

边界条件含谱参数的一类 Hilfer 型 分数阶 S-L 问题*

王雪领,郝晓玲

(内蒙古大学数学科学学院,呼和浩特 010021)

摘要:研究一类边界条件含谱参数的 Hilfer 型分数阶 Sturm-Liouville 边值问题。首先,分析该问题的特征值与特征函数的解析性质,并证明其对应算子的对称性;其次,通过迭代方法结合压缩映射定理,在适当的函数空间建立了该问题解的存在唯一性;最后,通过构造特征函数,得到该问题特征值与特征函数零点一致性。

关键词:分数阶微分方程;边界条件;转移条件;Hilfer 导数;谱参数

中图分类号:O175 **文献标志码:**A

Sturm-Liouville(S-L)问题是数学物理方程研究中的一个经典课题^[1-2],在物理和量子力学等领域中有广泛应用^[3]。随着分数阶微积分理论的发展,包含分数阶导数的微分方程问题(FSLP)成为研究热点,其形式沿用传统 S-L 问题框架,但将整数阶导数推广为分数阶导数。近年来,多位学者围绕分数阶 S-L 算子的数值求解、特征值及特征函数展开了深入研究^[4-10]。Rivero 等^[10]使用不同的分数阶算子求解常见的 S-L 问题,分析了算子相关的特征值和特征函数。Zayernouri 等^[11]研究了紧区间上两类分数阶 S-L 问题的特征值。Yakar 等^[12]主要研究了一类不连续的分数阶 S-L 问题,并且给出了其基本解。Akdoğan 等^[13]也研究了不连续的分数阶 S-L 问题,但是该问题的边界条件与文献[12]中问题的边界条件不同。

Hilfer 导数是由参数 α 和 β 定义的,其中 Riemann-Liouville 和 Caputo 分数阶导数分别是 $\beta=0$ 和 $\beta=1$ 时的特殊情形^[14]。目前,Hilfer 导数已在工程、物理、量子力学、声学 and 电磁学等多个领域发挥了重要作用。Zhou 等^[15]研究了一类不连续 Hilfer 型分数阶 S-L 问题,分析其特征值和特征函数的性质并且证明了解的唯一性。本文在此基础上进一步拓展,研究一类边界条件中含谱参数的不连续分数阶 S-L 问题。利用算子理论以及分析技巧,通过引入新的 Hilbert 空间,将边界值问题转化成算子问题。首先证明新算子是对称的,再研究其特征值和特征函数的性质,用迭代法证明解的存在唯一性,最后通过构造特征函数,得到该问题特征值与特征函数零点一致性。

1 预备知识

本节内容将说明分数阶积分和导数的定义及分数阶计算的基本性质。

定义 1^[16] 左右 Riemann-Liouville 型分数阶积分

令 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\Re(\alpha) > 0$ 且 $f(x) \in L^1[a, b]$ 。在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 上的左右 Riemann-Liouville 型分数阶积分

* 收稿日期:2025-08-03;修回日期:2025-10-10

基金项目:国家自然科学基金项目(12361027)

作者简介:王雪领(2001—),女(蒙古族),内蒙古通辽人,2023 级硕士研究生。E-mail:2711321895@qq.com

通信作者:郝晓玲(1983—),女,内蒙古呼和浩特人,教授,博士。主要从事微分算子谱分析的研究。E-mail:

xlhao1883@163.com

$I_a^a f(x)$ 和 $I_b^a f(x)$ 分别定义为

$$I_a^a f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x \in (a, b],$$

$$I_b^a f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, x \in [a, b).$$

定义 2^[17] 左右 Riemann-Liouville 型分数阶导数

令 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\Re(\alpha) \in (0, 1)$ 且 $f(x) \in L^1[a, b]$ 。在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的左右 Riemann-Liouville 型分数阶微分 $D_a^a f(x)$ 和 $D_b^a f(x)$ 分别表示为

$$D_a^a f(x) := DI_a^{1-a} f(x), x \in (a, b],$$

$$D_b^a f(x) := -DI_b^{1-a} f(x), x \in [a, b),$$

其中, $D = \frac{d}{dx}$ 是常用的微分运算符。

定义 3^[17] 左右 Hilfer 型分数阶导数

令 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\Re(\alpha) \in (0, 1)$, $\Re(\beta) \in (0, 1]$ 且 $f(x) \in L^1[a, b]$ 。在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 上的左右 Hilfer 型分数阶微分 $D_a^{\alpha, \beta} f(x)$ 和 $D_b^{\alpha, \beta} f(x)$ 分别表示为

$$D_a^{\alpha, \beta} f(x) := I_a^{\beta(1-\alpha)} DI_a^{(1-\beta)(1-\alpha)} f(x),$$

$$D_b^{\alpha, \beta} f(x) := I_b^{(1-\beta)(1-\alpha)} DI_b^{\beta(1-\alpha)} f(x),$$

其中, $D = \frac{d}{dx}$ 是常用的微分运算符。

引理 1 设 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\Re(\alpha) \in (0, 1)$, $\Re(\beta) \in (0, 1)$ 且 $f(x) \in L^p[a, b]$, $1 \leq p \leq \infty$, $g(x) \in L^q[a, b]$, $1 \leq q \leq \infty$, 则有以下 Hilfer 型分数阶微分推导出的分部积分等式

$$\int_a^b f(x) D_a^{\alpha, \beta} g(x) dx = - \int_a^b g(x) D_b^{\alpha, \beta} f(x) dx + I_a^{(1-\beta)(1-\alpha)} g(x) I_b^{\beta(1-\alpha)} f(x) \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

证明 详细证明见文献[18]。

2 带谱参数且不连续的 Hilfer 型分数阶 S-L 问题

给出 Hilfer 型分数阶 S-L 问题微分算式的如下表达

$$L_a y = \begin{cases} D_{0^+}^{\alpha, \beta} p(x) D_{-1^+}^{\alpha, \beta} y + q(x) y, & x \in [-1, 0) \\ D_{1^-}^{\alpha, \beta} p(x) D_{0^+}^{\alpha, \beta} y + q(x) y, & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (1)$$

考虑 $I = [-1, 0) \cup (0, 1]$ 上 S-L 问题的方程 $L_a u + \lambda u = 0$, 该方程带谱参数的边界条件为

$$L_1(u) = c_1 I_{-1^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} u(-1) - c_2 p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-1) - \lambda (c_1 I_{-1^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} u(-1) - c_2' p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-1)) = 0 \quad (2)$$

$$L_2(u) = I_{0^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} u(1) - h p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(1) = 0 \quad (3)$$

转移条件为

$$L_3(u) = I_{-1^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} u(-0) - K I_{0^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} u(+0) = 0 \quad (4)$$

$$L_4(u) = I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-0) - \frac{1}{K} I_{1^-}^{\beta(1-\alpha)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(+0) = 0 \quad (5)$$

其中, $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 λ 为谱参数, $K \neq 0$ 且 K 为实数, $\rho = c_1' c_2 - c_1 c_2'$ 且 $\rho > 0$ 。

$$p(x) = \begin{cases} p_1, & x \in [-1, 0) \\ p_2, & x \in (0, 1] \end{cases},$$

其中, p_1, p_2 为正实数且 $p_1 = c_1/c_2$, $q(x)$ 在 $[-1, 0)$ 和 $(0, 1]$ 上为连续的实值函数且极限为有限值

$$q(\pm 0) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} q(x) \quad (6)$$

3 分数阶 S-L 问题的算子表达

在 Hilbert 空间 $L^2(I)$ 中定义如下内积

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{p_1} \int_{-1}^0 f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{p_2} \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \quad (7)$$

其中, $f(x), g(x) \in L^2(I)$ 。显然, $H_1 = (L^2(I), \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ 是 Hilbert 空间。

在 Hilbert 空间 $H = H_1 + C$ 上定义内积 $\langle F, G \rangle = \langle f, g \rangle_1 + 1/\rho \cdot f_1 \overline{g_1}$, 其中, $F = (f(x), f_1)$, $G = (g(x), g_1) \in H, f(x), g(x) \in H, f_1, g_1 \in \mathbb{C}$ 。

在这个 Hilbert 空间 H 上, 研究算子 A 且 $A : D(A) \rightarrow H$,

$D(A) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(x), f_1) \in H \mid f(x), D_{-1^+}^{\alpha, \beta} f(x), D_{1^+}^{\alpha, \beta} f(x) \text{ 在 } [-1, 0) \cup (0, 1] \text{ 上绝对连续,} \\ \text{极限 } f(\pm 0), I_{0^+}^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(\pm 0), I_{1^+}^{\beta(1-a)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(\pm 0), I_{0^+}^{(1-a)(1-\beta)} u(\pm 0), I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} u(\pm 0) \text{ 为有限值,} \\ L_i f = 0 (i = 2, 3, 4), f_1 = c_1 I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} f(-1) - c_2 p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta} f(-1). \end{array} \right. \quad (8)$$

对于任意的 $F = (f(x), c_1 I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} f(-1) - c_2 p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta} f(-1))$, 算子 A 的作用为 $AF = A(f(x), f_1) = (L_a f, c_1 I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} f(-1) - c_2 p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta} f(-1))$ 。为了方便书写, 记 $M(f) = c_1 I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} f(-1) - c_2 p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta} f(-1)$, $M'(f) = c_1 I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} f(-1) - c_2 p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta} f(-1)$, 则问题(1)–(5)可写成以下算子的形式 $Au = \lambda u$ 。

显然, 问题(1)–(5)的特征值和相关的特征函数与算子 A 的特征值和特征函数是一致的。

定理 1 线性算子 A 是对称的。

证明 对于 $\forall F, G \in D(A)$, $F = (f(x), M'(f))$, $G = (g(x), M'(g))$,

$$\langle AF, G \rangle = \langle L_a f, g \rangle_1 + \frac{1}{\rho} M(f) \overline{M'(g)},$$

$$\begin{aligned} \langle L_a f, g \rangle_1 &= \frac{1}{p_1} \int_{-1}^0 D_{0^+}^{\alpha, \beta} p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta} f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{p_1} \int_{-1}^0 q(x) f(x) \overline{g(x)} dx \\ &\quad + \frac{1}{p_2} \int_0^1 D_{1^+}^{\alpha, \beta} p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{p_2} \int_0^1 q(x) f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_{-1}^0 f(x) D_{0^+}^{\alpha, \beta} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} \overline{g(x)} dx - I_{0^+}^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} \overline{g(x)} I_{-1^+}^{(1-\beta)(1-a)} f(x) \Big|_{x=-1}^{x=0^-} \\ &\quad + \int_0^1 f(x) D_{1^+}^{\alpha, \beta} D_{0^+}^{\alpha, \beta} \overline{g(x)} dx - I_{1^+}^{\beta(1-a)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} \overline{g(x)} I_{0^+}^{(1-\beta)(1-a)} f(x) \Big|_{x=0^+}^{x=1} \\ &\quad + I_{0^+}^{\beta(1-a)} D_{1^+}^{\alpha, \beta} f(x) I_{-1^+}^{(1-\beta)(1-a)} \overline{g(x)} \Big|_{x=-1}^{x=0^-} + I_{1^+}^{\beta(1-a)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} f(x) I_{0^+}^{(1-\beta)(1-a)} \overline{g(x)} \Big|_{x=0^+}^{x=1} \\ &\quad + \frac{1}{p_1} \int_{-1}^0 q(x) f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{p_2} \int_0^1 q(x) f(x) \overline{g(x)} dx, \\ \langle AF, G \rangle &= \langle F, AG \rangle + w_1(f, \overline{g}, 0^-) - w_1(f, \overline{g}, -1) + w_2(f, \overline{g}, 1) \\ &\quad + w_2(f, \overline{g}, 0^+) + \frac{1}{\rho} M(f) \overline{M'(g)} - \frac{1}{\rho} M'(f) \overline{M(g)}, \end{aligned}$$

其中

$$w_1(f, \overline{g}, x) = I_{0^+}^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} f(x) I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} \overline{g(x)} - I_{0^+}^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} \overline{g(x)} I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} f(x),$$

$$w_2(f, \bar{g}, x) = I_1^{\beta(1-a)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} f(x) I_0^{(1-a)(1-\beta)} \overline{g(x)} - I_1^{\beta(1-a)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} \overline{g(x)} I_0^{(1-a)(1-\beta)} f(x).$$

由 Hilfer 型分数阶边界条件(2)–(3)和转移条件(4)–(5), 得到 $\langle AF, G \rangle = \langle F, AG \rangle$, 则可得算子 A 为对称算子。

推论 1 问题(1)–(5)的特征值为实特征值。

现在假设式(1)–(5)的特征函数为实值函数。

推论 2 Hilfer 型分数阶 S-L 问题(1)–(5)的不同特征值对应的特征函数为正交的, 即有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p_1} \int_{-1}^0 f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{p_2} \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \\ & + \frac{1}{\rho} \left(c_1 {}^c I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} f(-1) - c_2 {}^c I_{-1^+}^{\alpha, \beta} f(-1) \right) \left(c_1 {}^c I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} \overline{g(-1)} - c_2 {}^c I_{-1^+}^{\alpha, \beta} \overline{g(-1)} \right) = 0. \end{aligned}$$

4 分数阶 S-L 问题解的存在唯一性

引理 2 方程 $L_a u + \lambda u = 0, x \in (0, 1]$, 在 Hilfer 型分数阶转移条件(4)–(5)下的等价积分形式为

$$u(x) = u_0(x) + \frac{1}{p_2} I_{0^+}^{\alpha, \beta} {}^c D_1^{\beta(1-a)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} [N_u + (\lambda + q(x))u(x)] \quad (9)$$

其中, $N_u = {}^c D_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} (I_1^{\beta(1-a)} p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(x)) - {}^c D_{1^+}^{\alpha+\beta-a\beta} (I_1^{\beta(1-a)} p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(x))$ 。

证明 $D_{1^+}^{\alpha, \beta} p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(x) + (\lambda + q(x))u(x) = 0$, 方程两边作用积分算子 $I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta}$, 由文献[15]的定理 2.3 推得 $I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} D_{1^+}^{\alpha, \beta} p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(x) + I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} (\lambda + q(x))u(x) = 0$, 故有

$$-I_1^{\beta(1-a)} p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(x) + I_1^{\beta(1-a)} p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(+0) + I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} N_u + I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} (\lambda + q(x))u(x) = 0 \quad (10)$$

在式(10)两侧作用 ${}^c D_1^{\beta(1-a)}$, 并使用转移条件(4)–(5)可得 ${}^c D_1^{\beta(1-a)} I_1^{\beta(1-a)} p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(x) = {}^c D_1^{\beta(1-a)} I_1^{\beta(1-a)} p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(+0) + {}^c D_1^{\beta(1-a)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} N_u + {}^c D_1^{\beta(1-a)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} (\lambda + q(x))u(x)$, 则有 $p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(x) = p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(+0) + {}^c D_1^{\beta(1-a)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} [N_u + (\lambda + q(x))u(x)] = K p_2 D_1^{\beta(1-a)} I_0^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-0) + {}^c D_1^{\beta(1-a)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} [N_u + (\lambda + q(x))u(x)]$, 即 $D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(x) = K D_1^{\beta(1-a)} I_0^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-0) + 1/p_2 \cdot {}^c D_1^{\beta(1-a)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} [N_u + (\lambda + q(x))u(x)]$ 。用 $I_{0^+}^{\alpha, \beta}$ 作用两侧, 由文献[15]的定理 2.2 可推得

$$I_{0^+}^{\alpha, \beta} D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(x) = K I_{0^+}^{\alpha, \beta} D_1^{\beta(1-a)} I_0^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-0) + \frac{1}{p_2} I_{0^+}^{\alpha, \beta} {}^c D_1^{\beta(1-a)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} [N_u + (\lambda + q(x))u(x)],$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{x^{-(1-a)(1+\beta)}}{\Gamma(1-(1-a)(1+\beta))} I_{0^+}^{(1-a)(1+\beta)} u(+0) + K I_{0^+}^{\alpha, \beta} D_1^{\beta(1-a)} I_0^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-0) \\ &+ \frac{1}{p_2} I_{0^+}^{\alpha, \beta} {}^c D_1^{\beta(1-a)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} [N_u + (\lambda + q(x))u(x)] \\ &= \frac{1}{K} \frac{x^{-(1-a)(1+\beta)}}{\Gamma(1-(1-a)(1+\beta))} I_{-1^+}^{(1-a)(1+\beta)} u(-0) + K I_{0^+}^{\alpha, \beta} D_1^{\beta(1-a)} I_0^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-0) \\ &+ \frac{1}{p_2} I_{0^+}^{\alpha, \beta} {}^c D_1^{\beta(1-a)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} [N_u + (\lambda + q(x))u(x)], \end{aligned}$$

则可推得 $u(x) = u_0(x) + 1/p_2 \cdot I_{0^+}^{\alpha, \beta} {}^c D_1^{\beta(1-a)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-a\beta} [N_u + (\lambda + q(x))u(x)]$, 其中

$$u_0(x) = \frac{1}{K} \frac{x^{-(1-a)(1+\beta)}}{\Gamma(1-(1-a)(1+\beta))} I_{-1^+}^{(1-a)(1+\beta)} u(-0) + K I_{0^+}^{\alpha, \beta} D_1^{\beta(1-a)} I_0^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-0).$$

下面定义 $u_m(x, \lambda)$ 来讨论逐次逼近

$$u_m(x, \lambda) = u_0(x, \lambda) + \frac{1}{p_2} I_{0^+}^{\alpha, \beta, c} D_1^{\beta(1-\alpha)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-\alpha\beta} [N_u + (\lambda + q(x)u_{m-1}(x))] \quad (11)$$

引理 3 设 $Q = \max_{x \in [-1, 1]} |q(x)|$, $P_{\mathbb{R}} = \max_{|\lambda| \leq \mathbb{R}} P(\lambda)$, $P(\lambda) = \max_{x \in (0, 1]} u_0(x, \lambda)$, 则对于任意的 m , 有下列的

不等式成立

$$\|u_m(x, \lambda) - u_{m-1}(x, \lambda)\| \leq P_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{j_{\alpha, \beta}}{p_2} (K_{\alpha, \beta} + |\lambda| + Q) \right\}^m \quad (12)$$

其中, $j_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-\alpha\beta)}$,

$K_{\alpha, \beta} =$

$$\frac{1}{(1+\beta-\alpha\beta)(2-\alpha-\beta+\alpha\beta)\Gamma(1-(1-\alpha)(1-\beta))\Gamma(1+\beta-\alpha\beta)\Gamma(\beta-\alpha\beta)\Gamma(1+(1-\alpha)(1-\beta))}.$$

证明 应用数学归纳法, 当 $m=1$ 时, 有 $\|u_1(x, \lambda) - u_0(x, \lambda)\| = \|1/p_2 \cdot I_{0^+}^{\alpha, \beta, c} D_1^{\beta(1-\alpha)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-\alpha\beta} [N_u + (\lambda + q(x))u_0(x)]\|$, 由文献[16]中的引理 2.1 和推论 2.3 可得

$$\begin{aligned} & \|u_1(x, \lambda) - u_0(x, \lambda)\| \\ & \leq \frac{1}{p_2} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{1}{(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\alpha\beta)} \|N_u + (\lambda + q(x))u_0(x, \lambda)\| \\ & \leq \frac{1}{p_2} j_{\alpha, \beta} (\|N_u + (\lambda + q(x))u_0(x, \lambda)\|) \\ & \leq \left\{ \frac{j_{\alpha, \beta}}{p_2} (K_{\alpha, \beta} + |\lambda| + Q) \right\} P_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

假设式(12)在 $m-1$ 时成立, 有

$$\|u_{m-1}(x, \lambda) - u_{m-2}(x, \lambda)\| \leq P_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{j_{\alpha, \beta}}{p_2} (K_{\alpha, \beta} + |\lambda| + Q) \right\}^{m-1},$$

则可推得

$$\begin{aligned} & \|u_m(x, \lambda) - u_{m-1}(x, \lambda)\| \\ & = \left\| \frac{1}{p_2} I_{0^+}^{\alpha, \beta, c} D_1^{\beta(1-\alpha)} I_{0^+}^{\alpha+\beta-\alpha\beta} [N_{m-1} - N_{m-2} + (\lambda + q(x))(u_{m-1}(x, \lambda) - u_{m-2}(x, \lambda))] \right\| \\ & \leq \frac{j_{\alpha, \beta}}{p_2} [\|N_{m-1} - N_{m-2}\| + \|(\lambda + q(x))(u_{m-1}(x, \lambda) - u_{m-2}(x, \lambda))\|] \\ & \leq \frac{j_{\alpha, \beta}}{p_2} (K_{\alpha, \beta} + |\lambda| + Q) \|u_{m-1}(x, \lambda) - u_{m-2}(x, \lambda)\| \\ & \leq P_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{j_{\alpha, \beta}}{p_2} (K_{\alpha, \beta} + |\lambda| + Q) \right\}^m. \end{aligned}$$

注 1 对于以下初值问题

$$\begin{cases} D_0^{\alpha, \beta} p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(x) + (\lambda + q(x))u(x) = 0, x \in [-1, 0) \\ I_{-1^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} u(-1) = (c_2 - \lambda c_2') p_1 \\ D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-1) = c_1 - \lambda c_1' \end{cases} \quad (13)$$

使用同引理 2 中类似的方法, 可得到式(13)的等价积分形式为

$$u(x) = u_0(x) + \frac{1}{p_1} I_{-1^+}^{\alpha, \beta, c} D_0^{\alpha, \beta} I_{-1^+}^{\alpha + \beta - \alpha\beta} (N_u + (\lambda + q(x))u(x)),$$

$$\text{其中, } u_0(x) = p_1 \frac{(x+1)^{-(1-\alpha)(1-\beta)}}{\Gamma(1-(1-\alpha)(1-\beta))} (c_2 - \lambda c_2') + I_{-1^+}^{\alpha, \beta} (c_1 - \lambda c_1').$$

引理 4 设 $Q = \max_{x \in [-1, 1]} |q(x)|$, 若 $\frac{\varpi_1}{\varpi_2} (2p_1 + |\lambda| + Q) < 1$, 则初值问题(13)在区间 $[-1, 0)$ 上有唯一解, 其中

$$\varpi_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{(2-\beta(1-\alpha))\Gamma(1-\beta(1-\alpha))} \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\alpha\beta+1)},$$

$$\varpi_2 = (1+\beta-\alpha\beta)(2-\alpha-\beta+\alpha\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta+\alpha\beta)\Gamma(\beta-\alpha\beta+1)\Gamma(1+(1-\alpha)(1-\beta)).$$

证明 由注 1 得到该问题的一个相应积分方程为

$$u(x) = u_0(x) + \frac{1}{p_1} I_{-1^+}^{\alpha, \beta, c} D_0^{\alpha, \beta} I_{-1^+}^{\alpha + \beta - \alpha\beta} (N_u + (\lambda + q(x))u(x)),$$

$$\text{其中, } u_0(x) = p_1 \frac{(x+1)^{-(1-\alpha)(1-\beta)}}{\Gamma(1-(1-\alpha)(1-\beta))} (c_2 - \lambda c_2') + I_{-1^+}^{\alpha, \beta} (c_1 - \lambda c_1'). \text{ 构造 } \phi = T\phi, \text{ 其中映射 } T \text{ 的}$$

作用法则为

$$Tf = u_0(x) + \frac{1}{p_1} I_{-1^+}^{\alpha, \beta, c} D_0^{\alpha, \beta} I_{-1^+}^{\alpha + \beta - \alpha\beta} (N_f + (\lambda + q(x))f),$$

则可得

$$\|Tf - Tg\| = \left\| \frac{1}{p_1} I_{-1^+}^{\alpha, \beta, c} D_0^{\alpha, \beta} I_{-1^+}^{\alpha + \beta - \alpha\beta} [(N_f - N_g) + (\lambda + q(x))(f - g)] \right\|.$$

应用文献[19]中的引理 2.1 可得

$$\|Tf - Tg\| \leq \frac{\varpi_1}{p_1} \|N_f - N_g\| + \|(q(x) + \lambda)(f - g)\|.$$

再根据文献[16]中的引理 2.1 和推论 2.3, 可得

$$\begin{aligned} N_f - N_g &= {}^c D_{-1^+}^{\alpha + \beta - \alpha\beta} (I_0^{\beta(1-\alpha)} p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta}) (f - g) - {}^c D_{0^+}^{\alpha + \beta - \alpha\beta} (I_0^{\beta(1-\alpha)} p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta}) (f - g) \\ &\leq \frac{2p_1 \|f - g\|}{\varpi_1}. \end{aligned}$$

$$\text{因此, } \|Tf - Tg\| \leq \frac{\varpi_1}{\varpi_2} (2p_1 + |\lambda| + Q) \|f - g\|.$$

若 $\frac{\varpi_1}{\varpi_2} (2p_1 + |\lambda| + Q) < 1$, 由压缩映射定理可知, 映射 T 在空间 $\langle C[-1, 0), \|\cdot\| \rangle$ 上是压缩的, 因此 $\phi = T\phi$ 有唯一解。

对于 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, 设 $\phi_{1,\lambda}(x) = \phi_1(x, \lambda)$ 是定义在区间 $[-1, 0)$ 上的方程(1)的解, 并且满足初始条件

$$\begin{cases} I_{-1^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} u(-1) = (c_2 - \lambda c_2') p_1 \\ D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-1) = c_1 - c_1' \lambda \end{cases} \quad (14)$$

对于任意 $x \in [-1, 0)$, $\phi_1(x, \lambda)$ 是关于 λ 的整函数。由引理 4 可知, 带有初始条件(14)的方程(1)有唯一解 $\phi_1(x, \lambda)$ 。

设 $\phi_{2,\lambda}(x) = \phi_2(x, \lambda)$ 是定义在区间 $(0, 1]$ 上的方程(1)的解, 并且满足

$$\begin{cases} I_{0^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} \phi(+0) = \frac{1}{K} I_{-1^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} \phi(-0) \\ I_1^{\beta(1-\alpha)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} \phi(+0) = K I_1^{\beta(1-\alpha)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} \phi(-0) \end{cases} \quad (15)$$

同样, $\phi_2(x, \lambda)$ 是关于 λ 的整函数。

注2 对于下面的初值问题

$$\begin{cases} D_1^{\alpha, \beta} p_2 D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(x) + (\lambda + q(x))u(x) = 0, x \in (0, 1] \\ I_{0^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} u(+0) = \frac{1}{K} I_{-1^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} u(-0) \\ I_1^{\beta(1-\alpha)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(+0) = K I_1^{\beta(1-\alpha)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} u(-0) \end{cases} \quad (16)$$

使用与引理2和引理4相同的方法, 可以证得 $\frac{\varpi_1}{\varpi_2}(2p_2 + |\lambda| + Q) < 1$ 时初值问题(16)在区间 $(0, 1]$ 上有

唯一解 $\phi_2(x, \lambda)$ 。显然, 可将定义在 $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 上的函数 $\phi(x, \lambda)$ 表示为

$$\phi(x, \lambda) = \begin{cases} \phi_1(x, \lambda), x \in [-1, 0) \\ \phi_2(x, \lambda), x \in (0, 1] \end{cases},$$

则 $\phi(x, \lambda)$ 是在区间 $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 上满足边界条件(2)和转移条件(4)–(5)的方程(1)的解。

同样, 满足初始条件 $\begin{cases} I_{0^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} u(1) = hp_2 \\ D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(1) = 1 \end{cases}$ 的问题(1)有唯一解 $\chi_2(x, \lambda)$, 对于任意 $x \in (0, 1]$, $\chi_2(x, \lambda)$

是关于参数 λ 的整函数。

定义 λ 是方程(1)的解, 此时式(1)满足初始条件

$$\begin{cases} I_{-1^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} u(-0) = K I_{0^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} \chi_2(+0, \lambda) \\ I_1^{\beta(1-\alpha)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} u(+0) = K I_1^{\beta(1-\alpha)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} \chi_2(-0, \lambda) \end{cases},$$

对于任意 $x \in [-1, 0)$, $\chi_1(x, \lambda)$ 是关于参数 λ 的整函数。因此, 同样可以将定义在区间 $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 上的函数 $\chi(x, \lambda)$ 表示为

$$\chi(x, \lambda) = \begin{cases} \chi_1(x, \lambda), x \in [-1, 0) \\ \chi_2(x, \lambda), x \in (0, 1] \end{cases}.$$

显然, $\chi(x, \lambda)$ 是方程(1)满足边界条件(3)以及转移条件(4)–(5)的解。

5 分数阶朗斯基行列式

考虑 Hilfer 型分数阶 Wronskians (朗斯基行列式)

$$W_1(x, \lambda) = \begin{vmatrix} I_{-1^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} \phi_1(x, \lambda) & I_{-1^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} \chi_1(x, \lambda) \\ I_0^{\beta(1-\alpha)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} \phi_1(x, \lambda) & I_0^{\beta(1-\alpha)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} \chi_1(x, \lambda) \end{vmatrix},$$

$$W_2(x, \lambda) = \begin{vmatrix} I_{0^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} \phi_2(x, \lambda) & I_{0^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)} \chi_2(x, \lambda) \\ I_1^{\beta(1-\alpha)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} \phi_2(x, \lambda) & I_1^{\beta(1-\alpha)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} \chi_2(x, \lambda) \end{vmatrix},$$

其中, x 独立且为整函数, 通过简单计算可得 $W_1(x, \lambda) = W_2(x, \lambda)$, 令 $W(\lambda) = W_1(\lambda) = W_2(\lambda)$ 。

引理5 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $W_F(x, \lambda) = -W^3(x, \lambda)$, 其中

$$W_F(x, \lambda) = \begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & L_1(\chi_1) & L_1(\phi_2) & L_1(\chi_2) \\ L_2(\phi_1) & L_2(\chi_1) & L_2(\phi_2) & L_2(\chi_2) \\ L_3(\phi_1) & L_3(\chi_1) & L_3(\phi_2) & L_3(\chi_2) \\ L_4(\phi_1) & L_4(\chi_1) & L_4(\phi_2) & L_4(\chi_2) \end{vmatrix}.$$

证明 通过函数 $\phi_i(x, \lambda)$ 和 $\chi_i(x, \lambda)$, $i = 1, 2$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned}
W_F(x, \lambda) &= \begin{vmatrix} 0 & -W_1(x, \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_2(x, \lambda) & 0 \\ I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} \phi_1(-0, \lambda) & I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} \chi_1(-0, \lambda) & KI_{0^+}^{(1-a)(1-\beta)} \phi_2(+0, \lambda) & KI_{0^+}^{(1-a)(1-\beta)} \chi_2(+0, \lambda) \\ I_{0^-}^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} \phi_1(-0, \lambda) & I_{0^-}^{\beta(1-a)} D_{-1^+}^{\alpha, \beta} \chi_1(-0, \lambda) & \frac{1}{K} I_{1^-}^{\beta(1-a)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} \phi_2(+0, \lambda) & \frac{1}{K} I_{1^-}^{\beta(1-a)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} \chi_2(+0, \lambda) \end{vmatrix} \\
&= -W_1(x, \lambda) W_2(x, \lambda) \begin{vmatrix} KI_{0^+}^{(1-a)(1-\beta)} \phi_2(+0, \lambda) & KI_{0^+}^{(1-a)(1-\beta)} \chi_2(+0, \lambda) \\ \frac{1}{K} I_{1^-}^{\beta(1-a)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} \phi_2(+0, \lambda) & \frac{1}{K} I_{1^-}^{\beta(1-a)} D_{0^+}^{\alpha, \beta} \chi_2(+0, \lambda) \end{vmatrix} \\
&= -W_1(x, \lambda) W_2^2(x, \lambda) \\
&= -W^3(x, \lambda).
\end{aligned}$$

推论 3 W_F 的零点组成了 $W(\lambda)$ 的零点。

引理 6 设 $u_0(\lambda)$ 是特征值 λ_0 对应的特征函数, 则函数 $u_0(x)$ 可表示为

$$u_0(x) = \begin{cases} d_1 \phi_1(x, \lambda_0) + d_2 \chi_1(x, \lambda_0), & x \in [-1, 0) \\ d_3 \phi_2(x, \lambda_0) + d_4 \chi_2(x, \lambda_0), & x \in (0, 1] \end{cases},$$

其中, $d_i (i=1, 2, 3, 4)$ 至少有一个不为零。

定理 2 Hilfer 型分数阶边值问题(1)–(5)的特征值与特征函数 $W(\lambda)$ 的零点是一致的。

证明 设 λ_0 是 $W(\lambda)$ 的零点, $W(\lambda_0)=0$, 则 $W(\phi_1(x, \lambda_0), \chi_1(x, \lambda_0))=0$ 。因为 $\phi_1(x, \lambda_0)$ 和 $\chi_1(x, \lambda_0)$ 是线性相关的, 所以存在 $k_1 \neq 0$, 有 $\chi_1(x, \lambda_0)=k_1 \phi_1(x, \lambda_0)$ 。由式(14)可知, $c_1 I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} \chi_1(-1, \lambda_0) - c_2 p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta} \chi_1(-1, \lambda_0) - \lambda [c_1' I_{-1^+}^{(1-a)(1-\beta)} \chi_1(-1, \lambda_0) - c_2' p_1 D_{-1^+}^{\alpha, \beta} \chi_1(-1, \lambda_0)] = k_1 [(c_1 - \lambda c_1')(c_2 - \lambda c_2') p_1 - (c_2 - \lambda c_2') p_1 (c_1 - \lambda c_1')] = 0$, 则函数 $\chi(x, \lambda_0)$ 满足式(1)–(5), 是特征值 λ_0 对应的特征函数。

假设 $\lambda = \lambda_0$ 是式(1)–(5)的特征值, $u_0(x)$ 为对应的特征函数, 假定 $W(x, \lambda_0) \neq 0$, 则存在常数 $d_i (i=1, 2, 3, 4)$ 至少有一个不为零, 即有

$$u_0(x) = \begin{cases} d_1 \phi_1(x, \lambda_0) + d_2 \chi_1(x, \lambda_0), & x \in [-1, 0) \\ d_3 \phi_2(x, \lambda_0) + d_4 \chi_2(x, \lambda_0), & x \in (0, 1] \end{cases},$$

则 $W_1(x, \lambda_0) \neq 0, W_2(x, \lambda_0) \neq 0$ 。因为特征函数 $u_0(x, \lambda)$ 满足分数阶边界条件和转移条件(2)–(5), 所以可得到 $L_i(\cdot, \lambda_0) = 0 (i=1, 2, 3, 4)$ 。常数 $c_i (i=1, 2, 3, 4)$ 至少有一个不为零。 $\det(L_i u_0(\cdot, \lambda_0)) = 0$, 即 $W_F(\lambda) = 0$ 。但是由引理 5 可知, 有 $W_F(\lambda) \neq 0$ 与之矛盾, 故定理 2 得证。

参考文献:

- [1] ZETTL A. Sturm-Liouville theory[M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2005.
- [2] BOYCE W E, DIPRIMA R C. Elementary differential equations and boundary value problems[M]. New York: Wiley, 2005.
- [3] LILOV A V, MIKHAILOV Y A. The theory of heat and mass transfer[M]. Minsk: Publishing House of the Belorussian Academy of Sciences, 1963.
- [4] SHKALIKOV A A. Boundary problems for ordinary differential equations with parameter in the boundary conditions[J]. Journal of Soviet Mathematics, 1986, 33(6): 1311-1342.
- [5] AL MDALLAL Q M. On the numerical solution of fractional Sturm-Liouville problems[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2010, 87(12): 2837-2845.

- [6] DEHGHAN M, MINGARELLI A B. Fractional Sturm-Liouville eigenvalue problems, I[J]. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 2020, 114(2):46.
- [7] LI J, QI J G. Note on a nonlocal Sturm-Liouville problem with both right and left fractional derivatives[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2019, 97:14-19.
- [8] LI J, QI J A. Eigenvalue problems for fractional differential equations with right and left fractional derivatives[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 256:1-10.
- [9] QI J G, CHEN S Z. Eigenvalue problems of the model from nonlocal continuum mechanics[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2011, 52(7):537-546.
- [10] RIVERO M, TRUJILLO J J, VELASCO M P. A fractional approach to the Sturm-Liouville problem[J]. *Central European Journal of Physics*, 2013, 11(10):1246-1254.
- [11] ZAYERNOURI M, KARNIADAKIS G E. Fractional Sturm-Liouville eigen-problems: Theory and numerical approximation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 252:495-517.
- [12] YAKAR A, AKDOĞAN Z. On the fundamental solutions of a discontinuous fractional boundary value problem[J]. *Advances in Difference Equations*, 2017, 2017(1):378.
- [13] AKDOĞAN Z, YAKAR A, DEMIRCI M. Discontinuous fractional Sturm-Liouville problems with transmission conditions[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 350:1-10.
- [14] TOMOVSKI Z, SRIVASTAVA H. Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and mittag-leffler type functions[J]. *Integral Transforms and Special Functions*, 2010, 21(11):797-814.
- [15] ZHOU L, HAO X L, LI K, et al. Discontinuous fractional Sturm-Liouville problems with Hilfer derivatives[J]. *Journal of Nonlinear Modeling and Analysis*, 2024, 6(3):775-792.
- [16] KILBAS A A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J, et al. Theory and applications of fractional differential equations[M]. New York: Elsevier Science Incorporated, 2006.
- [17] HILFER R. Applications of fractional calculus in physics[M]. Singapore: World Scientific, 2000.
- [18] 周乐, 郝晓玲. 一类Hilfer分数阶微分方程的平方可积解[J]. *内蒙古大学学报(自然科学版)*, 2024, 55(3): 225-231.
- [19] BALEANU D, DIETHELM K, SCALAS E, et al. Fractional calculus: Models and numerical methods[M]. Singapore: World Scientific, 2012.

(责任编辑 李 宏)

A Class of Hilfer-Type Fractional Sturm-Liouville Problems with Spectral Parameters in Boundary Conditions

WANG Xueling, HAO Xiaoling

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

Abstract: A class of Hilfer-type fractional Sturm-Liouville problems with spectral parameters in the boundary conditions was studied. First, the spectral properties were analyzed and operator symmetry was proved. Second, solution uniqueness was established by iterative methods and contraction mapping. Finally, exact eigenvalue-eigenfunction zero correspondence was shown through constructive analysis.

Key words: fractional differential equation; boundary condition; transmission condition; Hilfer derivative; spectral parameter