第 62 卷　第 5 期
2026 年 9 月

南京大学学报(自然科学)
JOURNAL OF NANJING UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)

Vol. 62, No. 5
Sept., 2026

DOI:10.13232/j.cnki.jnju.2026.05.011

基于项目线性响应值集的知识评估自动机

董志成[1,2,3],林艺东[1,2,3*],孙　文[1,2,3],黄　菊[1,2,3]

(1.福建省粒计算及其应用重点实验室,闽南师范大学,漳州,363000;2.数字福建气象大数据研究所,闽南师范大学,漳州,363000;3.闽南师范大学数学与统计学院,漳州,363000)

摘　要:知识结构理论是一种数学心理学交叉理论,已成功应用于个性化知识评估.面向多分知识评估场景,现有研究基于项目响应值集相同的假设,构建出知识评估自动机,但无法适应更复杂的教育应用.基于此,面向项目响应值集多样的多分知识评估场景,构建一种新的知识评估自动机并探索知识评估的过程.具体地,首先构建面向项目线性响应值集的多分知识评估自动机,并基于项目间的邻接关系建立项目提问规则.其次,结合自动机状态更新机制与项目提问规则,建立项目线性响应值集下的知识评估过程.最后,通过实证分析说明自动机评估过程的可行性与有效性.

关键词:知识评估,自动机,响应值集,提问规则,多分知识状态

中图分类号:TP18　　**文献标志码**:A

Knowledge assessment automaton based on project linear response value set

Dong Zhicheng[1,2,3], Lin Yidong[1,2,3*], Sun Wen[1,2,3], Huang Ju[1,2,3]

(1. Fujian Key Laboratory of Granular Computing and Applications, Minnan Normal University, Zhangzhou, 363000, China;
2. Institute of Meteorological Big Data-Digital Fujian, Minnan Normal University, Zhangzhou, 363000, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou, 363000, China)

Abstract: Knowledge structure theory is an interdisciplinary framework at the intersection of mathematics and psychology, which has been successfully applied to personalized knowledge assessment. In multi-category knowledge assessment scenarios, existing research assumes that items share identical response value sets and constructs a knowledge-assessment automaton. However, this approach cannot accommodate more complex educational applications. Accordingly, to address multi-category knowledge assessment settings characterized by diverse item response value sets, we develop a novel knowledge-assessment automaton and explore the corresponding assessment process. Specifically, we first construct a multi-category knowledge-assessment automaton tailored to linear item response value sets and, based on adjacency relations among items, establish item-questioning rules. Next, by integrating the automaton's state-update mechanism with these questioning rules, we formulate a knowledge-assessment procedure for linear item response value sets. Finally, empirical analysis demonstrates the feasibility and effectiveness of the automaton-based assessment process.

Keywords: knowledge assessment, automaton, set of response values, questioning rules, polytomous knowledge state

《教育强国建设规划纲要(2024—2035年)》将大数据与人工智能赋能教育评价列为建设高质量教育体系的核心改革举措,为知识评估模式革新指出了明确方向.这一政策导向与知识结构理

基金项目:国家自然科学基金(12571497,12301585,12201284),福建省自然科学基金(2023J05175),福建省教育研究项目(FBJY-20240024),闽南师范大学校级一般项目(YJG202311)

收稿日期:2026—06—22

*通信联系人,E-mail: yidong_lin@yeah.net

论(Knowledge Structure Theory,KST)的核心应用领域(知识评估)高度契合,凸显了基于KST的知识评估[1−6]在新时代教育发展中的关键价值. KST由Doignon and Falmagne[7−8]提出,该理论以教育心理学与拓扑空间学为理论基础,构建了一套契合教育教学规律的数学理论体系,为知识评估提供了高效可行的科学方法与数学框架.

在传统的二分KST中,个体对项目的响应仅分为正确或错误两类,在进行知识评估时有局限性. 针对这一局限性,Schrepp[9]首次将KST推广到具有两个以上答案的项目,以项目线性有序的响应值集进行知识评估. Bartl and Belohlavek[10]讨论了基于完全剩余格的分级知识状态. Stefanutti et al[11]基于Schrepp[9]的工作,将项目的响应值集推广到完备格上,并定义了多分知识结构. Heller[12]整合了Schrepp[9]和Stefanutti et al[11]建立的理论,验证了项目的优先关系与多分知识结构的一一对应的关系,并考虑了项目特定的响应值集,在面向不同项目不同响应值集时为知识评估提供理论支撑. 在Rusch and Wille[13]的研究基础上,还建立了KST与形式概念分析,将粗糙集、模糊集和概念认知学习等学科交叉关联[14−20].

基于KST的知识评估是一种以知识点依赖关系为核心,兼具精准性与适应性的个体知识状态评估方法. de Chiusole et al[21]基于KST开发了一种用于学习统计课程的智能教学系统,依托评估与学习双模块的信息交互实现个性化学习,实现了对个体的内在知识评估. 陈惠琴等[22]聚焦技能维度,给出了技能背景下的针对性评估方法,通过匹配个体的技能基础来开展技能水平评估,获取个体的能力状态. 王大利等[23]以知识点网络为载体,引入形式概念分析方法,系统探讨了个体知识状态的评估路径与实施策略. 朱泳帆等[24]基于属性概念格理论设计知识状态转移机制,提升了知识评估过程的高效性与灵活性. 遗憾的是,这些研究成果无法面向自适应评估场景.

自动机是一类用于描述系统状态构成及状态间转换规则的数学模型. 确定性有限自动机作为自动机的一个分支,主要研究在有限存储下离散数字系统的功能、结构以及两者间的关系,并完成对有限自动机的功能分析和描述. 自动机由于模型简单,状态稳定,目前被广泛应用于图像识别[25]、知识评估等领域. 在知识评估领域,Falmagne and Doignon[26]率先引入自动机思想,提出一种带更新规则的马尔可夫程序,以评估个体的知识状态. Dowling and Hockemeyer[27]进一步将该规则在确定性有限自动机中予以实现,构建等价的替代自动机,实现对个体知识的自适应评估. 然而,该自动机无法适配项目多分情况下的评估需求. 鉴于这一问题,Zhou et al[28]将SOLO分类法[29]与响应值集结合,构建了一种适用于多分情况的知识评估自动机. 遗憾的是,该自动机仅适用于每个评估项目响应值集相同的场景,与实际评估中不同评估项目响应值集普遍存在差异的现实相悖. 基于此,本文在Zhou et al[28]的基础上,对多分情况下的知识评估自动机适用范围进行推广. 本文的主要工作和贡献如下.

(1)与现有多分情况下的知识评估自动机相比,本文面向项目响应值集不同的情形仍然适用,而且,更符合实际评估场景.

(2)基于项目线性响应值集定义自动机B,提出多分不确定知识状态,设计新的状态转移函数,以表示该自动机的状态更新过程.

(3)建立多分知识结构的邻接关系,为自动机B提供了新的提问规则,从而提出完整的知识评估过程,提高知识评估的效率.

1 预备知识

1.1 知识结构理论 在KST中,在理想条件(即个体没有时间压力或者受到任何躁动情绪的干扰)下,个体能够正确回答某个项目集Q内项目的集合称为知识状态,记为K,显然$K\subseteq Q$. 对于$\mathcal{K}\subseteq 2^Q$,若$Q\in\mathcal{K},\varnothing\in\mathcal{K}$,称$(Q,\mathcal{K})$为一个知识结构,简记为$\mathcal{K}$. 对于知识结构$\mathcal{K}$,若对任何子集族$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{K}$都有$\bigcup\mathcal{F}\in\mathcal{K}$,则称$(Q,\mathcal{K})$是知识空间.

例 1 项目集$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$,$\mathcal{K}=\{\varnothing,\{q_1\},\{q_1,q_2\}\{q_1,q_3\},\{q_1,q_2,q_3\},\{q_1,q_3,q_4\},Q\}$为知识结构,容易验证$\mathcal{K}$满足并封闭,所以$\mathcal{K}$是一个知识空间.

1.2 多分知识结构理论 在KST中,个体对项目的响应仅为正确或错误两类,然而,在实际教育

场景中，项目响应往往存在多种情况．设$(V, \leqslant)$是响应值集，其中，V是非空有限响应值集合，偏序关系满足自反性、传递性、反对称性．在实际评估的项目集中项目的难易程度以及解答过程不相同，因此，考虑项目特定的响应值集是有必要的．个体对项目p的响应程度由响应值$v\in V_p$表示．设$(V_P, \leqslant_P)$为项目p的响应值集，$(V_p, \leqslant_p)$是一个完备格，即对于任意$W\subseteq V_p$，存在上确界和下确界，有$\vee W=\sup W\in V_p$和$\wedge W=\inf W\in V_p$．此外，规定$\perp_p=\inf V_p$和$\top_p=\sup V_p$分别为$(V_p, \leqslant_p)$的底元和顶元．

Schrepp[9]将知识状态视为映射$K: Q\to V$．令V^Q表示从Q到V的所有映射的集合．对于任意$K_1, K_2\in V^Q$，V^Q上的偏序关系$\sqsubseteq$定义为：

$$K_1\sqsubseteq K_2\Leftrightarrow\forall q\in Q: K_1(q)\leqslant K_2(q)$$

其中，$K_i(q)$表示对项目q的响应值，$i=1, 2$．对于$\mathcal{F}\subseteq V^Q$，$\mathcal{F}$的上确界和下确界分别记为$\sqcup\mathcal{F}$和$\sqcap\mathcal{F}$，并且，对任意$q\in Q$，有：

$$(\sqcup\mathcal{F})(q)=\sup\{K(q): K\in\mathcal{F}\}$$

$$(\sqcap\mathcal{F})(q)=\inf\{K(q): K\in\mathcal{F}\}$$

多分知识状态的表达方式有多种，本文主要使用集合表示法[12]和向量表示法[11]．具体如下．

集合表示法．对$\forall K\in V^Q$，$K\subseteq Q\times V$，记$p^v=(p, v)\in Q\times V$，有$p^v\in K\Leftrightarrow K(p)=v$，则：

$$K=\{p^v: p\in Q, K(p)=v\in V\}$$

向量表示法．设项目集$Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$，对$\forall K\in V^Q$，记$K=\{q_1^{v_1}, q_2^{v_2}, \cdots, q_n^{v_n}\}$．当固定项目集$Q$中项目的顺序时，可简记为$K=v_1v_2\cdots v_n$．

定义1[12]　设Q是一个项目集，任意$p\in Q$对应的响应值集$(V_p, \leqslant_p)$为具有顶元$\top_p$和底元$\perp_p$的完备格．令$\mathcal{K}\subseteq V^Q$且$\mathcal{K}$上的偏序关系为：

$$K_1\sqsubseteq K_2\Leftrightarrow\forall p\in Q: K_1(p)\leqslant_p K_2(p)$$

当$\mathcal{K}$包含$\{p^{\top_p}: p\in Q\}$和$\{p^{\perp_p}: p\in Q\}$且$\bigcup\mathcal{K}=Q\times V$时，称$(\mathcal{K}, \sqsubseteq)$为$V^Q$上的多分知识结构，简记为$\mathcal{K}$．$\mathcal{K}$中的元素$K$称为多分知识状态．

例2　设项目集$Q=\{q_1, q_2\}$．

项目q_1：已知等腰三角形的腰长为3 cm，底边长比腰长1 cm，求其三角形周长．

项目q_2：已知等腰三角形的一条边长为3 cm，另一条边长为4 cm，求其三角形周长．

根据项目解答过程设定响应值集，具体如下．

对于q_1：

已知腰长为3 cm，则底边长为$3+1=4$(cm)(响应值q_1^1)．

$\Rightarrow$周长为$3\times 2+4=10$(cm)(响应值q_1^2)．

于是，项目q_1的响应值集为$V_{q_1}=\{0, 1, 2\}$，其中，$0\leqslant_{q_1}1\leqslant_{q_1}2$，其Hasse图如图1a所示．易知，$V_{q_1}$的底元为0，顶元为2．

对于q_2：

当腰长为3 cm时，底边长为4 cm，周长为$3\times 2+4=10$(cm)(响应值q_2^a)．

当腰长为4 cm时，底边长为3 cm，周长为$4\times 2+3=11$(cm)(响应值q_2^b)．

$\Rightarrow$完整解答(响应值q_2^c)．

于是，项目q_2的响应值集为$V_{q_2}=\{0, a, b, c\}$，其中，$0\leqslant_{q_2}a$，$0\leqslant_{q_2}b$，$a\leqslant_{q_2}c$，$b\leqslant_{q_2}c$，其Hasse图如图1b所示．显然，V_{q_2}的底元为0，顶元为c．

于是有：

$$Q\times V=\{q_1^0, q_1^1, q_1^2, q_2^0, q_2^a, q_2^b, q_2^c\}$$

考虑

$$\mathcal{K}_1=\{\{q_1^0, q_2^0\}, \{q_1^0, q_2^a\}, \{q_1^1, q_2^b\}, \{q_1^1, q_2^c\}, \{q_1^2, q_2^c\}\}$$

由于

$$\{q_1^0, q_2^0\}\in\mathcal{K}_1, \{q_1^2, q_2^c\}\in\mathcal{K}_1, \bigcup\mathcal{K}_1=Q\times V$$

所以$\mathcal{K}_1$是多分知识结构，其Hasse图如图2所示．

定义2[12]　设$\leqslant$为$Q\times V$上的二元关系，且对任意$p\in Q$，$(V_p, \leqslant_p)$为具有底元素$\perp_p$的完备格．若$\leqslant$满足：

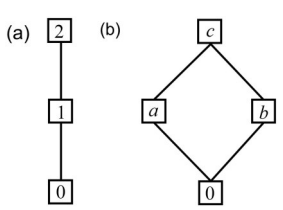


图1　**(a)** $V_{q_1}=\{0,1,2\}$**的Hasse图；(b)** $V_{q_2}=\{0,a,b,c\}$**的Hasse图**

Fig. 1　**(a) The Hasse diagram of** $V_{q_1}=\{0,1,2\}$**, (b) the Hasse diagram of** $V_{q_2}=\{0,a,b,c\}$

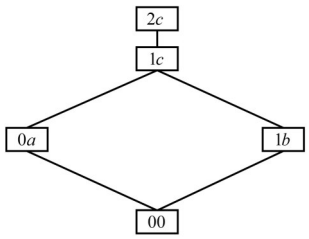


图 2 多分知识结构 $\mathcal{K}_1$ 的 Hasse 图

Fig. 2 Hasse diagram of the polytomous knowledge structure $\mathcal{K}_1$

(1)拟序(自反,传递);

(2)对任意 $p^v, p^w \in Q \times V$, $v \leqslant_p w \Leftrightarrow p^v \preccurlyeq p^w$;

(3)对任意 $p^u, p^v, q^w \in Q \times V$,若 $p^u \preccurlyeq q^w$ 且 $p^v \preccurlyeq q^w$,则 $p^{u \vee v} \preccurlyeq q^w$;

(4)对任意 $p^v, q^{\perp_q} \in Q \times V$, $p^v \preccurlyeq q^{\perp_q} \Leftrightarrow v = \perp_p$.

则称 $\preccurlyeq$ 为 $Q \times V$ 上的优先关系.

对于任意 $p^u, q^w \in Q \times V$, $p^u \preccurlyeq q^w$ 表明:

(1)当个体对项目 q 的响应值为 w,其对项目 p 的响应值亦为 u;

(2)当个体对项目 q 的响应值大于 w,其对项目 p 的响应值不小于 u;

(3)当个体对项目 p 的响应值小于 u,其对项目 q 的响应值小于 w.

定理 1[12] 设 Q 为有限非空集合,且对于任意 $p \in Q$, $(V_p, \leqslant_p)$ 是有限非空集合 V_p 上的格,那么 $Q \times V$ 上的优先关系 $\preccurlyeq$ 与 V^Q 上的多分知识结构 $\mathcal{K}$ 一一对应.

1.3 知识评估自动机 在实际教育场景中,通常根据个体对项目集 Q 中项目的响应情况来评估其知识状态,此过程评估的项目数量往往小于项目集 Q 的数量. Dowling and Hockemeyer[27] 建立了二分情形下评估个体知识状态的自动机,具体如下.

定义 3[27] 设 $(Q, \mathcal{K})$ 为知识空间. 若满足:

(1) $\Sigma = \{q, \bar{q}: q \in Q\}$;

(2) $\mathbb{S} = \left\{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}: \bigcap \mathcal{S} \subseteq K \subseteq \bigcup \mathcal{S} \Rightarrow K \in \mathcal{S}, \forall K \in \mathcal{K}\right\}$;

(3) $\mathcal{S}_0 = \mathcal{K} \in \mathbb{S}$ 是初始自动机状态;

(4) $u: \mathbb{S} \times \Sigma \to \mathbb{S}$, 即对于 $\mathcal{S} \in \mathbb{S}, v \in \Sigma$,有

$$u(\mathcal{S}, v) = \begin{cases} \mathcal{K}_v \cap \mathcal{S}, & v \in \{\eta(\mathcal{S}), \overline{\eta(\mathcal{S})}\} \\ \varnothing, & \text{否则} \end{cases}$$

其中,函数 $\eta: \mathbb{S} \to Q \cup \{\Delta\}$,有 $\eta(\mathcal{S}) = \cup\mathcal{S} \backslash \cap\mathcal{S}$ 或 $\eta(S) = \Delta$;

(5) $\mathbb{F} = \{\{K\}: K \in \mathcal{K}\} \subseteq \mathbb{S}$ 是最终自动机状态的集合.

则称五元组 $A = (\Sigma, \mathbb{S}, \mathcal{S}_0, u, \mathbb{F})$ 是一个确定性有限自动机.

对于定义 3,Σ 中 q 和 $\bar{q}$ 分别表示个体已掌握项目 q 和未掌握项目 $\bar{q}$. 此外,$\mathbb{S}$ 由知识空间 $\mathcal{K}$ 的子集构成. 换言之,自动机状态是个体在某一评估阶段可能的知识状态集合. 初始自动机状态 $\mathcal{S}_0 = \mathcal{K}$ 表明在初始情况下,任意 $K \in \mathcal{K}$ 都可能是个体的知识状态. 最终自动机状态 $\{K\} \in \mathbb{F}$ 仅包含一个知识状态,即 K 是理想条件下被评估个体的知识状态. 需要指出,u 是更新自动机状态的映射. 对于 $v \in \{\eta(\mathcal{S}), \overline{\eta(\mathcal{S})}\}$,若 $v \in \eta(\mathcal{S})$, $\mathcal{K}_v$ 表示 $\mathcal{K}$ 中包含 v 的知识状态集合;若 $v \in \overline{\eta(\mathcal{S})}$, $\mathcal{K}_v$ 表示 $\mathcal{K}$ 中不包含 v 的知识状态的集合. 最后,η 表示提问规则. 在自动机评估过程中,根据当前的自动机状态 $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$,可从 $\eta(\mathcal{S}) = \cup\mathcal{S} \backslash \cap\mathcal{S}$ 里选择下一个要评估的项目. 若 $\eta(S) = \Delta$,表明当前没有需进一步评估的项目. 此时,自动机评估终止.

例 3 考虑例 1 的项目集 Q 和知识空间 $\mathcal{K}$,利用定义 3 的自动机来评估个体的知识状态. 首先,初始状态为:

$$\Sigma = \{q_1, \bar{q}_1, q_2, \bar{q}_2, q_3, \bar{q}_3, q_4, \bar{q}_4\}$$

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{K} = \{\varnothing, \{q_1\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1, q_3, q_4\}, Q\}$$

假设先评估项目 q_3,若个体正确回答项目 q_3,则有:

$$\mathcal{K}_{q_3} = \{\{q_1, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1, q_3, q_4\}, Q\}$$

此时自动机状态更新为:

$$\mathcal{S}_1 = u(\mathcal{S}_0, q_3) = \mathcal{K}_{q_3} \cap \mathcal{S}_0 = \mathcal{K}_{q_3}$$

由于:

$$(\cup\mathcal{S}_1) \backslash (\cap\mathcal{S}_1) = \{q_2, q_4\}$$

可从中随机选择一个项目进行评估. 不妨设评估的项目为 q_2,若个体错误回答项目 q_2,则有:

$$\mathcal{K}_{\bar{q}_2}=\{\varnothing,\{q_1\},\{q_1,q_3\},\{q_1,q_3,q_4\}\}$$

此时自动机状态更新为：

$$\mathcal{S}_2=u(\mathcal{S}_1,\bar{q}_2)=\mathcal{K}_{\bar{q}_2}\cap\mathcal{S}_1=\{\{q_1,q_3\},\{q_1,q_3,q_4\}\}$$

由于：

$$\cup\mathcal{S}_2\setminus\cap\mathcal{S}_2=\{q_4\}$$

于是评估项目 q_4. 若个体正确回答项目 q_4，则：

$$\mathcal{K}_{q_4}=\{\{q_1,q_3,q_4\},Q\}$$

此时自动机状态更新为：

$$\mathcal{S}_3=u(\mathcal{S}_2,q_4)=\mathcal{K}_{q_4}\cap\mathcal{S}_2=\{\{q_1,q_3,q_4\}\}$$

注意到 $\mathcal{S}_3$ 只包含一个知识状态，因此，$\mathcal{S}_3$ 是最终自动机状态，且 $\eta(\mathcal{S}_3)=\Delta$. 此时，自动机评估完成，即在理想条件下被评估个体的知识状态为 $\{q_1,q_3,q_4\}$.

2　基于项目线性响应值集的知识评估自动机

Zhou et al[28]提出基于SOLO分类[29]的自动机，能在多分情形下对个体的知识状态进行评估，但无法适用于不同项目响应值集不同的情形. 本节在多分情形下构建面向不同项目响应值集不同的知识评估自动机B，提出基于多分知识结构邻接关系的提问规则，并且给出知识评估的过程.

2.1　基于项目线性响应值集的自动机

注1　后文的响应值集 $(V_p,\leqslant_p)$ 都是线性序. 如 $V_p=\{0,1,2,\cdots,\top_p\}$，满足 $0\leqslant 1\leqslant 2\leqslant\cdots\leqslant\top_p$. V_p 中每个元素均为正整数，$\perp_p=0$.

定义4　设 Q 是一个项目集，$(V_p,\leqslant_p)$ 为项目 $p\in Q$ 对应的响应值集，$\leqslant$ 为 $Q\times V$ 上的优先关系. 对任意 $(p^u,q^w)\in R$，若满足：

(1) $(p^u,q^w)\in\leqslant$；

(2) 不存在 $r^s\in Q\times V$，使得 $(p^u,r^s)\in\leqslant$ 且 $(r^s,q^w)\in\leqslant$；

(3) $p\neq q$ 且 $uw\neq 0$.

则称 R 为 $Q\times V$ 上的邻接关系.

上述定义表明：

(1) 邻接关系 R 是优先关系 $\leqslant$ 的子集；

(2) 邻接关系 R 不满足传递性，反映了项目之间直接的优先关系；

(3) 邻接关系不考虑同个项目内关于响应值的优先关系及项目响应值为0时的优先关系.

注2　构建邻接关系用于评估的依据如下.

由定理1可知，$Q\times V$ 上的优先关系 $\leqslant$ 与 V^Q 上的多分知识结构 $\mathcal{K}$ 一一对应，但包含大量可通过逻辑推导得出的间接关系. 在实际评估过程中，定义4中的条件(1)(2)剥离了所有间接关联，精准提取项目之间最直接的关系，使评估过程能够始终围绕与当前项目直接相关的其他项目展开进一步测评，避免跨度过大的低效提问. 定义4中的条件(3)规定的 $p\neq q$ 排除了项目自身的无效循环，$uw\neq 0$ 剔除了完全未掌握的零响应状态.

例4　设项目集 $Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$，$V_{q_1}=\{0,1,2\}$，$V_{q_2}=\{0,1,2\}$，$V_{q_3}=\{0,1,2,3\}$，$V_{q_4}=\{0,1,2,3\}$ 分别为项目 q_1,q_2,q_3,q_4 的响应值集. $Q\times V$ 上的优先关系如图3所示，其中，直线与箭头分别表示项目集 Q 中项目响应值集之间的优先关系和邻接关系. 由定义4可得邻接关系 $R=\{(q_1^1,q_3^1),(q_2^1,q_3^2),(q_4^2,q_1^2),(q_3^3,q_4^3)\}$.

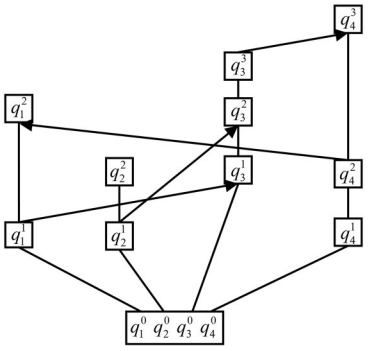


图3　优先关系的Hasse图

Fig. 3　Hasse diagram of the precedence relation

定义5[30]　设 Q 为项目集，$(V_p,\leqslant_p)$ 为项目 $p\in Q$ 对应的响应值集. 对任意 $u,w\in V_p$，记 u 的上集为 $\uparrow u=\{v\in V_p:v\geqslant u\}$，$u$ 的下集为 $\downarrow u=\{v\in V_p:v\leqslant u\}$.

对任意项目 $p\in Q$，$u,v,w\in V_p$ 有：

(1) $p^{\uparrow u}=\{p^v:v\geqslant u\}$；

(2) $p^{\downarrow u}=\{p^v:v\leqslant u\}$；

(3) $p^{\uparrow u\downarrow w}=p^{\uparrow u\cap\downarrow w}=\{p^v:u\leqslant v\leqslant w\}$；

(4) $p^{\uparrow u \uparrow w}=p^{\uparrow u\cap\uparrow w}=p^{\uparrow(u\vee w)}$
$=\{p^{v}: v\geqslant \sup\{u\vee w\}\}$;
(5) $p^{\downarrow u \downarrow w}=p^{\downarrow u\cap\downarrow w}=p^{\downarrow(u\wedge w)}=$
$\{p^{v}: v\leqslant \inf\{u\wedge w\}\}$.

注 3 在知识评估过程中,可根据个体对已评估项目的响应情况,并结合邻接关系来缩小其待评估项目的响应值范围. 将项目的响应值范围称为有效响应值集,定义 5 的(1)~(5)可用于刻画知识评估过程中某一阶段各待评估项目的有效响应值集. 显然,项目的有效响应值集随着知识评估进程而动态变化.

例 5 续例 4 当个体对项目 q_3 的响应值为 2 时,可通过邻接关系来推导其他待评估项目的有效响应值集,如 q_1 的有效响应值集为 $q_1^{\uparrow 1}=\{1,2\}$, q_2 的有效响应值恰好为 1, q_4 的有效响应值集为 $q_4^{\downarrow 2}=\{0,1,2\}$.

定义 6 设 Q 为项目集, $(V_p,\leqslant_p)$ 为项目 $p\in Q$ 对应的响应值集,其中,底元 $\perp_p=0$. 个体对项目集 Q 中所有项目的有效响应值集构成的集合为多分不确定知识状态,记为:

$$\tilde{K}=\{p^{\uparrow u\downarrow w}: p\in Q, u,w\in V_p, 0\leqslant u\leqslant w\leqslant T_p\}$$

进一步地,所有多分不确定知识状态构成的集族为多分不确定知识结构,记为 $\tilde{\mathcal{K}}$. 对于任意 $A\subseteq Q$,个体对 A 中所有项目的有效响应值集构成的集合为多分不确定子知识状态,记为:

$$\tilde{K}_A=\{p^{\uparrow u\downarrow w}: p\in A, u,w\in V_p, 0\leqslant u\leqslant w\leqslant T_p\}$$

所有多分不确定子知识状态构成的集族为多分不确定子知识结构,记为 $\tilde{\mathcal{K}}_A$:

设 $Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$, $(V_{q_i},\leqslant_{q_i})$ 为项目 $q_i\in Q$ 对应的响应值集, $u_i,v_i,u_i',v_i'\in V_{q_i}$, $i=1,2,\cdots,n$. 令:

$$\tilde{K}_1=\{q_1^{\uparrow u_1\downarrow v_1},q_2^{\uparrow u_2\downarrow v_2},\cdots,q_n^{\uparrow u_n\downarrow v_n}\}$$
$$\tilde{K}_2=\{q_1^{\uparrow u_1'\downarrow v_1'},q_2^{\uparrow u_2'\downarrow v_2'},\cdots,q_n^{\uparrow u_n'\downarrow v_n'}\}$$

有:

$$\tilde{K}_1\sqcap\tilde{K}_2=\{q_i^{\uparrow u_i\vee u_i'\downarrow v_i\wedge v_i'}: q_i^{\uparrow u_i\downarrow v_i}\in\tilde{K}_1, q_i^{\uparrow u_i'\downarrow v_i'}\in\tilde{K}_2\}$$

注 4 $\tilde{K}$ 用于刻画知识评估过程中各阶段的自动机状态, $\tilde{K}_A$ 后续可通过定义 8 中的状态转移函数转化成 $\tilde{K}$.

考虑例 4 的项目集 Q 和各项目的响应值集,对 $\tilde{K}$ 的记法进行简化.

(1)若项目的有效响应值集出现底元的上集或顶元的下集时,其上集或下集可省略. 例如, $\tilde{K}=\{q_1^{\uparrow 0\downarrow 2},q_2^{\uparrow 0\downarrow 2},q_3^{\uparrow 0\downarrow 3},q_4^{\uparrow 0\downarrow 3}\}$. 因为所有项目的响应值集底元统一为 0,而顶元不完全相同,可简化为 $\tilde{K}=\{q_1^{\uparrow 0},q_2^{\uparrow 0},q_3^{\uparrow 0},q_4^{\uparrow 0}\}$.

(2)对于 $p^{\uparrow u\downarrow w}$,若 $u=w$,则可简化为 p^{u} 或 p^{w}. 例如, $\tilde{K}=\{q_1^{\uparrow 0\downarrow 0},q_2^{\uparrow 0\downarrow 2},q_3^{\uparrow 2\downarrow 2},q_4^{\uparrow 0\downarrow 3}\}$. 因 $q_1^{\uparrow 0\downarrow 0}$ 中 $0=0$, $q_3^{\uparrow 2\downarrow 2}$ 中 $2=2$, 可简化为 $\tilde{K}=\{q_1^{0},q_2^{\uparrow 0\downarrow 2},q_3^{2},q_4^{\uparrow 0\downarrow 3}\}$.

(3)若项目的有效响应值集出现底元的下集或顶元的上集时,对应符号($\uparrow$或$\downarrow$)可省略. 例如, $\tilde{K}=\{q_1^{\uparrow 2},q_2^{\downarrow 0},q_3^{\downarrow 1},q_4^{\uparrow 1}\}$. 因为项目 q_1 的响应值集顶元为 2,项目 q_2 的响应值集底元为 0,故简化为 $\tilde{K}=\{q_1^{2},q_2^{0},q_3^{\downarrow 1},q_4^{\uparrow 1}\}$.

定义 7 设 Q 为项目集, $(V_p,\leqslant_p)$ 是项目 $p\in Q$ 对应的响应值集, R 为 $Q\times V$ 上的邻接关系. 对任意 $p,q\in Q, v,w\in V_q, u\in V_p$, 定义:

(1) $\varepsilon_1(q^v)=\{p^{\uparrow u}:(p^u,q^w)\in R, w<v\leqslant\top_q\}$
$\delta_1(q)=\{p: p^{\uparrow u}\in\varepsilon_1(q^v), u\neq\top_p\}$
$\overline{\delta_1(q)}=\{p: p^{\top_p}\in\varepsilon_1(q^v)\}$

(2) $\varepsilon_2(q^v)=\{p^u:(p^u,q^v)\in R\}$
$\overline{\delta_2(q)}=\{p: p^u\in\varepsilon_2(q^v)\}$

(3) $\varepsilon_3(q^v)=\{p^{\downarrow u-1}:(q^w,p^u)\in R, 0\leqslant v<w\}$
$\delta_3(q)=\{p: p^{\downarrow u-1}\in\varepsilon_3(q^v), u-1\neq 0\}$
$\overline{\delta_3(q)}=\{p: p^0\in\varepsilon_3(q^v)\}$

(4) $\varepsilon(q^v)=\varepsilon_1(q^v)\cup\varepsilon_2(q^v)\cup\varepsilon_3(q^v)$
$\delta(q)=\delta_1(q)\cup\delta_3(q)$
$\overline{\delta(q)}=\overline{\delta_1(q)}\cup\overline{\delta_2(q)}\cup\overline{\delta_3(q)}$

在定义 7 中, $\varepsilon_1(q^v),\varepsilon_2(q^v),\varepsilon_3(q^v)$ 分别表示当个体对项目 q 的响应值为 $v(>w,=w,<w)$ 时,与 q 相关项目 p 的有效响应值集构成的集族. 其次, $\delta_i(q)(i=1,3)$ 分别表示 $\varepsilon_i(q^v)$ 中响应值未

能唯一确定的项目集. 此外，$\overline{\delta_i(q)}(i=1,2,3)$分别表示$\varepsilon_i(q^v)$中响应值可被唯一确定的项目集.

项目q的相关项目p是指在项目q的响应值为v时，能通过邻接关系缩小有效响应值集的项目（未缩小有效响应值集的项目不属于q的相关项目）. 在知识评估中，假设评估的项目为q，个体对项目q的响应值为v，借助定义7可以找到项目集Q中与项目q相关的部分项目，进而缩小其有效响应值集.

例6　续例5　当个体对项目q_3的响应值为2时，在邻接关系R中满足$\varepsilon_1(q_3^2)$条件的有(q_1^1,q_3^1)，因此有：

$\varepsilon_1(q_3^2)=\{q_1^{\uparrow 1}\}$

同理可得：

$\varepsilon_2(q_3^2)=\{q_2^1\},\varepsilon_3(q_3^2)=\{q_4^{\downarrow 2}\}$

显然，

$\delta_1(q_3)=\{q_1\},\overline{\delta_1(q_3)}=\varnothing,\overline{\delta_2(q_3)}=\{q_2\}$

$\delta_3(q_3)=\{q_4\},\overline{\delta_3(q_3)}=\varnothing$

于是，与项目q_3相关项目的有效响应值集构成的集族为：

$\varepsilon(q_3^2)=\varepsilon_1(q_3^2)\cup\varepsilon_2(q_3^2)\cup\varepsilon_3(q_3^2)=\{q_1^{\uparrow 1},q_2^1,q_4^{\downarrow 2}\}$

因此，响应值可被确定的相关项目集合为：

$\delta(q_3)=\delta_1(q_3)\cup\delta_3(q_3)=\{q_1,q_4\}$

响应值未能被确定的相关项目集合为：

$\overline{\delta(q_3)}=\overline{\delta_1(q_3)}\cup\overline{\delta_2(q_3)}\cup\overline{\delta_3(q_3)}=\{q_2\}$

定义8　设Q为项目集，$(V_p,\leqslant_p)$为项目$p\in Q$对应的响应值集. 令$\tilde{\mathcal{K}}_A$为$A\subseteq Q$诱导的多分不确定子知识结构，$\tilde{\mathcal{K}}$为Q诱导的多分不确定知识结构. 定义映射$\alpha:\tilde{\mathcal{K}}_A\to\tilde{\mathcal{K}}$. 对任意$M\in\tilde{\mathcal{K}}_A$，$\alpha(M)=M\cup\{q^{\uparrow 0}:q\in Q\backslash A\}$，称$\alpha(M)$为知识状态转移函数. 特别地，当$A=Q$时，$\alpha(M)=M$.

例7　结合例4的项目集以及各项目的响应值集和邻接关系. 若$A=\{q_1,q_3\}$且$M=\{q_1^{\uparrow 1},q_3^3\}\in\tilde{\mathcal{K}}_A$，则：

$\alpha(M)=\{q_1^{\uparrow 1},q_3^3\}\cup\{q_2^{\uparrow 0},q_4^{\uparrow 0}\}=\{q_1^{\uparrow 1},q_2^{\uparrow 0},q_3^3,q_4^{\uparrow 0}\}$

此时，$\alpha(M)$就是例4项目集的一个多分不确定知识状态.

定义9　设Q为项目集，$(V_p,\leqslant_p)$是项目$p\in Q$对应的响应值集. 称五元组$B=(\Sigma,\mathbb{T},\mathcal{T}_0,\varphi,\mathbb{G})$为多分知识评估自动机，当其满足以下条件：

（1）$\Sigma=\{q^v:q\in Q,v\in V_q\}$；

（2）$\mathbb{T}=\{\langle\tilde{K},Q'\rangle:\tilde{K}\in\tilde{\mathcal{K}},Q'\subseteq Q\}$；

（3）$\mathcal{T}_0=\langle\{q^{\uparrow 0}:q\in Q\},Q\rangle\in\mathbb{T}$是初始自动机状态；

（4）$\varphi:\mathbb{T}\times\Sigma\to\mathbb{T}$，对于$\mathcal{T}=\langle\tilde{K},Q'\rangle\in\mathbb{T}$和$q\in Q'$，有：

$$\varphi(\mathcal{T},q^v)=\begin{cases}\left\langle\tilde{K}\sqcap\alpha(\varepsilon(q^v)\cup\{q^v\}),Q'\backslash\left(\overline{\delta(q)}\cup\{q\}\right)\right\rangle & v\in V_q\\ \langle\tilde{K},Q'\rangle & \text{否则}\end{cases}$$

（5）$\mathbb{G}=\{\langle K,\varnothing\rangle:K\in\tilde{\mathcal{K}}\}\subseteq\mathbb{T}$是最终自动机状态的集合.

对于定义9，$q^v\in\Sigma$代表评估项目为q，其响应值为$v\in V_q$. $\langle\tilde{K},Q'\rangle$表示自动机状态，其中，$\tilde{K}\in\tilde{\mathcal{K}}$为多分不确定知识状态，$Q'\subseteq Q$为待评估项目集. 评估尚未启动前，自动机的初始状态为$\mathcal{T}_0=\langle\{q^{\uparrow 0}:q\in Q\},Q\rangle$. φ是自动机更新的映射. 在评估过程中，假设自动机状态为$\mathcal{T}=\langle\tilde{K},Q'\rangle$时，待评估项目为$q$. 于是，映射$\varphi$的解释如下. 若个体对项目$q$的响应值为$v\in V_q$，$\overline{\delta(q)}\cup\{q\}$内项目的响应值被唯一确定. 该集合内项目无需进一步评估，同时，利用知识状态转移函数，将$\varepsilon(q^v)\cup\{q^v\}$与当前自动机状态$\mathcal{T}$取交集，进而更新自动机状态为：

$$\left\langle\tilde{K}\sqcap\alpha(\varepsilon(q^v)\cup\{q^v\}),Q'\backslash\left(\overline{\delta(q)}\cup\{q\}\right)\right\rangle$$

若$v\notin V_q$，需重新评估项目q，此时，自动机状态保持为$\langle\tilde{K},Q'\rangle$. $\mathbb{G}$表示无待评估项目时$\tilde{K}$中所有项目的响应值被唯一确定，此时，$\tilde{K}$即为多分知识状态K，$\langle K,\varnothing\rangle\in\mathbb{G}$为最终自动机状态.

在知识评估过程中，自动机状态会随着个体对项目的响应情况而动态更新，直至获取最终自动机状态.

例 8 **续例 6** 根据定义 9,初始自动机状态为:

$$\mathcal{T}_0=\left\langle\left\{q_1^{\uparrow^0},q_2^{\uparrow^0},q_3^{\uparrow^0},q_4^{\uparrow^0}\right\},\{q_1,q_2,q_3,q_4\}\right\rangle$$

假设第一个待评估项目是 q_3. 若个体对 q_3 的响应值 $v=2$,则:

$$\varepsilon\left(q_3^2\right)=\left\{q_1^{\uparrow^1},q_2^1,q_4^{\downarrow^2}\right\},\overline{\delta\left(q_3\right)}=\left\{q_2\right\}$$

由定义 8,可得:

$$\alpha\left(\varepsilon\left(q_3^2\right)\cup\left\{q_3^2\right\}\right)=\left\{q_1^{\uparrow^1},q_2^1,q_3^2,q_4^{\downarrow^2}\right\}$$

所以:

$$\tilde{K}_0\sqcap\alpha\left(\varepsilon\left(q_3^2\right)\cup\left\{q_3^2\right\}\right)=\left\{q_1^{\uparrow^1},q_2^1,q_3^2,q_4^{\downarrow^2}\right\}$$

于是待测项目集更新为:

$$Q'\backslash\left(\overline{\delta\left(q_3\right)}\cup\left\{q_3\right\}\right)=\left\{q_1,q_4\right\}$$

自动机状态更新为:

$$\mathcal{T}_1=\left\langle\left\{q_1^{\uparrow^1},q_2^1,q_3^2,q_4^{\downarrow^2}\right\},\{q_1,q_4\}\right\rangle$$

类似地,若个体对项目 q_3 的响应值 $v=0$, 则:

$$\varepsilon\left(q_3^0\right)=\left\{q_4^{\downarrow^2}\right\}$$

$$\alpha\left(\varepsilon\left(q_3^0\right)\cup\left\{q_3^0\right\}\right)=\left\{q_1^{\uparrow^0},q_2^{\uparrow^0},q_3^0,q_4^{\downarrow^2}\right\}$$

$$\overline{\delta\left(q_3\right)}=\varnothing$$

$$Q'\backslash\overline{\delta\left(q_3\right)}\cup\left\{q_3\right\}=\left\{q_1,q_2,q_4\right\}$$

从而自动机状态更新为:

$$\mathcal{T}_1=\left\langle\left\{q_1^{\uparrow^0},q_2^{\uparrow^0},q_3^0,q_4^{\downarrow^2}\right\},\{q_1,q_2,q_4\}\right\rangle$$

若个体对项目 q_3 的响应值 $v=1$, 则自动机状态更新为:

$$\mathcal{T}_1=\left\langle\left\{q_1^1,q_2^{\uparrow^0},q_3^1,q_4^{\downarrow^2}\right\},\{q_2,q_4\}\right\rangle$$

2.2 项目提问规则 由于多分知识结构中存在偏序关系,即无需评估全部项目便可获得个体的多分知识状态,而项目评估的顺序会影响评估的总步骤数. 鉴于各个项目的响应值集不相同,按传统规则选择中等难度的项目难以适用,故基于邻接关系提出一种新的提问规则.

设 $Q'=\left\{q_1',q_2',\cdots,q_m'\right\}\subseteq Q$ 为待评估项目集,定义集合:

$$X_{Q'}=\left\{q_j'\in Q'\colon\left|q_j'\right|=\nabla x\right\}$$

其中,$\nabla x=\max\left\{\left|q_1'\right|,\left|q_2'\right|,\cdots,\left|q_m'\right|\right\}$, $\left|q_j'\right|$ 表示项目 q_j' 在邻接关系 $R'=\left\{\left(p^u,q^w\right)\in R\colon p,q\in Q'\right\}$ 中出现的次数. 在动态评估过程中,选择 $q\in X_{Q'}$ 作为首个评估项目.

设 $I=\left\{p_1,p_2,\cdots,p_m\right\}\left(m\leqslant\left|Q\right|\right)$ 为完整评估中实际评估的项目集,其中,p_i 表示第 i 个评估项目. 不失一般,记 Q_i' 为评估 $p_i\in I$ 后的待评估项目集.

定义 10 设 Q 为项目集,$\left(V_{p_i},\leqslant_{p_i}\right)$ 为每个 $p_i\in Q$ 对应的响应值集. 记 $\kappa\left(p_i^v,Q_i'\right)$ 为提问规则,其中,$p_i\in Q$ 是第 i 个评估项目,$v\in V_{p_i}$,$Q_i'\subseteq Q$ 是待评估项目集,则下一个待评估项目为 $p_{i+1}\in\kappa\left(p_i^v,Q_i'\right)$. 有:

$$\kappa\left(p_i^v,Q_i'\right)=\begin{cases}\bigcup\limits_{j=1}^{i}\delta\left(p_j\right)\cap Q_i', & \bigcup\limits_{j=1}^{i}\delta\left(p_j\right)\cap Q_i'\neq\varnothing\\ X_{Q'}, & \text{否则}\end{cases}$$

根据定义 10,下一个待评估项目 p_{i+1} 只与当前已评估项目 p_i 相关但尚未被确定响应值的项目集以及 Q_i' 有关.

注 5 当 $\bigcup\limits_{j=1}^{i}\delta\left(p_j\right)\cap Q_i'\neq\varnothing$ 时,应对集合 $\bigcup\limits_{j=1}^{i}\delta\left(p_j\right)\cap Q_i'\neq\varnothing$ 中的项目进一步评估. 这些项目与已评估项目存在邻接关系,其有效响应值集被缩小(但未被唯一确定),因此,更容易测评出其唯一对应的响应值. 这一策略既保证了评估的连贯性,又显著减少了评估次数. 否则,应在邻接关系中出现次数最多的项目集合(即 $X_{Q'}$)中进行选择,因为评估此类项目能最大程度地推导出其他项目的有效响应值集.

例 9 考虑例 4 的项目集以及各项目的响应值集和邻接关系. 因为 $\left(q_1^1,q_3^1\right)\in R$,$\left(q_4^2,q_1^2\right)\in R$,则 $\left|q_1\right|=2$. 类似地,$\left|q_2\right|=1$, $\left|q_3\right|=3$, $\left|q_4\right|=2$.

于是,

$$\nabla x=\max\left\{\left|q_1'\right|,\left|q_2'\right|,\cdots,\left|q_m'\right|\right\}=3,X_Q=\left\{q_3\right\}$$

因此,首个评估项目为 $p_1=q_3$. 假设被评估个体对 p_1 的响应值为 0,结合例 8 可知,此时的自动机状态为:

$$\mathcal{T}_1=\left\langle\left\{q_1^{\uparrow^0},q_2^{\uparrow^0},q_3^0,q_4^{\downarrow^2}\right\},\{q_1,q_2,q_4\}\right\rangle$$

待评估项目集为:

$$Q_1'=\left\{q_1,q_2,q_4\right\}$$

且:

$$\bigcup_{j=1}^{1}\delta(p_j)=\{q_4\}$$

于是：

$$\bigcup_{j=1}^{1}\delta(p_j)\cap Q_1'=\{q_4\}$$

进而可得：

$$\kappa(p_1^v,\mathcal{T}_1)=\{q_4\}$$

即下一个待评估项目为q_4.

2.3　自动机知识评估过程　自动机知识评估是一个自动机状态迭代更新的过程，图4展示了自动机B评估个体多分知识状态的流程图. 由图可知，当待评估项目集$Q_i'\neq\varnothing$时，若个体对项目p_i的响应$v\notin V_{p_i}$，则评估无效，需要重新评估项目p_i；若$v\in V_{p_i}$，则更新自动机状态及项目提问规则，并选取下一个评估项目. 重复上述步骤，直至$Q_i'=\varnothing$.

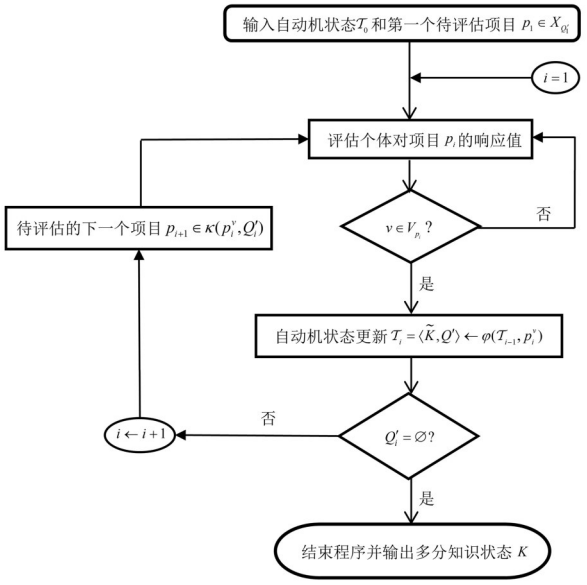


图4　自动机知识评估的流程图

Fig. 4　The process of automata knowledge assessment

例10　续例9　设首个评估的项目$p_1=q_3$，则初始自动机状态为：

$$\mathcal{T}_0=\left\langle\left\{q_1^{\uparrow 0},q_2^{\uparrow 0},q_3^{\uparrow 0},q_4^{\uparrow 0}\right\},\{q_1,q_2,q_3,q_4\}\right\rangle$$

图5给出了三种可能的结果. 由图可见，若个体对q_3的响应值$v=2$，则自动机状态更新为：

$$\left\langle\left\{q_1^{\uparrow 1},q_2^{1},q_3^{2},q_4^{\downarrow 2}\right\},\{q_1,q_4\}\right\rangle$$

由于：

$$\bigcup_{j=1}^{1}\delta(p_j)\cap Q_1'=\{q_1,q_4\}$$

因此：

$$\kappa\left(q_3^2,\{q_1,q_4\}\right)=\{q_1,q_4\}$$

不妨选取第二个待评估项目$p_2=q_1$. 若个体对q_1的响应值$v=2$，自动机状态更新为：

$$\left\langle\left\{q_1^{2},q_2^{1},q_3^{2},q_4^{2}\right\},\varnothing\right\rangle$$

此时$Q_2'=\varnothing$，即自动机知识评估过程终止. 因此，被评估个体的多分知识状态为：

$$K=\left\{q_1^{2},q_2^{1},q_3^{2},q_4^{2}\right\}$$

此时，实际评估项目集$I=\{q_3,q_1\}$，即无需评估Q的全部项目即可获取个体的多分知识状态.

3　实证分析

为了考查学生利用一元一次方程和二元一次方程组以及用一元一次方程和二元一次方程组解决实际问题的能力，给出四个项目，如表1所示.

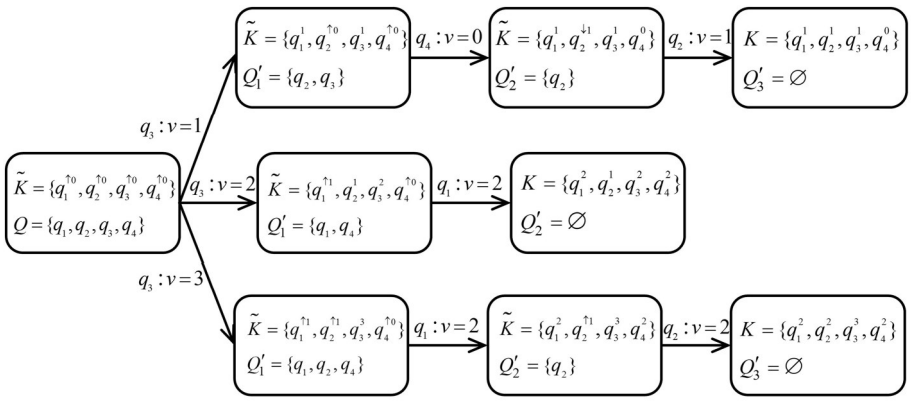


图5　知识评估的三种可能结果

Fig. 5　Three possible outcomes of knowledge assessment

项目集 $Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$，其中，每个项目的解题步骤如表2所示.

选取来自某两个班的学生作为实证研究的对象，每班50名学生，共100名学生，并且已经学习了一元一次方程和二元一次方程组及用一元一次方程和二元一次方程组解决实际问题的项目. 将学生对某一项目的响应情况分为多个层级，层级和解题的步骤之间的关系如表3所示.

表3中，×表示步骤 $s\in\{\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV}\}$ 没有正确求解，√表示步骤 s 已经正确求解.

表1 项目及其描述

Table 1 Items and their descriptions

Q	描述
q_1	A班和B班共98名学生，A班比B班多6名学生，求两个班的学生人数
q_2	笼子里有鸡和兔子数只，一共有35个头，94只脚，请问笼子里的鸡和兔子各有多少只？
q_3	求解方程 $3(x+1)=5-x$
q_4	求解方程组 $\begin{cases}x+2y=1\\2x+y=2\end{cases}$

表2 各个项目的解题步骤

Table 2 Problem-solving steps for each project

	I	II	III	IV
q_1	根据项的含义设置未知数	根据项和未知数的含义列出方程	求解一元一次方程	根据方程的解得出结论
q_2	根据项的含义设置未知数	根据项和未知数的含义列出方程	求解二元一次方程	根据方程的解得出结论
q_3	去括号	移项	合并同类项	x的系数化为1
q_4	利用加减法消元	求解一元一次方程，得出第一个未知数	回代方程求出第二个未知数	

表3 反应层级与解题步骤之间的关系

Table 3 The relationship between levels of response and problem-solving steps

层级	I	II	III	IV
0	×	×	×	×
1	√	×	×	×
2	√	√	×	×
3	√	√	√	×
4	√	√	√	√

因此，对各个层级的解释如下：

0：每个步骤均未正确求解.

1：仅步骤I正确求解.

2：正确求解出步骤I和II.

3：正确求解出步骤I, II, III.

4：正确求解出步骤I, II, III, IV.

由此可得：

$V_{q_1}=\{0,1,2,3,4\}$

$V_{q_2}=\{0,1,2,3,4\}$

$V_{q_3}=\{0,1,2,3,4\}$

$V_{q_4}=\{0,1,2,3\}$

并且邻接关系为：

$$R=\{(q_1^1,q_2^1),(q_1^2,q_2^2),(q_1^3,q_2^3),(q_1^4,q_2^4),(q_3^4,q_1^3),(q_4^3,q_2^3),(q_3^4,q_4^2)\}$$

从100名学生中随机抽取一个进行测试评估. 首先选择一个评估项目，通过邻接关系 R 可知：

$$|q_1|=5,|q_2|=5,|q_3|=2,|q_4|=2$$

于是：

$$\nabla x=\max\{|q_1|,|q_2|,|q_3|,|q_4|\}=5,X_Q=\{q_1,q_2\}$$

因此，首个评估项目为 $p_1=q_1$ 或 $p_1=q_2$. 若该学生首个评估项目为 $p_1=q_1$，且该学生对 p_1 的响应值为3. 由定义9可知，此时的自动机状态为：

$$\mathcal{T}_1=\langle\{q_1^3,q_2^{\downarrow 3},q_3^4,q_4^{\uparrow 0}\},\{q_2,q_4\}\rangle$$

待评估项目集为 $Q_1'=\{q_2,q_4\}$，且：

$$\bigcup_{j=1}^{1}\delta(p_j)=\{q_2\}$$

于是，

$$\bigcup_{j=1}^{1}\delta(p_j)\cap Q_1'=\{q_2\}$$

进而可得：

$$\kappa(p_1^v,\mathcal{T}_1)=\{q_2\}$$

即第二个待评估项目为 $p_2=q_2$. 若该学生对 p_2 的响应值为3，则自动机的状态为：

$$\mathcal{T}_2=\langle\{q_1^3,q_2^3,q_3^4,q_4^3\},\varnothing\rangle$$

此时，$Q_2'=\varnothing$，即自动机知识评估过程终止. 因此，被评估学生的多分知识状态为：

$$K=\{q_1^2,q_2^1,q_3^2,q_4^2\}$$

经过测试，得到100名学生对表1中的四个项目的响应情况，即做题情况，获得了两个班50行4列的响应情况表.

表4显示了其中一个班级响应情况表的前9行,代表9名学生的响应情况.

表4　响应情况表的前9行

Table 4　The first 9 rows of the response pattern table

序号	q_1	q_2	q_3	q_4
1	3	3	4	3
2	4	2	4	0
3	1	1	3	1
4	4	4	4	4
5	0	0	2	1
6	4	3	4	3
7	2	1	3	0
8	3	2	4	2
9	0	0	4	3

4　结论

本文基于项目线性响应值集建立知识评估自动机.具体地,通过项目状态转移函数获取多分不确定知识状态,随后,为了提高评估效率,建立邻接关系以提出项目提问规则,有效确定待评估项目,还提出自动机状态的更新方法.本研究可为教育改革实践与实证实验提供一定的理论与技术支撑,未来将从三个方面展开研究.首先,将当前支持的线性序响应值集拓展至更广泛的一般格结构响应值集情形;其次,在评估机制上,将突破仅依赖外在作答表现的现状,引入对个体内在认知能力的深度建模,实现认知协同评估;最后,进一步丰富实验验证的场景规模,以检验模型在更广泛应用环境下的可行性与有效性.

参考文献

[1] Brancaccio A, de Chiusole D, Stefanutti L. Algorithms for the adaptive assessment of procedural knowledge and skills. Behavior Research Methods, 2023,55(7):3929－3951.

[2] 林宇静,李进金,陈惠琴.基于形式背景构建多分知识结构与个性化指导学习的方法.南京大学学报(自然科学),2024,60(3):477－490.

[3] 王功勋,李进金.基于表现水平与能力水平协同依赖视角的自适应个性化学习指导模型.南京大学学报(自然科学),2024,60(6):1009－1027.

[4] 曹喜燕,林福财,金铭,等.程序性知识评估:从问题空间到可辨识知识结构.山东大学学报(理学版),2023,58(7):97－105,114.

[5] Javed U, Shaukat K, Hameed I A, et al. A review of content-based and context-based recommendation systems. International Journal of Emerging Technologies in Learning, 2021, 16(3): 274－306.

[6] Lin J, Wang M, Wu H N. Composite adaptive online inverse optimal control approach to human behavior learning. Information Sciences, 2023, 638: 118977.

[7] Doignon J P, Falmagne J C. Spaces for the assessment of knowledge. International Journal of Man-Machine Studies, 1985, 23(2): 175－196.

[8] Doignon J P, Falmagne J C. Knowledge spaces. Berlin: Springer, 1999: 333.

[9] Schrepp M. A generalization of knowledge space theory to problems with more than two answer alternatives. Journal of Mathematical Psychology, 1997, 41(3): 237－243.

[10] Bartl E, Belohlavek R. Knowledge spaces with graded knowledge states. Information Sciences, 2011, 181(8): 1426－1439.

[11] Stefanutti L, Anselmi P, de Chiusole D, et al. On the polytomous generalization of knowledge space theory. Journal of Mathematical Psychology, 2020, 94: 102306.

[12] Heller J. Generalizing quasi-ordinal knowledge spaces to polytomous items. Journal of Mathematical Psychology, 2021, 101: 102515.

[13] Rusch A, Wille R. Knowledge spaces and formal concept analysis//Data Analysis and Information Systems. Berlin: Springer, 1996: 427－436.

[14] 黄宝坤,李进金,李气芳.粗糙集视角下的能力评估方法.江西师范大学学报(自然科学版),2025,49(1):17－26,79.

[15] Xie X X, Xu W H, Li J J. A novel concept-cognitive learning method: A perspective from competences. Knowledge-Based Systems, 2023, 265: 110382.

[16] Zhou Y F, Li J J, Yang H L, et al. Knowledge structures construction and learning paths recommendation based on formal contexts. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2024, 15(4): 1605－1620.

[17] 周银凤,李进金,冯丹露,等. 形式背景下的学习路径与技能评估. 模式识别与人工智能,2021,34(12):1069－1084.

[18] 冯丹露,李进金,李招文,等. 模糊形式背景下的技能层约简与前级(后级)知识结构的充要条件. 模式识别与人工智能,2023,36(5):383－406.

[19] 李金海,张瑞,智慧来,等. 知识空间理论综述. 模式识别与人工智能,2024,37(2):106－127.

[20] 周银凤,李进金. 形式背景下的技能约简与评估. 计算机科学与探索,2022,16(3):692－702.

[21] de Chiusole D, Stefanutti L, Anselmi P, et al. Stat-knowlab. Assessment and learning of statistics with competence - based knowledge space theory. International Journal of Artificial Intelligence in Education,2020,30(4):668－700.

[22] 陈惠琴,李进金,林宇静,等. 技能背景下学习空间的判别方法和技能评估. 南京大学学报(自然科学),2023,59(1):107－119.

[23] 王大利,许晴媛,李进金,等. 知识点网络下的知识评估和学习路径选择. 南京大学学报(自然科学),2023,59(4):629－643.

[24] 朱泳帆,许晴媛,周银凤,等. 面向属性概念格下的知识状态转移方法. 小型微型计算机系统,2024,45(11):2647－2655.

[25] Tarasyuk O, Gorbenko A, Rahman T, et al. Learning dynamics, pattern recognition capability and interpretability of the Tsetlin machine. Pattern Recognition,2026,174:113028.

[26] Falmagne J C, Doignon J P. A markovian procedure for assessing the state of a system. Journal of Mathematical Psychology,1988,32(3):232－258.

[27] Dowling C E, Hockemeyer C. Automata for the assessment of knowledge. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2001, 13(3):451－461.

[28] Zhou Y F, Yang H L, Li J J, et al. Automata for knowledge assessment based on the structure of observed learning outcome taxonomy. Information Sciences,2024,659:120058.

[29] Biggs J B, Collis K F. Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy (structure of the observed learning outcome). New York: Academic Press,1982:245.

[30] Davey B A, Priestley H A. I ntroduction to lattices and order. Cambridge: Cambridge University Press, 2002:298.

(责任编辑 杨可盛)