文章编号:1000-1638(2026)05-0501-10 DOI:10.13484/j.nmgdxxbzk.20260506

二元关系下的严格几乎ϕ-压缩映射不动点定理*

吴佼佼[1],李淑方[1],张新艳[1],贺 飞[2]
(1.内蒙古财经大学统计与数学学院,呼和浩特 010070;2.内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010030)

摘要:在Kaleva-Seikkala型模糊b-距离空间中给出了二元关系下的严格几乎ϕ-压缩映射的不动点定理。通过引入一个新的引理,构建了一种不同于通常距离空间中的证明方法。研究结果改进并拓展了现有文献中的不动点定理。此外,作为实际应用,非线性分数阶微分方程解的存在唯一性得到了有效验证,在本研究的理论探索与实际应用之间架起了桥梁。

关键词:Kaleva-Seikkala型模糊b-距离;二元关系;严格几乎ϕ-压缩;不动点定理
中图分类号:O177.91 **文献标志码**:A

1984年,Kaleva等[1]通过将两点之间的距离定义为非负模糊实数,并引入一种类似于通常三角不等式的新三角不等式的方法,给出了Kaleva-Seikkala型模糊距离空间的概念。众所周知,模糊距离空间在适当选择二元运算下具有丰富的结构,在模糊距离空间领域已经积累了丰富的研究成果[2-5]。作为距离空间的重要推广形式,b-距离空间的概念最早由Bakhtin[6]在1989年首次提出。近年来,许多学者在b-距离空间的框架下研究了不动点定理[7-8]。2022年,Li等[9]首次提出了Kaleva-Seikkala型模糊b-距离空间(简记为模糊b-距离空间)的概念,它是模糊距离空间和b-距离空间概念的推广。2023年,Wu等[10]得到了模糊b-距离空间中的一个广义Ćirić型不动点定理。

近年来,不动点理论的重要研究方向之一是建立关系距离空间中的不动点结果。2015年,Alam等[11]首次提出了关系距离空间不动点理论。关系压缩条件比通常的压缩条件更弱,通过修改关系距离空间下的压缩条件可以得到更多不动点定理[12-14]。2023年,Alharbi等[15]引入了一种二元关系下的严格几乎ϕ-压缩,它是一种新的压缩映射不动点定理,该映射结合了Boyd-Wong型压缩、严格几乎压缩和关系压缩中的思想,并在距离空间中建立了相应的不动点定理。值得注意的是,将不动点定理从通常的距离空间推广至模糊b-距离空间是一项具有挑战性的工作。本文得到了模糊b-距离空间中二元关系下的严格几乎ϕ-压缩不动点定理。作为应用,将所得结果运用于分数阶微分方程研究,给出了其解的存在唯一性。

1 预备知识

记$\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}^+$、$\mathbb{R}^+$和$\mathbb{R}$分别表示自然数集、正整数集、正实数集和实数集。下面给出在Kaleva-Seikkala意义下模糊b-距离空间的定义及其性质。

* **收稿日期**:2025-11-13;**修回日期**:2025-12-27
基金项目:内蒙古自然科学基金项目(2026MS0190);内蒙古财经大学科研基金项目(NCXKY25038,NCXKY25023);内蒙古经济数据分析与挖掘重点实验室研究课题(SY25021)
作者简介:吴佼佼(1987—),女,内蒙古乌兰察布人,讲师,博士。主要从事泛函分析不动点的研究。E-mail:imuwjj@163.com
通信作者:张新艳(1982—),女,内蒙古乌兰察布人,教授,博士。主要从事泛函分析算子谱理论、金融统计风险分析方面的研究。E-mail:zhangxy@imufe.edu.cn

定义 1[16] 设函数 $\eta:\mathbb{R}\to[0,1]$,记 η 的 α-水平集为 $[\eta]_\alpha=\{\delta\in\mathbb{R}:\eta(\delta)\geqslant\alpha\}$,称 η 为模糊实数,如果同时满足以下条件

(i) 存在 $\delta_0\in\mathbb{R}$,使得 $\eta(\delta_0)=1$;

(ii) 对于 $\alpha\in(0,1]$,$[\eta]_\alpha=[\lambda_\alpha,\rho_\alpha]$ 是 $\mathbb{R}$ 中闭区间,其中 $-\infty<\lambda_\alpha\leqslant\rho_\alpha<+\infty$;

则由所有模糊实数组成的集合记作 F。如果 $\eta\in F$ 且对于任意的 $\delta<0$,有 $\eta(\delta)=0$,则称 η 为非负模糊实数,F^+ 表示所有非负模糊实数组成的集合。记号 $\bar{0}$ 表示满足 $\bar{0}(0)=1$ 和 $\bar{0}(\delta)=0,\delta\neq0$ 的模糊实数。显然,$\bar{0}\in F^+$,$\mathbb{R}$ 可以嵌入到 F 中。事实上,若 $a\in\mathbb{R}$, 定义 $\bar{a}(\delta)=\bar{0}(\delta-a)$,则 $\bar{a}\in F$。

下面给出一个模糊实数的例子。

例 1 $\eta(q)=\begin{cases}0, & q<0\\ \mathrm{e}^{-q}, & q\geqslant0\end{cases}$,其中 $q\in\mathbb{R}$,显然 $\eta(0)=1$,并且对于 $\alpha\in(0,1]$,有 $[\eta]_\alpha=[0,-\ln\alpha]$。

定义 2[9] 设 M 是非空集合,函数 $D:M\times M\to F^+$ 是映射,$b\geqslant1$ 且 b 是实数。假设 $L,R:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 是两个非减对称的函数,且满足 $L(0,0)=0,R(1,1)=1$。对于任意的 $\alpha\in(0,1]$,定义 $[D(x,y)]_\alpha=[\lambda_\alpha(x,y),\rho_\alpha(x,y)]$,$\forall x、y\in M$,如果满足

(BM1) $D(x,y)=\bar{0}\Leftrightarrow x=y$;

(BM2) 对于任意的 $x、y\in M$,$D(x,y)=D(y,x)$;

(BM3) 对于任意的 $x、y、z\in M$,

(BM3L) 当 $\theta\leqslant\lambda_1(x,z),\delta\leqslant\lambda_1(z,y)$ 且 $(b(\theta+\delta))\leqslant\lambda_1(x,y)$ 时,$D(x,y)(b(\theta+\delta))\geqslant L(D(x,z)(\theta),D(z,y)(\delta))$;

(BM3R) 当 $\theta\geqslant\lambda_1(x,z),\delta\geqslant\lambda_1(z,y)$ 且 $(b(\theta+\delta))\geqslant\lambda_1(x,y)$ 时,$D(x,y)(b(\theta+\delta))\leqslant R(D(x,z)(\theta),D(z,y)(\delta))$;

则 D 被称为模糊 b-距离,且 (M,D,L,R,b) 被称为系数为 b 的模糊 b-距离空间(简记为 KS-FbMS)。

如无特别声明,本文所述模糊 b-距离空间均指的是在 Kaleva-Seikkala 意义下的模糊 b-距离空间。

下面给出一个模糊 b-距离空间的例子。

例 2[10] 设 $M=[0,+\infty)$,对于任意的 $x、y\in M$,定义 $d(x,y)=\begin{cases}|x-y|, & xy\neq0\\ 5|x-y|, & xy=0\end{cases}$,$D(x,y):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是映射,若 $x=y\in M$,定义 $D(x,y)=\bar{0}$;若 $x、y\in M$ 且 $x\neq y$,定义 $D(x,y)(\xi)=\begin{cases}0, & \xi<0\\ \mathrm{e}^{-\frac{\xi}{d(x,y)}}, & \xi\geqslant0\end{cases}$ 和 $L(\alpha,\beta)=\min\{\alpha,\beta\}$,$R(\alpha,\beta)=\max\{\alpha,\beta\}$,则下列结论成立:

(i) (M,d,b) 是完备的 b-距离空间且系数 $b=5$;

(ii) (M,D,L,R,b) 是完备的模糊 b-距离空间且系数 $b=5$。

下面介绍模糊 b-距离空间中的一些相关性质。

引理 1[9] 设 (M,D,L,R,b) 是 KS-FbMS,对于任意的 $t\in(0,1]$ 和 $x、y\in M$,$[D(x,y)]_t=[\lambda_t(x,y),\rho_t(x,y)]$,则

(i) $\lim\limits_{\delta\to-\infty}D(x,y)(\delta)=0=\lim\limits_{\delta\to+\infty}D(x,y)(\delta)$;

(ii) 对于 $\delta\in(\lambda_1(x,y),+\infty)$,$D(x,y)(\delta)$ 是非增左连续的函数;

(iii) 对于任意的 $t\in(0,1]$,$\rho_t(x,y)$ 是非增左连续的函数。

引理 2[9] 设 (M,D,L,R,b) 是 KS-FbMS,则有 (R1)⇒(R2)⇒(R3),这里

(R1) $\max\{x,y\}\geqslant R(x,y)$;

(R2) 对于任意的 $t\in(0,1]$ 存在 $s\in(0,t]$,使得对于任意的 $r\in(0,t)$ 有 $R(s,r)<t$;

(R3) $\lim\limits_{t\to 0^+} R(t,t)=0$。

引理 3[9]　设(M,D,L,R,b)是 KS-FbMS,则(R2)⇒对于任意的$t\in(0,1]$和x、y、$z\in M$,存在$s=s(t)\in(0,t]$,使得$\rho_t(x,y)\leqslant b[\rho_s(x,z)+\rho_t(z,y)]$。

下面介绍 Li 等[9]给出的模糊 b-距离空间中收敛、Cauchy 列、完备的定义和相关性质。

定义 3[9]　设(M,D,L,R,b)是 KS-FbMS,$\{x_n\}$是M中的序列,则称

(i)$\{x_n\}$收敛到$x\in M$,如果$\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n,x)=\bar{0}$,即$\forall t\in(0,1]$,$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_t(x_n,x)=0$,或记为$\rho_t(x_n,x)\to 0(n\to\infty)$;

(ii)$\{x_n\}$是 Cauchy 列,若$\lim\limits_{n,m\to\infty} D(x_n,x_m)=\bar{0}$,即对于任意给定的$\varepsilon>0$和任意的$t\in(0,1]$,存在$N=N(\varepsilon,t)\in\mathbb{Z}^+$,使得当$n$、$m\geqslant N$时,$\rho_t(x_n,x_m)<\varepsilon$;

(iii)(M,D,L,R,b)是完备的,若M中的每个 Cauchy 列都收敛。

引理 4[9]　设(M,D,L,R,b)是满足(R2)条件的 KS-FbMS,$\{x_n\}\subseteq M$是M中的序列。如果$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_t(x_n,x)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_t(x_n,y)=0$,$x$、$y\in M$,则$x=y$。

下面回顾一下二元关系的相关定义。$M\times M$的一个子集称为集合M上的二元关系(或关系)。

定义 4[11]　一对$x,y\in M$是$\mathcal{R}$-比较的,如果满足$(x,y)\in\mathcal{R}$或$(y,x)\in\mathcal{R}$,用$[x,y]\in\mathcal{R}$来表示这样的有序对。

定义 5[17]　关系$\mathcal{R}^{-1}:=\{(x,y)\in M\times M:(y,x)\in\mathcal{R}\}$被称为$\mathcal{R}$的逆。此外,定义$\mathcal{R}^s:=\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1}$为$M$上的对称关系,通常称为$\mathcal{R}$的对称闭包。

注 1[11]　$(x,y)\in\mathcal{R}^s$当且仅当$[x,y]\in\mathcal{R}$。

定义 6[15]　对于子集$A\subseteq M$,集合$\mathcal{R}|_A:=\mathcal{R}\cap(A\times A)$称为$\mathcal{R}$在$A$上的限制,它是定义在$A$上的关系。

定义 7[11]　设$\mathcal{R}$是M上的一个关系,$T:M\to M$是一个映射。如果对于任意的x、$y\in M$且$(x,y)\in\mathcal{R}$,有$(Tx,Ty)\in\mathcal{R}$,则称$\mathcal{R}$是T-闭的。

定义 8[11]　序列$\{x_n\}\subseteq M$满足对于所有的$n\in\mathbb{N}$,有$(x_n,x_{n+1})\in M$,则序列$\{x_n\}$是$\mathcal{R}$-保持的。

定义 9　(M,D,L,R,b)是$\mathcal{R}$-完备的,如果M中每个$\mathcal{R}$-保持的 Cauchy 列都收敛。

定义 10[18]　子集$A\subseteq M$是$\mathcal{R}$-有向的,如果对于任意的x、$y\in A$,存在$z\in M$,使得$(x,z)\in\mathcal{R}$且$(z,y)\in\mathcal{R}$。

文献[15]给出了距离空间$\mathcal{R}$-连续的定义,下面在模糊 b-距离空间给出类似的定义。

定义 11　设$\mathcal{R}$是M上的一个关系,$T:M\to M$是一个映射。映射T被称为在$x\in M$点处是$\mathcal{R}$-连续的,如果对于每一个$\mathcal{R}$-保持列$\{x_n\}\subseteq M$,且满足$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_t(x_n,x)=0$时,有$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_t(Tx_n,Tx)=0$,$\forall t\in(0,1]$。若$T$在每一点都是$\mathcal{R}$-连续的,则$T$是$\mathcal{R}$-连续的。

文献[15]给出了距离空间d-自闭的定义,下面在模糊 b-距离空间给出类似的定义。

定义 12　如果每个$\mathcal{R}$-保持列$\{x_n\}\subseteq M$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_t(x_n,x)=0(x\in M)$,且该序列存在子序列$\{x_{n_k}\}$满足$[x_{n_k},x]\in\mathcal{R}$,则称$\mathcal{R}$为$D$-自闭的。

2004 年,Berinde[19]引入了一种 Banach 压缩原理的推广,得到了通常距离空间中几乎压缩的不动点定理。设$T:M\to M$是映射,如果存在$k\in(0,1)$和$L\in[0,\infty)$,对于所有x、$y\in M$都有$d(Tx,Ty)\leqslant kd(x,y)+Ld(x,Tx)$,则称$T$为几乎压缩。

定理 1[19]　设(M,d)是完备的距离空间,如果$T:M\to M$是几乎压缩,则T存在不动点。

2008 年,Babu 等[20]定义了一种更强的几乎压缩概念,并在通常的距离空间中得到了严格几乎压缩不动点定理。设$T:M\to M$是映射,如果存在$k\in(0,1)$和$L\in[0,\infty)$,对于所有x、$y\in M$都有

$d(Tx,Ty)\leqslant kd(x,y)+L\min\{d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Tx)\}$,则称$T$为严格几乎压缩。

定理2[20] 设(M,d)是完备的距离空间,如果$T:M\to M$是严格几乎压缩,则T存在唯一的不动点。

2015年,Alam等[11]首次提出关系距离空间不动点定理,其关系压缩条件比通常的压缩条件更弱。2023年,Alharbi等[15]进一步提出二元关系下的几乎ϕ-压缩映射,推广了Boyd-Wong型压缩不动点定理。

集合Φ定义如下:$\Phi=\left\{\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+:\phi^{-1}(\{0\})=\{0\},\phi(r)<r,\ \limsup\limits_{\xi\to r}\phi(\xi)<r,\forall r>0\right\}$。

定理3 根据文献[15]中的定理4,设(M,d)是距离空间,$\mathcal{R}$是M上的关系,$T:M\to M$是映射。假设以下条件成立:

(i) (M,d)是$\mathcal{R}$-完备的;

(ii) 存在$x_0\in M$满足$(x_0,Tx_0)\in\mathcal{R}$;

(iii) $\mathcal{R}$是局部T-传递的和T-闭的;

(iv) T是$\mathcal{R}$-连续的或$\mathcal{R}$是d-自闭的;

(v) 存在$\phi\in\Phi$和$L\geqslant 0$满足$d(Tx,Ty))\leqslant\phi(d(x,y))+L\min\{d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Tx)\}$,对于所有$x、y\in M$且$(x,y)\in\mathcal{R}$成立;

(vi) $T(M)$是$\mathcal{R}$-有向的。

若满足条件(i)—(v),则T存在不动点。此外,若还满足条件(vi),则T存在唯一的不动点。

基于上述内容,考虑将定理3扩展到模糊b-距离空间,呈现模糊b-距离空间中二元关系下的严格几乎ϕ-压缩映射不动点存在性和唯一性的结果。

类似地,在模糊b-距离空间中给出严格几乎ϕ-压缩的定义。

定义13 设(M,D,L,R,b)是满足(R2)条件的KS-FbMS且$b\geqslant 1$。设$T:M\to M$是映射,如果存在$\phi\in\Phi$和$L\geqslant 0$满足$\rho_t(Tx,Ty)\leqslant\phi(\rho_t(x,y))+L\min\{\rho_t(x,Tx),\rho_t(y,Ty),\rho_t(x,Ty),\rho_t(y,Tx)\}$,$\forall t\in(0,1]$,$x、y\in M$且$(x,y)\in\mathcal{R}$成立,则$T$在KS-FbMS上被称为严格几乎$\phi$-压缩。

由D的对称性可知,ρ_t是对称的,因此可以得出下面结论。

命题1 对于任意的$\phi\in\Phi$和$L\geqslant 0$,以下条件是等价的:

(i) $\rho_t(Tx,Ty)\leqslant\phi(\rho_t(x,y))+L\min\{\rho_t(x,Tx),\rho_t(y,Ty),\rho_t(x,Ty),\rho_t(y,Tx)\}$,$\forall t\in(0,1]$,$\forall x、y\in M$且$(x,y)\in\mathcal{R}$。

(ii) $\rho_t(Tx,Ty)\leqslant\phi(\rho_t(x,y))+L\min\{\rho_t(x,Tx),\rho_t(y,Ty),\rho_t(x,Ty),\rho_t(y,Tx)\}$,$\forall t\in(0,1]$,$\forall x、y\in M$且$[x,y]\in\mathcal{R}$。

证明 由定义4可知,结论(ii)⇒(i)成立。下面证明(i)⇒(ii),若(i)成立,假定$x、y\in M$且$[x,y]\in\mathcal{R}$,分两种情形讨论:若$(x,y)\in\mathcal{R}$,(i)⇒(ii);若$(y,x)\in\mathcal{R}$,根据(i)和ρ_t的对称性,可以得到,$\rho_t(Tx,Ty)=\rho_t(Ty,Tx)\leqslant\phi(\rho_t(y,x))+L\min\{\rho_t(y,Ty),\rho_t(x,Tx),\rho_t(y,Tx),\rho_t(x,Ty)\}=\phi(\rho_t(x,y))+L\min\{\rho_t(x,Tx),\rho_t(y,Ty),\rho_t(x,Ty),\rho_t(y,Tx)\}$,可得出(i)⇒(ii)。

2 二元关系下的严格几乎ϕ-压缩映射不动点定理

为了证明主要定理中的Cauchy列成立,下面介绍重要引理。

引理5 设(M,D,L,R,b)是一个满足(R2)条件的KS-FbMS且$b\geqslant 1$。设$[\alpha,\beta]$是一个闭区间且$0<\alpha<\beta<+\infty$。设$T:M\to M$是一个映射,$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq M$为如下定义的序列:$x_n=Tx_{n-1}=T^nx_0(T^0x_0=x_0)$,$\forall n\in\mathbb{N}$。如果存在$\phi\in\Phi$和$L\geqslant 0$,对于任意的$t\in(0,1]$以及$x、y\in M$都有

$$\rho_t(Tx,Ty)\leqslant\phi(\rho_t(x,y))+L\min\{\rho_t(x,Tx),\rho_t(y,Ty),\rho_t(x,Ty),\rho_t(y,Tx)\}\tag{1}$$

则以下结论成立:

(i) $\sigma:=\inf\limits_{\alpha\leqslant r\leqslant\beta}[r-\phi(r)]>0$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_t(x_n,x_{n-1})=0$;

(iii) 对于任意的 $t\in(0,1]$,存在正整数 N 和 K,对于任意 $x\in M$ 满足 $\rho_t(x,T^nx_0)<\beta$,有 $\rho_t(T^kx,T^{k+n}x_0)<\alpha(k>K,n>N)$。

证明　(i) 反证法。假设 $\inf\limits_{\alpha\leqslant r\leqslant\beta}[r-\phi(r)]=0$,则存在一个序列 $\{r_k\}\subset[\alpha,\beta]$,当 $k\to\infty$ 时,有 $r_k-\phi(r_k)\to0$。由于 $\{r_k\}$ 是有界的,故 $\{r_k\}$ 存在一个子列 $\{r_{k_i}\}$ 满足 $r_{k_i}\to r_0(i\to\infty)$,$r_0\in[\alpha,\beta]$。当 $i\to\infty$ 时,$\phi(r_{k_i})=r_{k_i}-[r_{k_i}-\phi(r_{k_i})]\to r_0$,有 $r_0=\lim\limits_{i\to\infty}\phi(r_{k_i})\leqslant\limsup\limits_{r\to r_0}\phi(r)<r_0$, 矛盾。因此,假设不成立,故 $\inf\limits_{\alpha\leqslant r\leqslant\beta}[r-\phi(r)]>0$。

(ii) 由于 $\phi\in\Phi$,则 $\phi^{-1}(\{0\})=\{0\}$ 和 $\phi(r)<r,\forall r>0$,进一步可得 $\phi(r)\leqslant r,\forall r\in\mathbb{R}^+$。假设 $t\in(0,1]$ 且令 $v_n(t)=\rho_t(x_n,x_{n-1})$,由式(1)可知,$v_{n+1}(t)=\rho_t(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant\phi(\rho_t(x_n,x_{n-1}))+L\min\{\rho_t(x_n,x_{n+1}),\rho_t(x_{n-1},x_n),0,\rho_t(x_{n-1},x_{n+1})\}=\phi(v_n(t))\leqslant v_n(t)$,则 $\{v_n(t)\}$ 是一个非负且非增序列。因此,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n(t)=v(t)\geqslant0$。

事实上,如果 $v(t)>0$,则 $v(t)=\lim\limits_{n\to\infty}v_{n+1}(t)\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\phi(v_n(t))\leqslant\limsup\limits_{\xi\to v(t)}\phi(\xi)<v(t)$,矛盾。因此,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n(t)=0,\forall t\in(0,1]$。

(iii) 记 $\sigma_1=\inf\limits_{\frac{\alpha}{2}\leqslant r\leqslant\beta}[r-\phi(r)]>0$,$\sigma_\varepsilon=\inf\limits_{\varepsilon\leqslant r\leqslant\beta}[r-\phi(r)]>0$,$0<\varepsilon<\dfrac{\alpha}{2}$,显然 $\sigma_\varepsilon\leqslant\sigma_1$。由引理5中的条件(ii)可知,对于任意的 $t\in(0,1]$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_t(T^nx_0,T^{n+1}x_0)=0$,因此,存在正整数 N,当 $n\geqslant N$,使得 $\rho_t(T^nx_0,T^{n+1}x_0)<\min\left\{\dfrac{\sigma_1}{2L},\dfrac{\alpha}{2L}\right\}$。

取 $K=\left[\dfrac{2\beta-\alpha}{\sigma_1}\right]+1$,记 $u_k=\rho_t(x,T^nx_k)$,对于任意 $x\in M$ 满足 $u_0=\rho_t(x,T^nx_0)<\beta$,由式(1)可得,$u_1=\rho_t(Tx,T^{n+1}x_0)\leqslant\phi(u_0)+\dfrac{\sigma_1}{2}\leqslant u_0-\sigma_1+\dfrac{\sigma_1}{2}<\beta-\dfrac{\sigma_1}{2}$,$u_2=\rho_t(T^2x,T^{n+2}x_0)\leqslant\phi(u_1)+\dfrac{\sigma_1}{2}\leqslant u_1-\sigma_1+\dfrac{\sigma_1}{2}<\beta-2\cdot\dfrac{\sigma_1}{2}$,继续上述过程,可得 $u_K=\rho_t(T^Kx,T^{n+K}x_0)<\beta-K\cdot\dfrac{\sigma_1}{2}<\dfrac{\alpha}{2}<\alpha$。

不失一般性,假定 u_K 是第一个小于 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的项,存在 $\varepsilon_0<u_K$,使得 $u_{K+1}=\rho_t(T^{K+1}x,T^{n+K+1}x_0)\leqslant u_K-\sigma_{\varepsilon_0}+\min\left\{\dfrac{\sigma_1}{2},\dfrac{\alpha}{2}\right\}<\dfrac{\alpha}{2}-\sigma_{\varepsilon_0}+\dfrac{\alpha}{2}<\alpha$;若 $u_{K+1}<\dfrac{\alpha}{2}$,存在 $\varepsilon_1<u_{K+1}$,使得 $u_{K+2}\leqslant u_{K+1}-\sigma_{\varepsilon_1}+\min\left\{\dfrac{\sigma_1}{2},\dfrac{\alpha}{2}\right\}<\dfrac{\alpha}{2}-\sigma_{\varepsilon_1}+\dfrac{\alpha}{2}<\alpha$;若 $\dfrac{\alpha}{2}<u_{K+1}<\alpha$,有 $u_{K+2}\leqslant u_{K+1}-\sigma_1+\min\left\{\dfrac{\sigma_1}{2},\dfrac{\alpha}{2}\right\}<\alpha-\sigma_1+\dfrac{\sigma_1}{2}<\alpha$。综上所述,当 $k\geqslant K$ 时,有 $u_k=\rho_t(T^kx,T^{n+k}x_0)<\alpha$ 成立。

通过上面的重要引理,在模糊 b-距离空间中建立了二元关系下的严格几乎 ϕ-压缩不动点定理,这个新的结论是对已有结果的改进。

定理 4　设 (M,D,L,R,b) 是一个满足(R2)条件的 KS-FbMS 且 $b\geqslant1$。设 $\mathcal{R}$ 是 M 上的一个关系,设 $T:M\to M$ 是一个映射,假设以下条件成立:

(i) (M,D,L,R,b) 是 $\mathcal{R}$-完备的;

(ii) 存在 $x_0\in M$ 满足 $(x_0,Tx_0)\in\mathcal{R}$;

(iii) $\mathcal{R}$ 是 T-闭的;

(iv) T是$\mathcal{R}$-连续的或$\mathcal{R}$是D-自闭的;

(v) 存在$\phi\in\Phi$和$L\geqslant 0$,对于任意的$t\in(0,1]$,x、$y\in M$且$(x,y)\in\mathcal{R}$都有

$$\rho_t(Tx,Ty)\leqslant\phi(\rho_t(x,y))+L\min\{\rho_t(x,Tx),\rho_t(y,Ty),\rho_t(x,Ty),\rho_t(y,Tx)\} \tag{2}$$

(vi) $\mathcal{R}|_{T(M)}$是完备的或$T(M)$是$\mathcal{R}$-有向的。

若满足条件(i)—(v),则T存在不动点。此外,若还满足条件(vi),则T存在唯一的不动点。

证明 由定理4中的条件(ii),取$x_0\in M$使得$(x_0,Tx_0)\in\mathcal{R}$,令$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq M$是一个序列,$\forall n\in\mathbb{N}$,定义$x_n=Tx_{n-1}=T^nx_0$,其中$T^0x_0=x_0$。

分成以下步骤证明结论:

① 证明序列$\{x_n\}$是$\mathcal{R}$-保持的。

由定理4中的条件(ii)和$\mathcal{R}$是T-闭的,可得$(T^nx_0,T^{n+1}x_0)\in\mathcal{R}$,则$(x_n,x_{n+1})\in\mathcal{R}$,$\forall n\in\mathbb{N}$。

② 证明$\{x_n\}$是M中Cauchy列。

对于闭区间$[\frac{1}{2b},1]$,由引理3可知,对于任意的$t\in(0,1]$,存在$s=s(t)\in(0,t]$使得$\rho_t(x,y)\leqslant b[\rho_s(x,z)+\rho_t(z,y)]$,$\forall x$、$y$、$z\in M$,由式(2)和$\{x_n\}$是$\mathcal{R}$-保持的可知,$\rho_t(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant\phi(\rho_t(x_n,x_{n-1}))+L\min\{\rho_t(x_n,x_{n+1}),\rho_t(x_{n-1},x_n),0,\rho_t(x_{n-1},x_{n+1})\}\leqslant\phi(\rho_t(x_n,x_{n-1}))$。

由引理5可知,对于任意的$t\in(0,1]$,$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_t(x_n,x_{n-1})=0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_s(x_n,x_{n-1})=0$,其中$s=s(t)\in(0,t]$。因此,存在自然数$N$,使得$\rho_s(x_N,x_{N+1})$,$\rho_s(x_N,x_{N+2})$,…,$\rho_s(x_N,x_{N+k})$都不大于$\frac{1}{2b}$。因此,对于任意自然数$m>N$,由引理1可知,$\rho_t(x,y)$是非增的。若$m\leqslant N+k$,有$\rho_t(x_N,x_m)\leqslant\rho_s(x_N,x_m)\leqslant\frac{1}{2b}<1$;若$m=N+k+1$,由$\rho_t(x_N,x_{N+1})\leqslant\rho_s(x_N,x_{N+1})<1$和引理5,有$\rho_t(x_{N+k},x_{N+k+1})<\frac{1}{2b}$。进而,对于任意$t\in(0,1]$,存在$s=s(t)\in(0,t]$,使得$\rho_t(x_N,x_m)\leqslant b\rho_s(x_N,x_{N+k})+b\rho_t(x_{N+k},x_{N+k+1})<b\left[\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}\right]=1$。

综上所述,对于任意$m>N$,$\forall t\in(0,1]$,有$\rho_t(x_N,x_m)<1$。令$M_0:=\sup\limits_{m,n\in\mathbb{N}}\rho_t(x_n,x_m)$,接下来证明$\{x_n\}$是$M$中的Cauchy列。根据引理5,对于任意的$\varepsilon>0$,$t\in(0,1]$,存在充分大的整数$N$,$\forall m$、$n\in\mathbb{N}$且$m>n>N+k$,对于$\rho_t(x_{m-k},x_{n-k})\leqslant M_0$,可得$\rho_t(x_m,x_n)<\varepsilon$。因此,$\{x_n\}$是$M$中的Cauchy列。

由于$\{x_n\}$是$\mathcal{R}$-保持的且是Cauchy列,因此根据定理4中的条件(i),存在$x^*\in M$使得$\rho_t(x_n,x^*)\to 0(n\to\infty)$,$\forall t\in(0,1]$。

③ 证明上述的x^*是T的不动点。

$\{x_n\}$是$\mathcal{R}$-保持的,下面分两种情况讨论。

如果T是$\mathcal{R}$-连续的,由于$\rho_t(x_n,x^*)\to 0(n\to\infty)$,故$\rho_t(Tx_n,Tx^*)\to 0(n\to\infty)$,$\forall t\in(0,1]$,这说明$\rho_t(x_{n+1},Tx^*)\to 0(n\to\infty)$,由引理4的唯一性得到$Tx^*=x^*$。

如果$\mathcal{R}$是D-自闭的,则$\{x_n\}$包含一个子列$\{x_{n_k}\}$满足$[x_{n_k},x^*]\in\mathcal{R}$,对于任意的$k\in\mathbb{N}$,由$\phi$的假设、式(2)、命题1和$[x_{n_k},x^*]\in\mathcal{R}$,可得$\rho_t(x_{n_k+1},Tx^*)=\rho_t(Tx_{n_k},Tx^*)\leqslant\phi(\rho_t(x_{n_k},x^*))+L\min\{\rho_t(x_{n_k},x_{n_k+1}),\rho_t(x^*,Tx^*),\rho_t(x_{n_k},Tx^*),\rho_t(x^*,x_{n_k+1})\}\leqslant\rho_t(x_{n_k},x^*)+L\min\{\rho_t(x_{n_k},x_{n_k+1}),\rho_t(x^*,Tx^*),\rho_t(x_{n_k},Tx^*),\rho_t(x^*,x_{n_k+1})\}$,通过对上述不等式取极限,由$\rho_t(x_{n_k},x^*)\to 0(k\to\infty)$,可推导出$\rho_t(x_{n_{k+1}},Tx^*)\to 0(k\to\infty)$,由引理4的唯一性,可得$Tx^*=x^*$。

④ 证明T有唯一的不动点$x^*\in M$。

假设$y^*\in M$,使得$Ty^*=y^*$且$x^*\neq y^*$,则存在$t\in(0,1]$,使得$\rho_t(x^*,y^*)>0$。由于x^*、$y^*\in T(M)$,以下分两种情况进行讨论。

情形 1:如果 $\mathcal{R}|_{T(M)}$是完备的,可得$[x^*, y^*]\in\mathcal{R}$。由式(2)和命题1可得,$\rho_t(x^*, y^*)=\rho_t(Tx^*, Ty^*)\leqslant \phi(\rho_t(x^*, y^*))+L\min\{0, 0, \rho_t(x^*, Ty^*), \rho_t(y^*, Tx^*)\}<\rho_t(x^*, y^*)$, 矛盾,则$x^*=y^*$,即$x^*$是唯一的。

情形 2:如果$T(M)$是$\mathcal{R}$-有向的,存在$z\in M$满足$(x^*, z)\in\mathcal{R}$和$(y^*, z)\in\mathcal{R}$。记$v_n(t)=\rho_t(x^*, T^nz)$, 根据 $\mathcal{R}$ 是 T-闭的,$\phi(r)\leqslant r$和式(2),可得$\rho_t(x^*, T^nz)=\rho_t(Tx^*, T(T^{n-1}z))\leqslant\phi(\rho_t(x^*, T^{n-1}z))+L\min\{0, \rho_t(T^{n-1}z, T^nz), \rho_t(x^*, T^nz), \rho_t(T^{n-1}z, Tx^*)\}\leqslant\rho_t(x^*, T^{n-1}z)$, 因此,$v_n(t)\leqslant v_{n-1}(t)$, 故$\{v_n(t)\}$是非负不增的序列,且$\lim\limits_{n\to\infty}v_n(t)=v(t)\geqslant 0$。事实上,若$v(t)>0$,则$v(t)=\lim\limits_{n\to\infty}v_{n+1}(t)\leqslant \liminf\limits_{n\to\infty}\phi(v_n(t))\leqslant\limsup\limits_{\xi\to v(t)}\phi(\xi)<v(t)$,矛盾。因此,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n(t)=\rho_t(x^*, T^nz)=0, \forall t\in(0, 1]$。类似地,可得$\rho_t(y^*, T^nz)=0, \forall t\in(0, 1]$。由引理3可知,存在$s=s(t)\in(0, t]$,使得$\rho_t(x^*, y^*)\leqslant b\rho_s(x^*, T^nz)+b\rho_t(y^*, T^nz)\to 0, n\to\infty$,因此$x^*=y^*$,即$x^*$是$T$的唯一的不动点。

众所周知,模糊b-距离空间是模糊距离空间和b-距离空间的推广。基于上述结论,回顾若干不动点定理,可以得到以下推论。

利用定理4,获得以下在模糊距离空间中二元关系下的严格几乎 ϕ-压缩的不动点定理。

推论 1　设(M, D, L, R)是一个满足(R2)条件的模糊距离空间,$\mathcal{R}$是M上的一个关系,$T: M\to M$是一个映射,假设以下条件成立:

(i)(M, D, L, R)是$\mathcal{R}$-完备的;

(ii)存在$x_0\in M$满足$(x_0, Tx_0)\in\mathcal{R}$;

(iii)$\mathcal{R}$是T-闭的;

(iv)T是$\mathcal{R}$-连续的或$\mathcal{R}$是D-自闭的;

(v)存在$\phi\in\Phi$和$L\geqslant 0$,对于任意的$t\in(0, 1]$,$x、y\in M$且$(x, y)\in\mathcal{R}$,都有$\rho_t(Tx, Ty)\leqslant\phi(\rho_t(x, y))+L\min\{\rho_t(x, Tx), \rho_t(y, Ty), \rho_t(x, Ty), \rho_t(y, Tx)\}$;

(vi)$\mathcal{R}|_{T(M)}$是完备的或$T(M)$是$\mathcal{R}$-有向的。

若满足条件(i)—(v),则T存在不动点。此外,若还满足条件(vi),则T存在唯一的不动点。

注 2　此结论在模糊距离空间中也是新的结果。

特别地,取关系$\mathcal{R}=M\times M$,推论1得到了推论2。

推论 2　根据文献[5]中的定理3.1(a),设(M, D, L, R)是一个满足(R2)条件的模糊距离空间。若映射$T: M\to M$满足对于任意的$t\in(0, 1]$,$x、y\in M$都有$\rho_t(Tx, Ty))\leqslant\phi(\rho_t(x, y))$,其中$\phi\in\Phi$,则$T$存在唯一的不动点$x^*\in M$。

利用定理4,可以得到在b-距离空间中二元关系下的严格几乎 ϕ-压缩映射的不动点定理,即推论3。事实上,以下结果在b-距离空间中也是新的。

推论 3　设(M, d, b)是一个b-距离空间,且系数$b\geqslant 1$。$\mathcal{R}$是定义在M的一个关系,$T: M\to M$是一个映射,假设以下条件成立:

(i)(M, d, b)是$\mathcal{R}$-完备的;

(ii)存在$x_0\in M$满足$(x_0, Tx_0)\in\mathcal{R}$;

(iii)$\mathcal{R}$是T-闭的;

(iv)T是$\mathcal{R}$-连续的或$\mathcal{R}$是d-自闭的;

(v)存在$\phi\in\Phi$和$L\geqslant 0$,对于任意的$x、y\in M$且$(x, y)\in\mathcal{R}$,都有$d(Tx, Ty)\leqslant\phi(d(x, y))+L\min\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$;

(vi)$\mathcal{R}|_{T(M)}$是完备的或$T(M)$是$\mathcal{R}$-有向的。

若满足条件(i)—(v),则T存在不动点。此外,若还满足条件(vi),则T存在唯一的不动点。

特别地,取关系$\mathcal{R}=M\times M$,由推论3可推出推论4。

推论 4 设(M,d,b)是一个完备的b-距离空间且系数$b\geqslant 1$。假设映射$T:M\to M$对于任意的$x、y\in M$都有$d(Tx,Ty)\leqslant\phi(d(x,y))$,其中$\phi\in\Phi$,则$T$存在唯一的不动点$x^*\in M$。

注 3 这个结论在b-距离空间也是新的结果。

3 分数阶微分方程解的存在性应用

分数阶微分方程在众多领域中起着至关重要的作用,它们为理解和分析复杂动力系统提供了一个更为全面且精细的数学框架。分数阶微分方程的理论意义及其在复杂系统建模中的广泛应用已得到充分讨论。本节将聚焦于二元关系下的某一类分数阶微分方程解的存在性问题,深入探讨其解的存在唯一性条件。

讨论如下分数阶微分方程

$$ {}^{c}D_{0^+}^{\alpha}x(s)=g(s,x(s)),s\in[0,1] \tag{3}$$

其中,$x(0)+x'(0)=0,x(1)+x'(1)=0$,${}^{c}D_{0^+}^{\alpha}$为分数阶导数[21],$1<\alpha\leqslant 2$且$\alpha$是一个实数,$g:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$连续。

令$M:=C[0,1]$是闭区间$[0,1]$上的所有实连续函数的全体,定义距离$d:M\times M\to\mathbb{R}$为

$$d(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{7}\max\limits_{s\in[0,1]}|x(s)-y(s)|, & x(s)y(s)\equiv 0,\forall s\in[0,1]\\ \max\limits_{s\in[0,1]}|x(s)-y(s)|, & \text{其他}\end{cases},x、y\in M$$

令$D(x,y):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是映射,如果$x=y\in M$,定义$D(x,y)(\xi)=\bar{0}(\xi),\forall\xi\in\mathbb{R}$;如果$x、y\in M$且$x\neq y$,$D(x,y)$定义为

$$D(x,y)(\xi)=\begin{cases}0, & \xi<0\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{\xi}{d(x,y)}}, & \xi\geqslant 0\end{cases}$$

其中$L(\alpha,\beta)=\min\{\alpha,\beta\}$,$R(\alpha,\beta)=\max\{\alpha,\beta\}$。易知$(M,D,L,R,b)$是具有(R2)条件完备的KS-FbMS且$b=7$。此外,还有以下性质[10],$\rho_t(x,y)=\dfrac{1-t}{t}\cdot d(x,y),\forall t\in(0,1]$。

设$\mathcal{R}$为定义在M上的关系,满足$(x,y)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow x(s)\geqslant y(s),\forall x、y\in M,\forall s\in[0,1]$。易证$(M,D,L,R,b)$是$\mathcal{R}$-完备的且$\mathcal{R}$是$D$-自闭的。注意到$x\in M$是方程(3)的解当且仅当$x$为下列积分方程的解:

$$\begin{aligned}x(s)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}(1-s)g(v,x(v))\mathrm{d}v\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-2}(1-s)g(v,x(v))\mathrm{d}v\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-v)^{\alpha-1}g(v,x(v))\mathrm{d}v\end{aligned}$$

命题 2 假设以下条件成立:

(i) $g:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$是连续的;

(ii) 对于任意的$x、y\in M$且$(x,y)\in\mathcal{R}$和对于任意的$t\in(0,1]$,满足$0\leqslant\dfrac{1-t}{t}\cdot[g(s,x(s))-g(s,y(s))]\leqslant\dfrac{1}{4}\phi\left(\dfrac{1-t}{t}\cdot[x(s)-y(s)]\right)$,其中$\phi\in\Phi$且$\phi$为非减的;

(iii) $\sup\limits_{s\in(0,1)}\dfrac{1}{4}\left|\dfrac{1-s}{\Gamma(\alpha+1)}+\dfrac{1-s}{\Gamma(\alpha)}+\dfrac{s^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right|:=\theta<1$;

（iv）存在 $\lambda\in M$，满足 $\lambda(s)\geqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}(1-s)g(v,\lambda(v))\mathrm{d}v+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-2}(1-s)g(v,\lambda(v))\mathrm{d}v+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-v)^{\alpha-1}g(v,\lambda(v))\mathrm{d}v$ 成立，则方程（3）存在唯一解。

证明　定义 $T:M\to M$ 为

$$Tx(s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}(1-s)g(v,x(v))\mathrm{d}v+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-2}(1-s)g(v,x(v))\mathrm{d}v+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-v)^{\alpha-1}g(v,x(v))\mathrm{d}v$$

由命题2中的条件（ii）可得，$\mathcal{R}$ 是 T-闭的。对于任意的 x、$y\in M$ 且 $(x,y)\in\mathcal{R}$ 和任意的 $t\in(0,1]$，考虑

$$\begin{aligned}\frac{1-t}{t}\cdot|Tx(s)-Ty(s)|&=\frac{1-t}{t}\cdot\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}(1-s)\big[g(v,x(v))-g(v,y(v))\big]\mathrm{d}v\right.\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-2}(1-s)\big[g(v,x(v))-g(v,y(v))\big]\mathrm{d}v\\&\quad\left.+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-v)^{\alpha-1}\big[g(v,x(v))-g(v,y(v))\big]\mathrm{d}v\right]\\&\leqslant\frac{1}{4}\phi\left(\frac{1-t}{t}\cdot[x(s)-y(s)]\right)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}(1-s)\mathrm{d}v\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-2}(1-s)\mathrm{d}v+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-v)^{\alpha-1}\mathrm{d}v\right]\\&=\frac{1}{4}\phi\left(\frac{1-t}{t}\cdot[x(s)-y(s)]\right)\left[\frac{1-s}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1-s}{\Gamma(\alpha)}+\frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\end{aligned}$$

因此，$\rho_t(Tx(s),Ty(s))\leqslant\phi(\rho_t(x(s),y(s)))\cdot\sup\limits_{s\in(0,1)}\frac{1}{4}\left|\frac{1-s}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1-s}{\Gamma(\alpha)}+\frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right|\leqslant\phi(\rho_t(x(s),y(s)))$，$\forall t\in(0,1]$。对于任意的 x^*、$y^*\in T(M)$，取 $z:=\min\{Tx^*,Ty^*\}$ 可知，$Tx^*\geqslant z$，$Ty^*\geqslant z$，则 $T(M)$ 是 $\mathcal{R}$-有向的。由定理4可知，T 存在唯一不动点，即方程在 $C[0,1]$ 中存在唯一解。

参考文献：

[1] Kaleva O, Seikkala S. On fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12(3): 215-229.

[2] Huang H, Wu C X. On the completion of fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159(19): 2596-2605.

[3] Qiu J H. Set-valued Ekeland variational principles in fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 245: 43-62.

[4] Song M L, Wang Z Q. Fixed point theorems for complex non-self mappings satisfying an implicit relation in Kaleva-Seikkala′s type fuzzy metric spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2013, 2013(1): 254.

[5] Xiao J Z, Zhu X H, Jin X. Fixed point theorems for nonlinear contractions in Kaleva-Seikkala′s type fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 200: 65-83.

[6] Bakhtin I A. The contraction mapping principle in quasi-metric space[J]. Functional Analysis, 1989, 30: 26-37.

[7] 宝倩雯，贺飞. b-距离空间中 Kirk 型渐近压缩不动点定理[J]. 内蒙古大学学报（自然科学版），2023，54(4)：337-341.

[8] 安凯锋，林雨繁，贺飞. b-距离空间中推广的 Bogin 不动点定理[J]. 内蒙古大学学报（自然科学版），2025，56(2)：125-130.

[9] Li S F, He F, Lu S M. Kaleva-Seikkala′s type fuzzy b-metric spaces and several contraction mappings[J]. Journal of

Function Spaces,2022,2022(1):2714912.
[10] Wu J J,He F,Li S F. A fixed point theorem for generalized Ćirić-type contraction in Kaleva-Seikkala′s type fuzzy b-metric spaces[J]. Axioms,2023,12(7):616.
[11] Alam A,Imdad M. Relation-theoretic contraction principle[J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications,2015,17(4):693-702.
[12] Alam A,Imdad M. Relation-theoretic metrical coincidence theorems[J]. Filomat,2017,31(14):4421-4439.
[13] Alam A,Imdad M. Nonlinear contractions in metric spaces under locally T-transitive binary relations[J]. Fixed Point Theory,2018,19(1):13-24.
[14] Arif M,Imdad M,Alam A. Fixed point theorems under locally T-transitive binary relations employing Matkowski contractions[J]. Miskolc Mathematical Notes,2022,23:71-83.
[15] Alharbi A F,Khan F A. Almost Boyd-Wong type contractions under binary relations with applications to boundary value problems[J]. Axioms,2023,12(9):896.
[16] Dubois D,Prade H. Operations on fuzzy numbers[J]. International Journal of Systems Science,1978,9(6):613-626.
[17] Lipschutz S. Schaum′s outlines of theory and problems of set theory and related topics[M]. New York:McGraw-Hill,1964.
[18] Samet B,Turinici M. Fixed point theorems on a metric space endowed with an arbitrary binary relation and applications[J]. Communications in Mathematical Analysis,2012,13:82-97.
[19] Berinde V. Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration[J]. Fixed Point Theory,2004,4(2):131-142.
[20] Babu G V R,Sandhya M L,Kameshwari M V R. A note on a fixed point theorem of Berinde on weak contractions[J]. Carpathian Journal of Mathematics,2008,24(1):8-12.
[21] Kilbas A A,Marzan S A. Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions[J]. Differential Equations,2005,41(1):84-89.

(**责任编委** 黄俊杰)

A Fixed Point Theorem for Strict Almost ϕ-Contractions with Binary Relations

WU Jiaojiao[1],LI Shufang[1],ZHANG Xinyan[1],HE Fei[2]
(1. *School of Statistics and Mathematics, Inner Mongolia University of Finance and Economics, Hohhot* 010070, *China*;
2. *School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot* 010030, *China*)

Abstract: A fixed point theorem for strict almost ϕ-contractions under binary relations in Kaleva-Seikkala type fuzzy b-metric spaces is established. By introducing a new lemma, new proofs that differ from the original ones in metric spaces are provided. The existing fixed point theorems in the literature are improved and generalized. As a practical application, the existence and uniqueness of solutions to nonlinear fractional differential equations are effectively demonstrated, thereby bridging the theoretical and applied aspects of the study.

Key words: Kaleva-Seikkala type fuzzy b-metric spaces; binary relation; strict almost ϕ-contractions; fixed point theorem