\widetilde{y})\leqslant_C x+\omega$和$\widetilde{y}\leqslant_D y_0$),使得

$$\overline{y}-\varepsilon q_0\leqslant_D\widetilde{y}$$

再由$T_0(C\cap X_0)=D$,可知

$$T_0^{-1}(\overline{y}-\varepsilon q_0)\leqslant_C T_0^{-1}(\widetilde{y})\leqslant_C x+\omega,\ \overline{y}-\varepsilon q_0\leqslant_D\widetilde{y}\leqslant_D y_0$$

令$\varepsilon\to 0$,有$T_0^{-1}(\overline{y})\leqslant_C x+\omega$,$\overline{y}\leqslant_D y_0$。

证毕。

命题 6 假设$\omega_1,\omega_2\in X$,$y_1,y_2\in Y$,那么$\omega_1\leqslant_C\omega_2$,$y_1\leqslant_D y_2$当且仅当

$$\varphi_{(\omega_1,y_1)}(x)\leqslant_{\mathcal{B}}\varphi_{(\omega_2,y_2)}(x),\ \forall x\in X$$

证明 假设$\omega_1\leqslant_C\omega_2$,$y_1\leqslant_D y_2$,现任取$x\in X$。令集合

$$A_i=\{y\in Y: T_0^{-1}(y)\leqslant_C x+\omega_i,\quad y\leqslant_D y_i\},\quad i=1,2$$

那么有$A_1\subset A_2$。如果$A_1=\varnothing$或$A_2=\varnothing$,此时$\mathrm{cl_}A_1=\varnothing$,并且有$\varphi_{(\omega_1,y_1)}(x)=\sup_{\mathrm{w}}A_1=\{-\infty\}$,结论显然成立。如果$A_1\neq\varnothing$且$A_2\neq\varnothing$,由命题 1,有

$$\mathrm{cl_}\varphi_{(\omega_1,y_1)}(x)=\mathrm{cl_}A_1\subset\mathrm{cl_}A_2=\mathrm{cl_}\varphi_{(\omega_2,y_2)}(x)$$

因此,$\varphi_{(\omega_1,y_1)}(x)\leqslant_{\mathcal{B}}\varphi_{(\omega_2,y_2)}(x)$。

反之, 假设对任意$x \in X$, 有$\varphi_{(\omega_1,y_1)}(x) \leqslant_{\mathcal{B}} \varphi_{(\omega_2,y_2)}(x)$。取$x = -\omega_1 + T_0^{-1}(y_1)$, 则

$$\varphi_{(0_X,y_1)}(T_0^{-1}(y_1)) \leqslant_{\mathcal{B}} \varphi_{(\omega_2,y_2)}(-\omega_1 + T_0^{-1}(y_1))$$

令集合$B_i = \{y \in Y\colon T_0^{-1}(y) \leqslant_C \omega_i - \omega_1 + T_0^{-1}(y_1), y \leqslant_D y_i\}, i = 1,2$。可以得到

$$\sup_{\mathrm{w}} B_1 = \varphi_{(0_X,y_1)}(T_0^{-1}(y_1)), \sup_{\mathrm{w}} B_2 = \varphi_{(\omega_2,y_2)}(\omega_2 - \omega_1 + T_0^{-1}(y_1))$$

由于$+\infty \notin B_1, y_1 \in B_1$, 因此$\mathrm{cl_}B_1 \neq \varnothing$并且$\mathrm{cl_}B_1 \neq Y$。如果也有$\mathrm{cl_}B_2 \neq Y$, 此时

$$\sup_{\mathrm{w}} \mathrm{cl_}\varphi_{(0_X,y_1)}(T_0^{-1}(y_1)) = \sup_{\mathrm{w}} \varphi_{(0_X,y_1)}(T_0^{-1}(y_1)) = \varphi_{(0_X,y_1)}(T_0^{-1}(y_1)) = \sup_{\mathrm{w}} B_1$$

再根据命题 2, 有

$$B_1 - \mathrm{int}D = \mathrm{cl_}\varphi_{(0_X,y_1)}(T_0^{-1}(y_1)) - \mathrm{int}D \subset \mathrm{cl_}\varphi_{(\omega_2,y_2)}(-\omega_1 + T_0^{-1}(y_1)) - \mathrm{int}D = B_2 - \mathrm{int}D$$

如果$\mathrm{cl_}B_2 = Y$, 那么$\sup_{\mathrm{w}} B_2 = \{+\infty\}$, 由命题 1 可知$B_2 - \mathrm{int}D = Y$, 此时仍然有$B_1 - \mathrm{int}D \subset B_2 - \mathrm{int}D$。利用命题 5 中类似方法可以证明$0_X \leqslant_C \omega_2 - \omega_1$, $0_Y \leqslant_D y_2 - y_1$, 即$\omega_1 \leqslant_C \omega_2$, $y_1 \leqslant_D y_2$。

命题 7　任取$\omega \in X, y_0 \in Y$, 对任意$x \in X, x_0 \in X_0$, 若$x_0 \geqslant_C 0_X$, 则有

$$\varphi_{(\omega,y_0)}(x + x_0) \leqslant_{\mathcal{B}} \varphi_{(\omega,y_0)}(x) + \{T_0(x_0)\}$$

证明　任取$x \in X, x_0 \in X_0$且$x_0 \geqslant_C 0_X$, 由定义 7 可知

$$\varphi_{(\omega,y_0)}(x + x_0) = \sup_{\mathrm{w}}\{y \in Y\colon T_0^{-1}(y) \leqslant_C x + x_0 + \omega, y \leqslant_D y_0\} = \sup_{\mathrm{w}}\{y \in Y\colon T_0^{-1}(y) - x_0 \leqslant_C x + \omega, y \leqslant_D y_0\} =$$
$$\sup_{\mathrm{w}}\{y \in Y\colon T_0^{-1}(y - T_0(x_0)) \leqslant_C x + \omega, y - T_0(x_0) \leqslant_D y_0 - T_0(x_0)\}$$

令$y' = y - T_0(x_0)$, 则有

$$\sup_{\mathrm{w}}\{y \in Y\colon T_0^{-1}(y - T_0(x_0)) \leqslant_C x + \omega, y - T_0(x_0) \leqslant_D y_0 - T_0(x_0)\} =$$
$$\sup_{\mathrm{w}}\{y' + T_0(x_0) \in Y\colon T_0^{-1}(y') \leqslant_C x + \omega, y' \leqslant_D y_0 - T_0(x_0)\} =$$
$$\sup_{\mathrm{w}}\{y' \in Y\colon T_0^{-1}(y') \leqslant_C x + \omega, y' \leqslant_D y_0 - T_0(x_0)\} + \{T_0(x_0)\} = \varphi_{(\omega,y_0 - T_0(x_0))}(x) + \{T_0(x_0)\}$$

由于$x_0 \geqslant_C 0_X$, 故$T_0(x_0) \geqslant_D 0_Y$。根据命题 6, 可知$\varphi_{(\omega,y_0 - T_0(x_0))}(x) \leqslant_{\mathcal{B}} \varphi_{(\omega,y_0)}(x)$, 从而$\varphi_{(\omega,y_0)}(x + x_0) \leqslant_{\mathcal{B}} \varphi_{(\omega,y_0)}(x) + \{T_0(x_0)\}$。

证毕。

下面引入集值映射在抽象凸意义下的承托集的概念。

定义 8　给定集值映射$F\colon X \rightrightarrows \overline{Y}$, F的W_ψ-承托集定义为

$$\mathrm{supp}(F, W_\psi) = \{\varphi_{(\omega,y_0)} \in W_\psi\colon \varphi_{(\omega,y_0)}(x) \leqslant_{\mathcal{B}} F(x), \quad \forall x \in X\}$$

通过下列定理证明, 对于具有 sub-topical 性的集值映射, 其承托集有更好的刻画。

定理 1　如果集值映射$F\colon X \rightrightarrows \overline{Y}$是相对于$T_0$的 sub-topical 映射, 则$\varphi_{(\omega,y_0)} \in \mathrm{supp}(F, W_\psi)$当且仅当

$$\{y_0\} - D \subset \mathrm{cl_}F(-\omega + T_0^{-1}(y_0)) \tag{1}$$

证明　假设F是相对于T_0的 sub-topical 映射, $\varphi_{(\omega,y_0)} \in \mathrm{supp}(F, W_\psi)$, 则对任意$x \in X$, 由定义 8 可知$\varphi_{(\omega,y_0)}(x) \leqslant_{\mathcal{B}} F(x)$。特别地, 取$x = -\omega + T_0^{-1}(y_0)$, 则有

$$\varphi_{(\omega,y_0)}(-\omega + T_0^{-1}(y_0)) \leqslant_{\mathcal{B}} F(-\omega + T_0^{-1}(y_0))$$

即

$$\mathrm{cl_}\varphi_{(\omega,y_0)}(-\omega + T_0^{-1}(y_0)) \subset \mathrm{cl_}F(-\omega + T_0^{-1}(y_0)) \tag{2}$$

根据定义 7 可知

$$\varphi_{(\omega,y_0)}(-\omega + T_0^{-1}(y_0)) = \sup_{\mathrm{w}}\{y \in Y\colon T_0^{-1}(y) \leqslant_C T_0^{-1}(y_0), \quad y \leqslant_D y_0\}$$

因此, $y_0 \in \varphi_{(\omega,y_0)}(-\omega + T_0^{-1}(y_0))$。再结合式(2), 可以得到

$$\{y_0\}-D\subset\varphi_{(\omega,y_0)}(-\omega+T_0^{-1}(y_0))-D\subset \mathrm{cl}_\varphi_{(\omega,y_0)}(-\omega+T_0^{-1}(y_0))\subset \mathrm{cl}_F(-\omega+T_0^{-1}(y_0))$$

反之,假设$\omega\in X,y_0\in Y$,并且式(1)成立。任取$x\in X$,根据命题5,对任意$\bar{y}\in\varphi_{(\omega,y_0)}(x)$,有$T_0^{-1}(\bar{y})\leqslant_C x+\omega,\bar{y}\leqslant_D y_0$。由于$F$是相对于$T_0$的sub-topical映射,从而

$$F(-\omega+T_0^{-1}(y_0))+\{\bar{y}-y_0\}=F(-\omega+T_0^{-1}(y_0))+\{T_0(T_0^{-1}(\bar{y}-y_0))\}\leqslant_{\mathcal{B}}F(-\omega+T_0^{-1}(y_0)+T_0^{-1}(\bar{y})-T_0^{-1}(y_0))=F(-\omega+T_0^{-1}(\bar{y}))\leqslant_{\mathcal{B}}F(x)$$

即有$\mathrm{cl}_(F(-\omega+T_0^{-1}(y_0)))+\{\bar{y}-y_0\}\subset \mathrm{cl}_F(x)$。再结合定理1中条件(1),可以推出

$$\{\bar{y}\}-D\subset\{\bar{y}-y_0+y_0\}-D\subset\{\bar{y}-y_0\}+\mathrm{cl}_F(-\omega+T_0^{-1}(y_0))\subset \mathrm{cl}_F(x)$$

由$\bar{y}$的任意性可知$\varphi_{(\omega,y_0)}(x)-D\subset \mathrm{cl}_F(x)$,从而$\mathrm{cl}_\varphi_{(\omega,y_0)}(x)\subset \mathrm{cl}_F(x)$,因此有$\varphi_{(\omega,y_0)}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi)$。

证毕。

通过下面定理证明,若集值映射F是$\mathcal{H}$中的元素,且是相对于T_0的sub-topical映射,则F可以用基本函数$\varphi_{(\omega,y_0)}$的上包络进行刻画,从而可以看作W_ψ-意义下的一类抽象凸函数。

定理2 给定集值映射$F:X\rightrightarrows Y$,若$F\in\mathcal{H}$,则F是相对于T_0的sub-topical映射,当且仅当

$$F(x)=\sup_{\mathrm{w}}\{\cup\varphi_{(\omega,y_0)}(x):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi)\},\forall x\in X \tag{3}$$

证明 首先假设$F\in\mathcal{H}$是相对于T_0的sub-topical映射,任取$\bar{x}\in X,\bar{y}\in F(\bar{x})$,令$\bar{\omega}=-\bar{x}+T_0^{-1}(\bar{y})$,则有$\bar{y}\in\varphi_{(\bar{\omega},\bar{y})}(\bar{x})$。根据命题1可知,$\bar{y}\in F(\bar{x})=\sup_{\mathrm{w}}F(\bar{x})$,因此$\bar{y}\notin F(\bar{x})-\mathrm{int}D$。对任意$\varphi_{(\omega,y_0)}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi)$,由命题2中(3)和(4)可以得到$\bar{y}\notin\varphi_{(\omega,y_0)}(\bar{x})-\mathrm{int}D$。记$A=\{\cup\varphi_{(\omega,y_0)}(\bar{x}):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi)\}$,则有

$$\bar{y}\notin A-\mathrm{int}D \tag{4}$$

同时,由于$\bar{y}\in F(\bar{x})$,故$\{\bar{y}\}-D\subset F(\bar{x})-D\subset \mathrm{cl}_F(\bar{x})=\mathrm{cl}_F(-\bar{\omega}+T_0^{-1}(\bar{y}))$,根据定理1有$\varphi_{(\bar{\omega},\bar{y})}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi)$。因此

$$\{\bar{y}\}-\mathrm{int}D\subset\varphi_{(\bar{\omega},\bar{y})}(\bar{x})-\mathrm{int}D\subset A-\mathrm{int}D$$

结合式(4)以及命题1,可以得到$\bar{y}\in\sup_{\mathrm{w}}A$,再由$\bar{y}$的任意性可知$F(\bar{x})\subset\sup_{\mathrm{w}}A$。另外,对于任意$\tilde{y}\in\sup_{\mathrm{w}}A$,都有$\tilde{y}\notin A-\mathrm{int}D$以及

$$\{\tilde{y}\}-\mathrm{int}D\subset A-\mathrm{int}D \tag{5}$$

由命题1可知$\tilde{y}\notin A-\mathrm{int}D$等价于$\tilde{y}\notin\sup_{\mathrm{w}}A-\mathrm{int}D$。由于$F(\bar{x})\subset\sup_{\mathrm{w}}A$,故$\tilde{y}\notin F(\bar{x})-\mathrm{int}D$。再根据命题3,可得

$$\mathrm{cl}_(\{\cup\varphi_{(\omega,y_0)}(\bar{x}):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi)\})=\mathrm{cl}_(\{\cup\mathrm{cl}_\varphi_{(\omega,y_0)}(\bar{x}):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi)\})\subset\mathrm{cl}_(\{\cup\mathrm{cl}_F(\bar{x})\})=\mathrm{cl}_F(\bar{x})$$

因此结合式(5)及命题2有

$$\{\tilde{y}\}-\mathrm{int}D\subset F(\bar{x})-\mathrm{int}D$$

再次利用命题1及$\tilde{y}$的任意性有$\sup_{\mathrm{w}}A\subset\sup_{\mathrm{w}}F(\bar{x})=F(\bar{x})$。综上所述,可以得到式(3)。

反之,如果对任意$x\in X$有式(3)成立,由命题1可知$F\in\mathcal{H}$。现假设$x_1\leqslant_C x_2$,对任意$\varphi_{(\omega,y_0)}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi)$,由于

$$\varphi_{(\omega,y_0)}(x)=\sup_{\mathrm{w}}\{y\in Y:T_0^{-1}(y)\leqslant_C x+\omega,y\leqslant_D y_0\}=\sup_{\mathrm{w}}\{y\in Y:T_0^{-1}(y)\leqslant_C\omega+x,y\leqslant_D y_0\}=\varphi_{(x,y_0)}(\omega)$$

根据命题6,可知$\varphi_{(\omega,y_0)}(x_1)\leqslant_{\mathcal{B}}\varphi_{(\omega,y_0)}(x_2)$,即$\mathrm{cl}_\varphi_{(\omega,y_0)}(x_1)\subset\mathrm{cl}_\varphi_{(\omega,y_0)}(x_2)$。再根据命题3可知$\mathrm{cl}_F(x_1)\subset\mathrm{cl}_F(x_2)$,也即$F(x_1)\leqslant_{\mathcal{B}}F(x_2)$。现任取$x_0\in X_0$且$x_0\geqslant_C 0_X$,借助命题7和命题3,可以得到

$$\mathrm{cl}_(\cup\varphi_{(\omega,y_0)}(x+x_0):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi))\subset\mathrm{cl}_(\cup\varphi_{(\omega,y_0)}(x):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi))+\{T_0(x_0)\}$$

再由命题1可知

$$\mathrm{cl}_\sup_{\mathrm{w}}\{\cup\varphi_{(\omega,y_0)}(x+x_0):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi)\}\subset\mathrm{cl}_\sup_{\mathrm{w}}\{\cup\varphi_{(\omega,y_0)}(x):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\mathrm{supp}(F,W_\psi)\}+\{T_0(x_0)\}$$

从而有

$$F(x+x_0)=\sup_{\mathrm{w}}\{\cup\varphi_{(\omega,y_0)}(x+x_0):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\operatorname{supp}(F,W_\psi)\}\leqslant_{\mathcal{B}}\sup_{\mathrm{w}}\{\cup\varphi_{(\omega,y_0)}(x):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\operatorname{supp}(F,W_\psi)\}+\{T_0(x_0)\}=F(x)+\{T_0(x_0)\}$$

综上所述, 映射F是相对于T_0的 sub-topical 映射。

证毕。

下面的例子验证了满足定理 2 中条件的集值映射F的上包络刻画。

例 3 假设$X=\mathbf{R}^3$, 其上元素记为$x=(a,b,c)$; $Y=\mathbf{R}^2$, 其上元素记为$y=(y_1,y_2)$。X和Y空间上的序锥分别定义为$C=\{(a,b,c):a\geqslant 0,b\geqslant 0,c\geqslant 0\}$和$D=\{(y_1,y_2):y_1\geqslant 0,y_2\geqslant 0\}$。假设$X$的一个二维子空间$X_0=\{(0,b,c):b,c\in\mathbf{R}\}$, 线性算子$T_0:X_0\to Y$定义为$T_0(0,b,c)=(\mathrm{m}b,\mathrm{n}c)$, 其中$\mathrm{m}\geqslant 1,\mathrm{n}\geqslant 1$。容易得到$T_0$为双射, 且满足$T_0(C\cap X_0)=T_0(\{(0,b,c):b\geqslant 0,c\geqslant 0\})=D$。集值映射$F:X\rightrightarrows Y$定义为

$$F(x)=F(a,b,c)=\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2:y_1=a+b,y_2\leqslant a+c\}\cup\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2:y_1\leqslant a+b,y_2=a+c\},\ \forall x=(a,b,c)\in X$$

首先, 由F的定义可知$F\in\mathcal{H}$。若$x_1=(a_1,b_1,c_1)\leqslant_C x_2=(a_2,b_2,c_2)$, 则$a_1\leqslant a_2,b_1\leqslant b_2,c_1\leqslant c_2$, 从而$a_1+b_1\leqslant a_2+b_2,a_1+c_1\leqslant a_2+c_2$。因此有$F(x_1)\subset F(x_2)-D$, 即有$F(x_1)\leqslant_{\mathcal{B}}F(x_1)$。另外, 取任意$x=(a,b,c)\in X$和$x_0=(0,b_0,c_0)\in X_0(b_0\geqslant 0,c_0\geqslant 0)$, 则

$$F(x+x_0)=\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2:y_1=a+b+b_0,y_2\leqslant a+c+c_0\}\cup\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2:y_1\leqslant a+b+b_0,y_2=a+c+c_0\}$$

$$F(x)+\{T_0(x_0)\}=\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2:y_1=a+b+\mathrm{m}b_0,y_2\leqslant a+b+\mathrm{n}c_0\}\cup\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2:y_1\leqslant a+b+\mathrm{m}b_0,y_2=a+c+\mathrm{n}c_0\}$$

由于$\mathrm{m}\geqslant 1,\mathrm{n}\geqslant 1$, 有$b_0\leqslant\mathrm{m}b_0,c_0\leqslant\mathrm{n}c_0$, 故$F(x+x_0)\subset F(x)+\{T_0(x_0)\}-D$, 即有$F(x+x_0)\leqslant_{\mathcal{B}}F(x)+\{T_0(x_0)\}$。因此, F是相对于T_0的集值 sub-topical 映射。

任取$\overline{x}=(a,b,c)\in X,\overline{y}=(\overline{y}_1,\overline{y}_2)\in F(\overline{x})$, 令$\overline{\omega}=-\overline{x}+T_0^{-1}(\overline{y})$, 则有

$$\begin{aligned}\varphi_{(\overline{\omega},\overline{y})}(\overline{x})&=\sup_{\mathrm{w}}\left\{(y_1,y_2)\in Y:T_0^{-1}(y)\leqslant_C\left(0,\frac{\overline{y}_1}{\mathrm{m}},\frac{\overline{y}_2}{\mathrm{n}}\right),y\leqslant_D y_0\right\}=\\&\sup_{\mathrm{w}}\left\{(y_1,y_2)\in Y:\left(0,\frac{y_1}{\mathrm{m}},\frac{y_2}{\mathrm{n}}\right)\leqslant_C\left(0,\frac{\overline{y}_1}{\mathrm{m}},\frac{\overline{y}_2}{\mathrm{n}}\right),y\leqslant_D y_0\right\}=\\&\sup_{\mathrm{w}}\{(y_1,y_2)\in Y:y_1\leqslant\overline{y}_1,y_2\leqslant\overline{y}_2\}\end{aligned}$$

因此有$\overline{y}\in\varphi_{(\overline{\omega},\overline{y})}(\overline{x})$。此外, $F(\overline{x})=F(a,b,c)=\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2:y_1=a+b,y_2\leqslant a+c\}\cup\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2:y_1\leqslant a+b,y_2=a+c\}$。对任意$y\in\varphi_{(\overline{\omega},\overline{y})}(\overline{x})$, 由$\overline{y}\in F(\overline{x})$可知$y\in F(\overline{x})-D$。再由$y$的任意性可知$\varphi_{(\overline{\omega},\overline{y})}(\overline{x})\subset F(\overline{x})-D$, 因此$\varphi_{(\overline{\omega},\overline{y})}(\overline{x})\leqslant_{\mathcal{B}}F(\overline{x})$, 故$\varphi_{(\overline{\omega},\overline{y})}\in\operatorname{supp}(F,W_\psi)$。

令$A=\{\cup\varphi_{(\omega,y_0)}(\overline{x}):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\operatorname{supp}(F,W_\psi)\}$, 则有

$$\{\overline{y}\}-\operatorname{int}D\subset\varphi_{(\overline{\omega},\overline{y})}(\overline{x})-\operatorname{int}D\subset A-\operatorname{int}D,\ \overline{y}\notin A-\operatorname{int}D$$

因此$\overline{y}\in\sup_{\mathrm{w}}A$。再由$\overline{y}$的任意性可知$F(\overline{x})\subset A=\sup_{\mathrm{w}}A$。

反之, 对任意$x\in X,\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in X,y_0=(y_{0_1},y_{0_2}),\varphi_{(\omega,y_0)}\in\operatorname{supp}(F,W_\psi)$, 都有$\varphi_{(\omega,y_0)}(x)\leqslant_{\mathcal{B}}F(x)$,

$$\begin{aligned}\varphi_{(\omega,y_0)}(x)&=\sup_{\mathrm{w}}\{(y_1,y_2)\in Y:T_0^{-1}(y)\leqslant_C x+\omega,y\leqslant_D y_0\}=\\&\sup_{\mathrm{w}}\{(y_1,y_2)\in Y:y_1\leqslant\mathrm{m}(b+w_2),y_2\leqslant\mathrm{n}(c+w_3),y\leqslant_D y_0\}=\\&\sup_{\mathrm{w}}\{(y_1,y_2)\in Y:y_1\leqslant\min(\mathrm{m}(b+w_2),y_{0_1}),y_2\leqslant\min(\mathrm{n}(c+\omega_3),y_{0_2})\}\end{aligned}$$

由于$\varphi_{(\omega,y_0)}(x)\leqslant_{\mathcal{B}}F(x)$, 因此有$\min(\mathrm{m}(b+w_2),y_{0_1})\leqslant a+b,\min(\mathrm{n}(c+\omega_3),y_{0_2})\leqslant a+c$, 此时集合$A=\sup_{\mathrm{w}}\{(y_1,y_2)\in Y:y_1\leqslant a+b,y_2\leqslant a+c\}$, 所以$\sup_{\mathrm{w}}A=\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2:y_1=a+b,y_2\leqslant a+c\}\cup\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2:y_1\leqslant a+b,y_2=a+c\}$。对于任意$\overline{y}\in\sup_{\mathrm{w}}A$, 都有$\overline{y}\in F(x)$, 因此有$\sup_{\mathrm{w}}A\subset F(x)$。

综上, 有$F(x)=\sup_{\mathrm{w}}\{\cup\varphi_{(\omega,y_0)}(x):\varphi_{(\omega,y_0)}\in\operatorname{supp}(F,W_\psi)\},\forall x\in X$。

4 结 论

本文将抽象凸分析中经典的标量 sub-topical 函数理论,拓展到了集值映射的情形,建立了关于集值 sub-topical 映射的上包络结果,主要结论如下:

(1)借助向量空间中的弱上确界概念,构造了一类具有特定性质的集值基本映射$\varphi_{(\omega,y_0)}$,通过引入该集值基本映射作为承托元素,定义了集值 sub-topical 映射的承托集。同时得到了$\varphi_{(\omega,y_0)}$属于承托集的充要条件,即$\varphi_{(\omega,y_0)}\in \mathrm{supp}(F,W_\psi)$当且仅当$\{y_0\}-D\subset \mathrm{cl}_F(-\omega+T_0^{-1}(y_0))$;

(2)建立了集值 sub-topical 映射相对于一类基本映射族的上包络刻画。即若集值映射F是相对于T_0的 sub-topical 映射,且其像的集合$F(x)$的弱上确界仍等于自身,那么F可以表示为$\varphi_{(\omega,y_0)}$所组成的映射族的上包络,从而说明此类集值映射F是抽象凸映射。

参考文献:

[1] 杨新民, 孟志青. 凸分析基础 [M]. 北京: 科学出版社, 2025: 15−100.

[2] Rockafellar R T. Convex analysis[M]. Princeton: Princeton University Press, 1970: 10−100.

[3] Mohebi H, Eberhard A C. An abstract convex representation of maximal abstract monotone operators[J]. Journal of Convex Analysis, 2011, 18(1): 259−275.

[4] Rubinov A M. Abstract convexity: examples and applications[J]. Optimization, 2000, 47(1/2): 1−33.

[5] Singer I. Abstract convex analysis[M]. New York: Wiley, 1997: 54−170.

[6] Shveidel A P. Further investigation of abstract convexity with respect to the class of general min-type functions[J]. Optimization, 2007, 56(1/2): 129−147.

[7] Gunawardena J, Keane M. On the existence of cycle times for some nonexpansive maps[R]. Bristol: Hewlett-Packard Labs, 1995.

[8] Rubinov A M, Singer I. Topical and sub-topical functions, downward sets and abstract convexity[J]. Optimization, 2001, 50(5/6): 307−351.

[9] Bakhtiari H, Mohebi H. Characterizing sub-topical functions[J]. Wavelets and Linear Algebra, 2019, 4(2): 13−23.

[10] Doagooei A R. Sub-topical functions and plus-co-radiant sets[J]. Optimization, 2016, 65(1): 107−119.

[11] Kermani V M, Doagooei A R. Vector topical functions and farkas type theorems with applications[J]. Optimization Letters, 2015, 9(2): 359−374.

[12] Daryaei M H, Yaghoobi M A. Minimization of sub-topical functions over a simplex[J]. Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization, 2024, 14(1): 200−218.

[13] Bao N X D, Khanh P Q, Tung N M. Second-order set-valued directional derivatives of the marginal map in parametric vector optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2025, 204(3): 45.

[14] Yao C L, Li S J. Conjugate duality for constrained vector optimization in abstract convex frame[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2019, 40(11): 1242−1267.

[15] Yao C L, Li S J. Vector topical function, abstract convexity and image space analysis[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2018, 177(3): 717−742.

[16] Yao C L, Tang C L, Chen J W. Abstract convexity of set-valued topical functions with application in DC-type optimization[J]. Applicable Analysis, 2021, 100(16): 3478−3491.

[17] Khan A A, Tammer C, Zălinescu C. Set-valued optimization: an introduction with application[M]. Berlin: Springer, 2015: 158−260.

[18] Rubinov A. Abstract convexity and global optimization[M]. Boston: Kluwer, 2000: 3−107.

作者贡献声明

高瑞敏负责论文的构思与设计、论文的撰写、内容修订与语言润色，并承担文中定理和命题的理论证明及结果刻画。姚朝李提供学术指导，对文中定义的合理性和定理证明的严谨性进行审查，对论文内容提出关键修改意见和补充实例建议，并进行逻辑调整和经费支持。

利益冲突声明

本人及所有合著者郑重声明，在本文设计、实施及论文撰写过程中，不存在已知的可能影响本论文所报告工作的竞争性经济利益或个人关系。

AI 使用声明

本文未使用人工智能（AI）协助撰写。

伦理声明

不适用：本研究未涉及人类或动物的任何实验。

电子补充材料

补充材料可在本文的在线版本中获取 https://doi.org/10.65658/j.hndk.2026011902。

数据可用性

不适用。

致谢/Acknowledgements

本文得到海南省自然科学基金项目（124RC441、124QN176）支持。

This work was supported by the Hainan Provincial Natural Science Foundation of China (124RC441, 124QN176).

作者简介

高瑞敏（2001—），女，河南鹤壁人，海南大学数学专业 2023 级硕士研究生。E-mail：rmgao@hainanu.edu.cn。

姚朝李（1990—），女，四川泸州人，博士，海南大学数学与统计学院副教授，研究方向：最优化理论与方法。已发表 SCI 论文 9 篇。E-mail：clyao@hainanu.edu.cn。

（责任编辑：高　喆，英文校对：马　力）

This is an open access article under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0, https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

© The Author(s) 2026. Published by Journal Editorial Department of Hainan University.