文章编号:1674-2869(2025)03-0338-05

量子斯特林热机循环性能分析和优化

方馨婷[1],徐凡羿[1],殷 勇[*1,2],施钦泓[1],尹博今[1]
1. 武汉工程大学光电信息与能源工程学院、数理学院,湖北 武汉 430205;
2. 武汉工程大学热科学与动力工程研究所,湖北 武汉 430205

摘 要:通过建立以一维无限深势阱中相对论粒子为工质的量子斯特林热机循环模型,并考虑高温热源与低温热源之间的热漏,推导出该循环的效率、无量纲功率和Ω函数的数学表达式。进一步分析了该循环在功率-效率和Ω函数-效率方面的最优性能。研究结果表明:当势阱宽度比在1~2之间时,循环输出正功;无量纲功率和效率与势阱宽度比之间呈现开口向下的类抛物线关系曲线,而无量纲功率和无量纲Ω函数与效率之间则呈现扭叶形关系曲线;由最大无量纲功率与最大效率构成的区间为该循环在功率和效率优化下的最优运行区间,在Ω函数与效率优化关系下的最优性能区间为最大Ω函数与最大效率构成的区间。本研究结果有助于了解量子斯特林热机的最优热力性能,为量子斯特林热机的最优区间设计提供依据。

关键词:有限时间热力学;量子斯特林热机循环;性能分析;Ω函数
中图分类号:TK124 **文献标识码**:A **DOI**:10.19843/j.cnki.CN42-1779/TQ.202404005

Analysis and optimization of cyclic performance of quantum Stirling heat engine

FANG Xinting[1], *XU Fanyi*[1], *YIN Yong*[*1,2], *SHI Qinhong*[1], *YIN Bojin*[1]
1. School of Optical Information and Energy Engineering, School of Mathematic and Physics, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China;
2. Institute of Thermal Science and Power Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China

Abstract: By modeling a quantum Stirling heat engine cycle with a relativistic particle in a one-dimensional infinite potential well as the working substance and considering the heat leakage between the high-temperature and low-temperature heat sources, mathematical expressions for efficiency, dimensionless power, and Ω-function of this cycle were derived. The optimal performance of this cycle in terms of power-efficiency and Ω-function-efficiency was further analyzed. The results showed that the cycle outputs positive work when the potential well-to-width ratio is between 1 and 2. A parabolic-like relationship curve with a downward opening is shown between dimensionless power and efficiency and potential well-width ratio, while a twisted-leaf relationship curve was shown between dimensionless power and dimensionless Ω-function and efficiency. The interval consisting of the maximum dimensionless power and the maximum efficiency is the optimal operating interval of this cycle under power and efficiency optimization, and the optimal performance interval under the optimal relationship of Ω-function and efficiency is the interval consisting of the maximum Ω-function and the maximum efficiency. These findings are conducive to understanding the optimal thermodynamic performance of the quantum Stirling heat engine, providing a basis for the design of its optimal interval.

Keywords: finite-time thermodynamics; quantum Stirling heat engine cycle; performance analysis; Ω-function

收稿日期:2024-04-03
基金项目:武汉工程大学科学基金(19QD22);武汉工程大学研究生教育创新基金(CX2022466)
作者简介:方馨婷,硕士研究生。Email:1309039725@qq.com
***通信作者**:殷 勇,博士,副教授。Email:191630147@qq.com
引文格式:方馨婷,徐凡羿,殷勇,等.量子斯特林热机循环性能分析和优化[J].武汉工程大学学报,2025,47(3):338-342 ,354.

有限时间热力学(finite time thermodynamics, FTT)[1-3]以系统的约束条件为基础,旨在研究热力学系统在限制条件内实现最佳性能的方法和策略。近年来,学者们[4-6]将FTT的研究范围扩展至量子力学领域[7-8]。在量子力学的框架下研究热力学系统,探索量子效应对热力学规律的影响,有助于深化对量子系统的理解,拓展热力学的基础理论。随着量子技术的快速发展,量子热力学的研究也成为实际应用的重要组成部分,利用一些常见的量子工质如1/2自旋粒子、谐振子、量子气体等,可以构建多种不同的量子循环模型,研究其热力性质与性能参数,验证量子效应对热力学系统的影响,优化其运行区间,并进一步推动量子热力学的发展。

1984年,Kosloff[9]介绍了量子热机的基本原理。随着时间的推移,一系列深入的研究逐渐揭示了量子效应在能量转换中的重要作用。2014年,吴锋等[10]建立了量子斯特林热机模型,使热机在量子工质方向有了进展。2017年,殷勇等[11]建立了量子斯特林制冷循环模型,对制冷循环的最优性能进行优化。2019年,Thomas 等[12]深化了对量子斯特林循环能级结构和工作原理的理解,为量子热机的理论建模和实现奠定了基础。2021年,Chatterjee等[13-14]进一步拓展了量子斯特林循环的理论模型,强调了量子熵在量子热力学过程中的关键角色。2022年,Myers等[15-16]的研究则集中在探索二核金属复合物作为工质,展示了通过外部压力控制磁耦合调节量子关联度和能级的方法。这些累积的研究成果不仅促进了量子热力学的理论发展,也为量子热机在能源转换和信息处理领域的应用开辟了新的可能,展现了量子技术未来广泛的应用前景。

量子热力循环的研究融合了量子力学与热力学的原理,探索在量子层面上能量转换与传递的规律。不同于传统的热力学循环,量子热力循环利用量子态、量子相干性和量子纠缠等量子效应,旨在突破经典热力学极限,提升能量转换效率。这一研究方向对于开发高效能源技术、实现微观尺度的量子制冷以及量子计算中的热管理具有重要意义。

在探究热机性能目标函数时,功率和效率被视为最重要且广泛关注的两个指标[9,17]。此外,Hernández等[18]建立了一个新的优化基准,称为Ω函数(有用能量与损失的有用能之差)。通过使用Ω函数优化,可以得到最大有用能量和最大效率之间的性能边界,并且不需要熵的表达式。随后,许多学者[19-21]将Ω函数作为目标函数来分析和优化不同的热力循环。本文采用相对论粒子作为工质,基于文献[10]中建立的二能级量子斯特林热机模型,考虑高低温热源间的热漏,导出该斯特林循环的输出功、无量纲功率和效率,并引入Ω函数,分析不同约束条件下的性能极值,得到各性能之间的优化关系,研究结果有利于了解斯特林热机的最优热力性能。

1　理论模型

循环的工质为一维无限深势阱中的粒子,粒子的质量或有效质量为0,所以需考虑相对论效应。势阱宽度介于L_1和L_2之间[10],循环的E-L图(E为粒子能量,L为势阱宽度)如图1所示。循环由等温吸热、等容放热、等温放热、等容吸热过程组成。在等温吸热过程中,粒子通过内部能量通道与高温热源换热,吸收一定的热量,通过势阱宽度的变化对外界做功;在等容放热过程中,势阱宽度保持不变,粒子释放一定热量给蓄热材料;在等温放热过程中,粒子通过内部能量通道与低温热源换热,粒子释放出一定热量,外界通过势阱宽度的变化对粒子做功;在等容吸热过程中,势阱宽度保持不变,蓄热材料释放一定热量给粒子。参照经典热力学的结论,量子系统中内能不变的过程为量子等温过程,势阱宽度不变的过程为量子等容过程[22]。因此,该循环为量子斯特林热机循环。

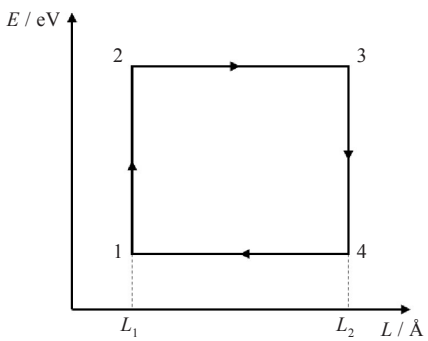

图1　量子斯特林热机循环

Fig. 1　Quantum Stirling heat engine cycle

仅考虑基态和激发态两个能级,图2描述了该量子循环中粒子在各个能级占有概率的变化过程,其中,n(n=1,2)表示粒子所处能级。状态点1到状态点2(过程1→2)是一个内部回热过程,在状态点1时,粒子只处于基态,在该过程中,粒子从内部蓄热材料吸收热量,向第一激发态跃迁,在状态点2时,粒子在基态与第一激发态都有一定的占有

概率。过程2→3粒子的内能e_h保持不变,从高温热源吸收热量跃迁到第一激发态。过程3→4也是一个内部回热过程,粒子通过内部能量通道向回热器中的储热材料放热,在状态点4,粒子以不同的概率处于基态和激发态上。过程4→1粒子的内能e_c保持不变,向外界释放热量回到基态,完成一个循环。经计算可知,在理想情况下,量子斯特林热机能够实现理想的回热效果[22],即回热过程1→2中吸收的热量与回热过程3→4中释放的热量相等。

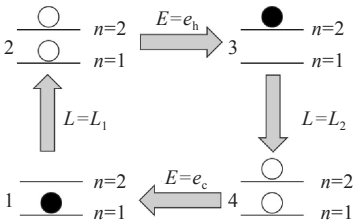

图2 粒子跃迁的能级模型

Fig. 2 Energy level model for particle transiton

2 量子力学分析

考虑相对论效应时,粒子的质量或有效质量为0,粒子的能量e表示为:

$$e = cq \tag{1}$$

式中:q为动量,MeV;c为光速,m/s。

波函数$\varphi(L)$满足[23-24]:

$$\hbar^2 c^2 \frac{\mathrm{d}^2\phi(L)}{\mathrm{d}L^2} + e^2\phi(L) = 0 \tag{2}$$

式中:$\hbar$为约化普朗克常量,J·s。

粒子能量本征值e_0为[23-24]:

$$e_0 = \frac{hc}{2L}m \tag{3}$$

式中:h为普朗克常量,J·s;m为量子数。

由边界条件$\varphi(0)=0$、$\varphi(\infty)=0$,得二能级粒子在状态点i的能量期望值e_i为:

$$e_i = \sum_{n=1}^{2} p_{in}e_{in} = \frac{hc}{2L_i}\left(2 - p_{i1}\right) \tag{4}$$

式中:i=1、2、3、4分别对应状态点1~状态点4;p_{in}为在状态点i时粒子处于第n个能级的占有概率,对任意状态点i,p_{in}满足归一化条件(即$p_{i1}+p_{i2}=1$);e_{in}为在状态点i时粒子处于第n个能级具有的能量。

由于在状态点1粒子处于基态,在状态点3粒子处于激发态,可得:

$$p_{11} = 1,\ p_{12} = 0,\ p_{31} = 0,\ p_{32} = 1$$

因此粒子在4个瞬态的总能量分别为[10]:

$$e_1 = \frac{hc}{2L_1},\ e_2 = \frac{hc}{2L_1}\left(2 - p_{21}\right)$$

$$e_3 = \frac{hc}{L_2},\ e_4 = \frac{hc}{2L_2}\left(2 - p_{41}\right)$$

设过程2→3中粒子在基态的占有概率为p_{h1},过程4→1中粒子在基态的占有概率为p_{c1},则过程中系统总能量为:

$$E_{23} = \frac{hc}{2L}\left(2 - p_{h1}\right),\ E_{41} = \frac{hc}{2L}\left(2 - p_{c1}\right)$$

量子系统中内能不变的过程为量子等温过程,所以$e_2=e_3=E_{23}$,$e_4=e_1=E_{41}$,故可得:

$$\frac{hc}{2L_1}\left(2 - p_{21}\right) = \frac{hc}{L_2} = \frac{hc}{2L}\left(2 - p_{h1}\right) \tag{5}$$

$$\frac{hc}{2L_1} = \frac{hc}{2L_2}\left(2 - p_{41}\right) = \frac{hc}{2L}\left(2 - p_{c1}\right) \tag{6}$$

3 主要性能参数

根据量子热力学知识可得系统吸收的热量(Q)、功(W)分别表示为:

$$\mathrm{d}Q = \sum_{n=1}^{2} e_{in}\,\mathrm{d}p_{in},\ \mathrm{d}W = \sum_{n=1}^{2} p_{in}\,\mathrm{d}e_{in}$$

在量子循环中,系统通过势阱壁的运动对外做功。

根据文献[24]可得粒子作用于势阱壁上的力F:

$$F = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}L} = \sum_{n=1}^{2} p_{in}\frac{\mathrm{d}e_{in}}{\mathrm{d}L} = \sum_{n=1}^{2} p_{in}\frac{hc}{2L^2}n \tag{7}$$

将式(5-6)代入式(7),可得系统在过程2→3和过程4→1中作用在势阱壁上的力分别为:

$$F_{23} = -\frac{hc}{2L^2}\left(2 - p_{h1}\right) = -\frac{hc}{2LL_1}\left(2 - p_{21}\right) \tag{8}$$

$$F_{41} = -\frac{hc}{2L^2}\left(2 - p_{c1}\right) = -\frac{hc}{2LL_2}\left(2 - p_{41}\right) \tag{9}$$

系统在等温过程2→3中从外部热源吸收的热量Q_{23}等于该过程系统对外所做的功W_{23}:

$$Q_{23} = W_{23} = -\int_{L_1}^{L_2} F_{23}\,\mathrm{d}L = \frac{hc}{2L_1}\left(2 - p_{21}\right)\ln\frac{L_2}{L_1} \tag{10}$$

同理,系统在等温过程4→1中向外部热源放出的热量Q_{41}为:

$$Q_{41} = \left|-\int_{L_1}^{L_2} F_{41}\,\mathrm{d}L\right| = \frac{hc}{2L_2}\left(2 - p_{41}\right)\ln\frac{L_2}{L_1} \tag{11}$$

基于文献[11]和文献[17]所提出的处理方案,在考虑高低温热源之间存在热漏Q_r的情况下,设:

$$Q_r = \alpha\frac{hc}{2L_2} \tag{12}$$

式中,α为比例系数,是一个常数。

考虑到热漏Q_r的影响,将高温热源和系统之间的热交换量表示为Q_h,低温热源和系统之间的热交换量表示为Q_c,则:

$$Q_h = Q_{23} + Q_r = \frac{hc}{2L_1}\left(2 - p_{21}\right)\ln\frac{L_2}{L_1} + Q_r \tag{13}$$

$$Q_c = Q_{41} + Q_r = \frac{hc}{2L_2}\left(2 - p_{41}\right)\ln\frac{L_2}{L_1} + Q_r \tag{14}$$

在两个回热过程中,有:

$$Q_{12} = e_2 - e_1, Q_{34} = e_4 - e_3$$

由于e_2=e_3,e_4=e_1,可得 Q_{12}=|Q_{34}|,即量子斯特林热机可以实现理想回热[10]。

由式(5-6)可得:

$$p_{21} = 2\left(1 - \frac{L_1}{L_2}\right),\ p_{41} = 2 - \frac{L_2}{L_1}$$

联立式(5-14)并化简可得量子斯特林热机每一循环的输出功为:

$$W = Q_h - Q_c = \frac{hc}{2L_1}\left(2\frac{L_1}{L_2} - 1\right)\ln\frac{L_2}{L_1} \tag{15}$$

给定L_1,并令势阱宽度比x=L_2/L_1,可得无量纲输出功W^*为:

$$W^* = W\Big/\left(\frac{hc}{2L_1}\right) = \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x \tag{16}$$

可得效率η为:

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{2 - x}{2 + \dfrac{\alpha}{\ln x}} \tag{17}$$

令$\partial\eta/\partial x$=0,设此时x取值为x_m,得到循环的最大循环效率η_{max}为:

$$\eta_{max} = \frac{x_m \ln^2 x_m}{\alpha} \tag{18}$$

式中,x_m满足关系式$\dfrac{\alpha\left(2 - x_m\right)}{x_m \ln^2 x_m} = 2 + \dfrac{\alpha}{\ln x_m}$。

根据文献[24-25]对周期的处理方法可将整个循环的周期τ表示为:

$$\tau = \tau_{12} + \tau_{34} + \tau_{23} + \tau_{41} = \frac{2\left(L_2 - L_1\right)}{v} + \frac{2\left(T_H - T_L\right)}{M} \tag{19}$$

式中:M是与回热材料特性有关的常数,T_H与T_L为高/低温热源的温度,v为势阱壁平均运动速度,由此可得循环功率P为:

$$P = \frac{W}{\tau} = \frac{hcv}{4L_1^2}\cdot\frac{\left(\dfrac{2}{x} - 1\right)\ln x}{(x - 1) + \dfrac{vT_L}{M}(r - 1)} \tag{20}$$

式中,r=T_H/T_L为高温热源与低温热源温度比。

无量纲功率P^*=P/(hcv/(4L_1^2))可表示为:

$$P^* = \frac{\left(\dfrac{2}{x} - 1\right)\ln x}{(x - 1) + \dfrac{vT_L}{M}(r - 1)} \tag{21}$$

由文献[26]可知,Ω函数定义为系统输入的有用能与损失的有用能之差,可得:

$$\Omega = W_{out} - \left(W_{max} - W_{out}\right) = 2W_{out} - W_{max} \tag{22}$$

式中,W_{out}为有用能,W_{max}为最大有用能。

Ω函数随时间的变化率Ω^*=Ω/τ,联立式(17)和式(21)可得:

$$\Omega^* = \frac{\left(2\eta - \eta_{max}\right)P^*}{\eta} = \frac{2\alpha(2 - x)\ln x - x_m \ln^2 x_m (2\ln x + \alpha)}{\alpha x^2} \tag{23}$$

4　循环的性能分析和优化

计算时取高/低温热源温度比r=2,常数$\xi = \dfrac{vT_L}{M}$ = 2,代入到式(17)与式(20),可以分别得到该循环的效率η和无量纲功率P^*与势阱宽度比x的关系曲线,如图3所示,易看出循环的效率与无量纲功率存在极大值。

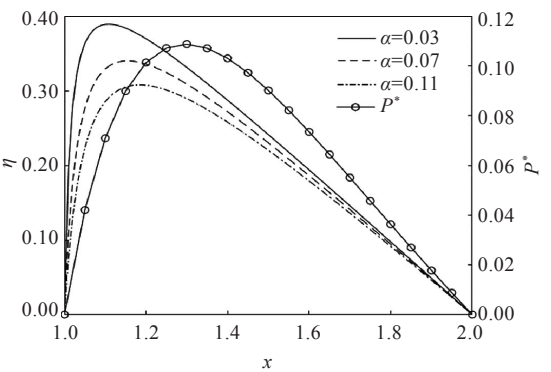

图3　效率与无量纲功率和势阱宽度比的关系曲线

Fig. 3　The curve of η-x and P^*-x

图4为热漏系数α不同时P^*和η、Ω^*和η的关系曲线,曲线均呈现出扭叶型。

由式(17)和式(21)可以绘出图4(a),由图4(a)可知,α对P^*无影响,而对η的影响较显著。实际上,循环的η随α单调递减[10]。例如,在α=0.03时,存在1个无量纲功率最大值P^*_{max}(0.109)和与之相对应的效率η_{mP}(0.331),同样也存在1个最大的效率η_{max}(0.389)及其对应的无量纲功率$P^*_{m\eta}$(0.075)。当α=0.07时,η_{mP}=0.311,P^*_{max}=0.109,η_{max}=0.340,$P^*_{m\eta}$=0.091。α=0.11时,η_{mP}=0.290,P^*_{max}=0.109,η_{max}=0.308,$P^*_{m\eta}$=0.098。可见,α越大,循环的最优设计区间越小。以α=0.07为例,将曲线分段,点(η_{mP},P^*_{max})到点(η_{max},$P^*_{m\eta}$)之间的区

域为循环在效率与功率优化关系下的最优设计区间。

由式(17)和式(23)可以绘出图4(b),以 α=0.07为例,可以看出存在1个 $\Omega^*_{\max}$ 和对应的 $\eta_{m\Omega^*}$,同时存在 $\eta_{\max}$ 和相应的 $\Omega^*_{m\eta}$。当 $\Omega^*<\Omega^*_{\max}$ 时,1个 Ω^* 对应2个效率 $\eta_1(\eta_1<\eta_{m\Omega^*})$ 和 $\eta_2(\eta_2>\eta_{m\Omega^*})$。当 $\eta<\eta_{m\Omega^*}$ 时,Ω^* 单调增加。当 $\eta_{\max}>\eta>\eta_{m\Omega^*}$ 且 $\Omega^*_{m\eta}>\Omega^*>\Omega^*_{\max}$ 时,$\eta_{\max}$ 呈单调递减趋势。同样,1个 η 对应于2个 Ω 函数 $\Omega^*_1(\Omega^*_1<\Omega^*_{m\eta})$ 和 $\Omega^*_2(\Omega^*_2>\Omega^*_{m\eta})$。因此,点 $(\eta_{m\Omega^*},\Omega^*_{\max})$ 到点 $(\eta_{\max},\Omega^*_{m\eta})$ 之间的区域为循环在 Ω 函数与效率优化关系下的最优性能区间。

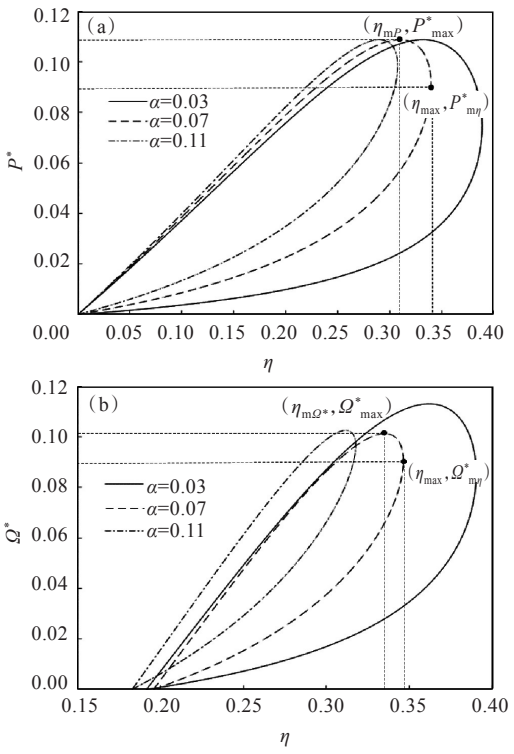

图4 无量纲功率与效率(a)、Ω^*和效率(b)的关系曲线

Fig. 4 The curves of P^*-η (a) and Ω^*-η(b)

5 结 论

以囚禁于一维无限深势阱中的极端相对论粒子为工质,建立了二能级量子斯特林热机循环模型,导出了循环无量纲功率 P^*、效率 η、Ω 函数随时间的变化率 Ω^* 的解析式,研究了循环的最优性能,所得结论如下:

(1)当势阱宽度比 $1<x<2$($x=L_2/L_1$)时,循环输出正功。P^* 与 η 的关系曲线呈现回原点的扭叶形,由点 $(\eta_{mP},P^*_{\max})$ 到点 $(\eta_{\max},P^*_{m\eta})$ 构成的区间为该循环在功率与效率优化下的最优运行区间。

(2)Ω^* 与 η 的关系曲线呈现扭叶形,循环在 Ω^* 函数与效率 η 优化关系下的最优性能区间为点 $(\eta_{m\Omega^*},\Omega^*_{\max})$ 到点 $(\eta_{\max},\Omega^*_{m\eta})$ 之间的区域。

参考文献

[1] CURZON F L, AHLBORN B. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output [J]. American Journal of Physics, 1975, 43(1): 22-24.

[2] ANDRESEN B, SALAMON P, BERRY R S. Thermodynamics in finite time [J]. Physics Today, 1984, 37(9): 62-70.

[3] CHEN L G. Progress in entransy theory and its applications [J]. Chinese Science Bulletin, 2012, 57(34): 4404-4426.

[4] 刘晓威, 陈林根, 丁泽民, 等. 不可逆谐振子卡诺制冷机有限烟时间经济最优性能[J]. 工程热物理学报, 2019, 40(5): 974-981.

[5] 吴锋, 陈林根, 孙丰瑞. 量子卡诺制冷机制冷率与熵产率的协调优化性能[J]. 低温工程, 1996(1): 1-5.

[6] 吴锋, 孙丰瑞, 陈林根. 1/2 自旋不可逆量子卡诺热机输出功率和熵产率的协调优化[J]. 武汉化工学院学报, 1997, 19(2): 88-91.

[7] DONG K, HUO F, ZHANG S J. Thermodynamics at microscales: $3D\rightarrow 2D$, $1D$ and $0D$ [J]. Green Energy & Environment, 2020, 5(3): 251-258.

[8] OU C J, ABE S. Weak invariants, temporally local equilibria and isoenergetic processes described by the Lindblad equation [J]. Europhysics Letters, 2019, 125(6): 60004.

[9] KOSLOFF R. A quantum mechanical open system as a model of a heat engine [J]. The Journal of Chemical Physics, 1984, 80(4): 1625-1631.

[10] 吴锋, 汪拓, 陈林根, 等. 量子斯特林热机的输出功和热效率[J]. 机械工程学报, 2014, 50(4): 150-154.

[11] 殷勇, 吴锋, 陈林根. 量子斯特林制冷循环性能研究[J]. 工程热物理学报, 2017, 38(10): 2061-2067.

[12] THOMAS G, DAS D, GHOSH S. Quantum heat engine based on level degeneracy [J]. Physical Review E, 2019, 100(1): 012123.

[13] CHATTERJEE S, KONER A, CHATTERJEE S, et al. Temperature-dependent maximization of work and efficiency in a degeneracy-assisted quantum Stirling heat engine [J]. Physical Review E, 2021, 103(6): 062109.

[14] HAMEDANI-RAJA S, MANISCALCO S, PARAO-ANU G S, et al. Finite-time quantum Stirling heat engine [J]. New Journal of Physics, 2021, 23(3): 033034.

[15] MYERS N M, ABAH O, DEFFNER S. Quantum thermodynamic devices: from theoretical proposals to experimental reality [J]. AVS Quantum Science, 2022, 4(2): 027101.

(下转第354页)