doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023293

基于 Hamming 距离和量子搜索算法的联想分类器设计

肖 红，刘新彤
（东北石油大学 计算机与信息技术学院，黑龙江 大庆 163318）

摘要：针对现有联想分类器不能存储重复样本的问题，提出一种基于 Hamming 距离和量子搜索算法的量子联想分类器设计方法，并给出联想分类器存储和分类的线路图. 该方法需提前准备 5 组量子比特，分别对 Hamming 距离、输入样本、模式样本、类别和序号进行编码. 首先，根据样本总体 N，计算联想分类器所需的量子位数，再利用量子旋转门和 Hadamard门将初态为 $|0\rangle$ 的量子位旋转为恰好包含 N 个基态的均衡叠加态；其次，根据待存储样本的类别和值，将剩余两组初始状态为 $|0\rangle$ 的量子位通过可控操作转换为相应的量子基态；最后，基于量子最小搜索的分类方法，计算输入样本与所有存储样本之间的 Hamming 距离，再使用固定相位 Grover 量子搜索算法搜索这些 Hamming 距离的最小值，最小值对应存储样本的类别即为输入样本的类别，具体的分类结果可通过测量寄存器中的量子态得到.

关键词：量子联想分类器；均衡叠加态；Hamming 距离；量子最小搜索
中图分类号：TP391 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)06-1426-13

Design of Associative Classifier Based on Hamming Distance and Quantum Search Algorithm

XIAO Hong, LIU Xintong
(*School of Computer and Information Technology, Northeast Petroleum University, Daqing* 163318, *Heilongjiang Province, China*)

Abstract: Aiming at the problem that the existing associative classifier could not store duplicate samples, we proposed a design method of associative classifier based on Hamming distance and quantum search algorithm, and gave a line diagram for the storage and classification of the associative classifier. The method required the preparation of five sets of qubits in advance to encode Hamming distance, input sample, pattern sample, category and sequence number respectively. Firstly, according to the total N of the sample, the number of qubits required by the associative classifier was calculated, and then the qubits with an initial state of $|0\rangle$ were rotated to an equilibrium superposition state containing exactly N ground states by using the quantum revolving gate and the Hadamard gate. Secondly, according to the category and value of the sample to be stored, the remaining two sets of qubits with initial state of $|0\rangle$ were converted into the corresponding quantum ground state through controllable operation. Finally, based on the classification method of quantum minimum search, the

收稿日期：2023-07-12.
第一作者简介：肖 红(1979—)，女，汉族，博士，副教授，从事量子图像处理和机器学习的研究，E-mail：xh_daqing@126.com.
通信作者简介：刘新彤(2000—)，女，汉族，硕士研究生，从事量子图像处理和量子算法的研究，E-mail：1544158668@qq.com.
基金项目：黑龙江省自然科学基金(批准号：LH2019F004).

Hamming distance between the input sample and all the stored samples was calculated, and then the fixed phase Grover quantum search algorithm was used to search for the minimum value of these Hamming distances. The category of the stored sample corresponding to the minimum value was the category of the input sample, and the specific classification results could be obtained by measuring the quantum states in the register.

Keywords: quantum associative classifier; equilibrium superposition state; Hamming distance; quantum minimum search

Feynman[1]提出了基于量子力学原理构建计算机以避免在经典计算机上模拟量子力学系统所遇到的困难. 随着量子计算机的发展[2]，各种与人工智能相关的量子计算模型层出不穷，例如量子神经网络[3-7]、量子模式识别[8]、量子机器学习[9-10]、量子支持向量机[11-13]和量子分类与决策[14-20]等.

联想记忆可概括为对人脑中信息的存储、联想和检索的研究，对计算机科学的各领域都有重要指导意义. 随着量子计算的兴起，量子联想存储器也得到了迅速发展[21-24]. 量子联想记忆的相关研究包括概率量子存储[25]和量子存储模型的制备与测量[26]. 与经典联想存储器相比，量子联想存储器具有指数级的存储容量和指数级的加速能力. 量子计算具有线性特性，但如果量子态在时间演化过程中出现很小的非线性，则量子计算机即可在多项式时间内解决 NP 完全问题[27]. 因此，Tchapet 等[28]利用非线性搜索算法提出了一种设计量子联想存储器的新方法，该方法表明位翻转通道不会对量子联想存储器产生影响，但相位和位相翻转的破坏性最大. 文献[29-30]提出了模式存储方法，使用量子系统的基态对模式进行编码，所有的存储模式必须彼此不同，因此该方案不适合存储样本，且这两种方案都没有给出具体的量子线路实现存储操作.

量子联想存储和检索一般包括模式存储和模式检索两部分. 模式存储常用的方法是将标记样本存储在均衡叠加态中，但这些方法直接使用量子基态编码模式信息，并不能同时存储相同的样本，因此，这些方法不提供量子线路实现存储方案. 模式检索首先计算输入样本与存储样本之间的相似度，再使用 Grover 算法搜索相似度最大的存储模式[31]，但使用原始 Grover 算法分类成功的概率并不理想.

为改进模式存储和分类，本文提出一种新的模式存储和分类方案. 该方案的模式存储采用量子均衡叠加态，由于本文对模式样本的序号、类别和内容分别进行了编码，因此可以存储相同的模式样本. 同时，本文也给出了特定的量子线路. 在模式分类中，使用改进的 Grover 算法，即提出了一种改进的固定相位($\pi/3$ 或者 $5\pi/3$)Grover 算法，可提高搜索的成功率.

1　量子联想分类器的样本存储

本文提出的量子联想分类器同样将样本存储在均衡叠加态，区别是本文使用 3 组量子比特分别对每个样本的序号、类别和值进行编码，且样本的数量是任意的，不需要满足 2 的整数次幂. 为便于描述，首先给出包含任意数量基态的量子均衡叠加态的构造方法，这些基态可用来编码所有待存储样本的序号.

1.1　量子均衡叠加态的构造

本文采用文献[32]的方法构造含任意数目基态的量子均衡叠加态. 假设有 k 个样本需要存储，若 k 是偶数，则设 $k=m2^r$，m 为奇数，根据文献[32]，$\boldsymbol{U}_k=\boldsymbol{U}_m\otimes\boldsymbol{H}^{\otimes r}$. 因此，要构建酉算子 $\boldsymbol{U}_k$(含 k 个基态的均衡叠加态)，只需先构建酉算子 $\boldsymbol{U}_m$(含 m 个基态的均衡叠加态)，最后再加上 r 个受 Hadamard 门作用的单量子比特. 所以只需考虑 k 为奇数时的构造方法即可.

算法 1　量子均衡叠加态构造方案.

输入：基态个数 k(k 为奇数)，初始值 $t=0$；

输出：含 k 个基态的均衡叠加态；

步骤 1) $t=0$，$k_0=k$；

步骤 2) While $k_t\neq1$

步骤 3) 令 $k_t=2^{r_t}+k_{t+1}$，$1\leqslant k_{t+1}\leqslant 2^{r_t}-1$；

步骤 4) 得到作用在第(r_t+1)个量子位的受控门 $\Lambda_t(\boldsymbol{R}(\theta_{k_t}))$(其中 $\theta_{k_t}=\arctan(\sqrt{k_{t+1}}/\sqrt{2^{r_t}})$)和作用在第 1 到第 r_t 量子位的受控门 $\Lambda_{t+1}(\boldsymbol{H}^{\otimes r_t})$；

步骤 5) $t=t+1$；

步骤 6) End while.

为便于理解，下面以 $k=31$ 为例，给出 $\boldsymbol{U}_{31}$ 的具体构造方法：

$$k_0=k=31,\quad k_t=2^{r_t}+k_{t+1},\quad 1\leqslant k_{t+1}\leqslant 2^{r_t}-1,$$

$$t=0\Rightarrow 31=2^4+15,\quad \Lambda_0\boldsymbol{R}(\theta_{31}),\quad \theta_{31}=\arctan(\sqrt{15}/\sqrt{2^4}),\quad \Lambda_1(\boldsymbol{H}^{\otimes 4}),$$

$$t=1\Rightarrow 15=2^3+7,\quad \Lambda_1\boldsymbol{R}(\theta_{15}),\quad \theta_{15}=\arctan(\sqrt{7}/\sqrt{2^3}),\quad \Lambda_2(\boldsymbol{H}^{\otimes 3}),$$

$$t=2\Rightarrow 7=2^2+3,\quad \Lambda_2\boldsymbol{R}(\theta_7),\quad \theta_7=\arctan(\sqrt{3}/\sqrt{2^2}),\quad \Lambda_3(\boldsymbol{H}^{\otimes 2}),$$

$$t=3\Rightarrow 3=2^1+1,\quad \Lambda_3\boldsymbol{R}(\theta_3),\quad \theta_3=\arctan(1/\sqrt{2}),\quad \Lambda_4(\boldsymbol{H}).$$

图 1 为实现 31 个基态均衡叠加的量子线路.

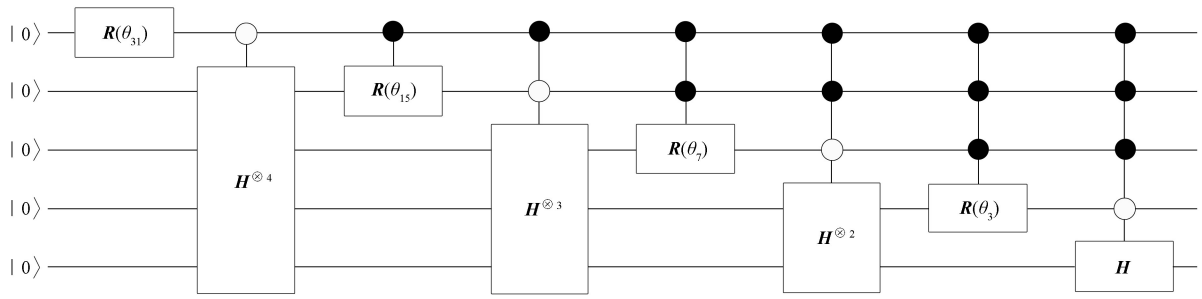


图 1 实现 31 个基态均衡叠加的量子线路

Fig. 1 Quantum circuit for achieving balanced superposition of 31 ground states

1.2 模式样本的分类存储方案

为解决现有存储方案不能存储相同类别样本的问题[31]，即为存储不同类别的样本，需准备 3 个寄存器，分别存储模式样本的序号、类别和样本值. 首先，需计算 3 个寄存器所需的量子比特数，并将 3 个寄存器的初始状态均设为$|0\rangle$；其次，通过一些量子旋转门和 Hadamard 门将序号寄存器转换为均衡叠加态；最后，以叠加态中的每个基态为控制条件，将初始状态为$|0\rangle$的类别寄存器和样本值寄存器转换为与待存储模式样本的类别和值一致的状态.

不失一般性，假设有 N 个 C 模式的二进制量子比特，则存储这些样本的均衡叠加态可表示为

$$|\boldsymbol{M}\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}|\boldsymbol{m}_k\rangle|\boldsymbol{c}_k\rangle|\boldsymbol{k}\rangle,\tag{1}$$

其中$|\boldsymbol{m}_k\rangle=|m_{q-1}^k,m_{q-2}^k,\cdots,m_0^k\rangle$表示第 k 个样本的值，$|\boldsymbol{c}_k\rangle=|c_{t-1}^k,c_{t-2}^k,\cdots,c_0^k\rangle$($t=\lceil\log_2 C\rceil$)表示第 k 个样本的类别，$|k\rangle$表示第 k 个样本的序号.

算法 2 量子联想分类器的模式样本存储方案.

输入：样本个数 N，模式个数 C，序号量子位个数 q；

输出：$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}|\boldsymbol{m}_k\rangle|\boldsymbol{c}_k\rangle|\boldsymbol{k}\rangle$；

步骤 1) 设置 3 种类型寄存器的量子位数量 $n_p=\lceil\log_2 N\rceil$，$n_c=\lceil\log_2 C\rceil$，q；

步骤 2) 初始化寄存器，$|0\rangle^{\otimes(n_p+n_c+q)}$；

步骤 3) 序号构造均衡叠加态 $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}|0\rangle^{\otimes q}|0\rangle^{\otimes n}|k\rangle$；

步骤 4) 令 $k=0$；

步骤 5）While $k\neq N$

步骤 6）　以位置基准态 $|k\rangle$ 作为控制条件，控制相应的 $|0\rangle^{\otimes q}|0\rangle^{\otimes n_c}$ 翻转；

步骤 7）　$k=k+1$；

步骤 8）End while.

由算法 2 的方案可见：即使存在大量的相同样本，也可以以叠加态存储. 此外，这种方法也有利于海量数据的分类和统计处理.

下面以 4 类 20 个 5 位样本为例说明模式样本的存储过程. 共有 20 个样本，所以序号量子位个数是 5，样本类别个数是 4，从而只需要 2 个量子位存储类别个数. 存储这些样本共需 12 个量子比特. 存储这些样本的量子线路如图 2 所示，量子叠加态的表达式为

$$\begin{aligned}|M\rangle=\frac{1}{\sqrt{20}}(&|10000\rangle|11\rangle|00000\rangle+|01111\rangle|00\rangle|00001\rangle+|10010\rangle|10\rangle|00010\rangle+\\&|01100\rangle|10\rangle|00011\rangle+|00001\rangle|01\rangle|00100\rangle+|11100\rangle|11\rangle|00101\rangle+\\&|00100\rangle|10\rangle|00110\rangle+|11011\rangle|00\rangle|00111\rangle+|10001\rangle|10\rangle|01000\rangle+\\&|01000\rangle|01\rangle|01001\rangle+|01010\rangle|00\rangle|01010\rangle+|10110\rangle|11\rangle|01011\rangle+\\&|01001\rangle|00\rangle|01100\rangle+|11001\rangle|01\rangle|01101\rangle+|00011\rangle|00\rangle|01110\rangle+\\&|00110\rangle|10\rangle|01111\rangle+|10101\rangle|11\rangle|10000\rangle+|00010\rangle|01\rangle|10001\rangle+\\&|00100\rangle|11\rangle|10010\rangle+|01101\rangle|01\rangle|10011\rangle).\end{aligned}\tag{2}$$

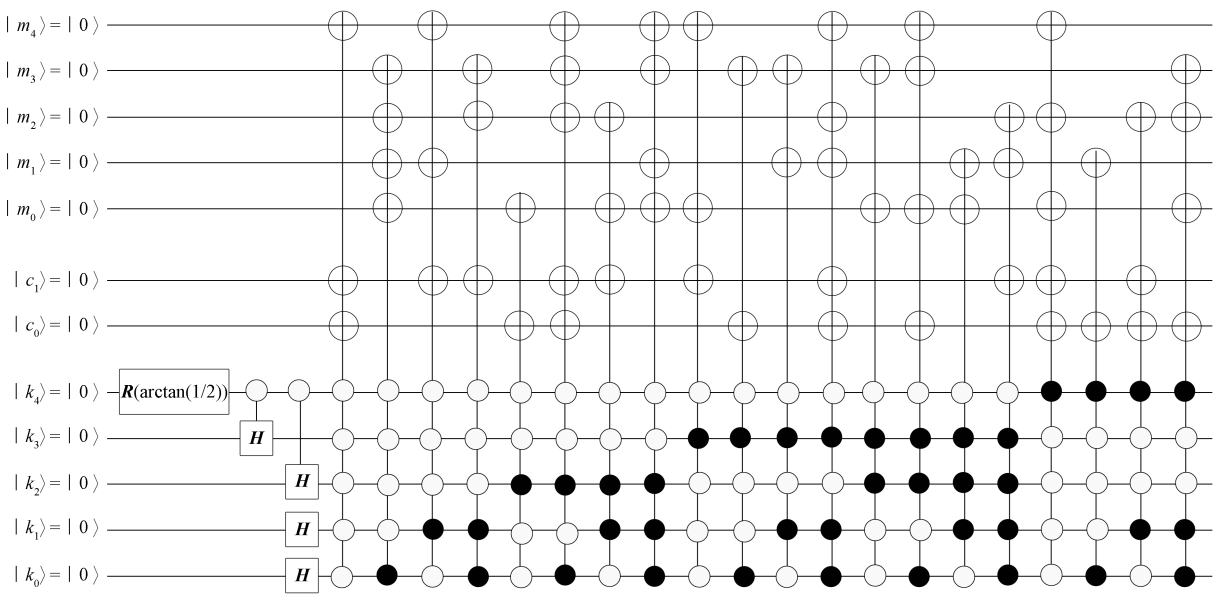


图 2　存储 4 类 20 个 5 位模式样本的量子线路

Fig. 2　Quantum circuit that stores 20 5-bit mode samples from 4 categories

2　量子联想分类器的分类方法

本文设计一种基于量子最小值搜索的联想分类方法. 先计算输入样本与所有存储样本之间的 Hamming 距离，再使用 Grover 搜索算法搜索这些 Hamming 距离的最小值. 最小值所对应存储样本的类别即为待分类输入样本的类别. 本文提出一种改进的固定相位 Grover 算法.

2.1　改进的固定相位 Grover 算法

2.1.1　固定相位 Grover 算法

设标记项为 $|s_1\rangle,|s_2\rangle,\cdots,|s_M\rangle$，未标记项为 $|t_1\rangle,|t_2\rangle,\cdots,|t_{N-M}\rangle$，$\cos\theta=\sqrt{(N-M)/N}$，$\sin\theta=\sqrt{M/N}$，$0<\theta<\pi/2$，其中 N 为任意自然数，不需要是 2 的整数次幂. 系统的初始状态为

$$|\boldsymbol{\psi}^{(0)}\rangle=\boldsymbol{U}_N|0\rangle^{\otimes\lceil\log_2 N\rceil}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{N-1}|i\rangle=\frac{\cos\theta}{\sqrt{N-M}}\sum_{i=1}^{N-M}|t_i\rangle+\frac{\sin\theta}{\sqrt{M}}\sum_{i=1}^{M}|s_i\rangle=\sin\theta|\boldsymbol{s}\rangle+\cos\theta|\boldsymbol{t}\rangle,\quad(3)$$

其中 $|\boldsymbol{s}\rangle=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{i=1}^{M}|s_i\rangle$ 为标记态的叠加，$|\boldsymbol{t}\rangle=\frac{1}{\sqrt{N-M}}\sum_{i=1}^{N-M}|t_i\rangle$ 为非标记态的叠加，$\boldsymbol{U}_N$ 为有 N 个基态的均衡叠加态的酉算子.

Grover 算法中两个相移算子的一般形式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{I}_s=\boldsymbol{I}-(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|\boldsymbol{s}\rangle\langle\boldsymbol{s}|,\\ \boldsymbol{I}_0=\boldsymbol{I}-(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})|0\rangle\langle 0|,\end{cases}\quad(4)$$

其中 $|\boldsymbol{s}\rangle$ 为标记态，φ 为相移，$\boldsymbol{I}_s$，$\boldsymbol{I}_0$ 为相移算子，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵. 迭代运算符为

$$\boldsymbol{G}=-\boldsymbol{U}_N\boldsymbol{I}_0\boldsymbol{U}_N^{+}\boldsymbol{I}_s=\begin{pmatrix}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\cos^2\theta-1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\sin\theta\cos\theta\\ (1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\sin\theta\cos\theta & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}((1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\sin^2\theta-1)\end{pmatrix},\quad(5)$$

其中 $\boldsymbol{U}_N$ 为含 N 个基态的酉算子，$\boldsymbol{U}_N^{+}$ 为 $\boldsymbol{U}_N$ 的厄米算符，φ 为相移，$\boldsymbol{I}_s$，$\boldsymbol{I}_0$ 为相移算子.

根据文献[33]的结果，经过 q 次迭代后，系统状态为

$$|\boldsymbol{\psi}^{(q)}\rangle=\boldsymbol{G}^q|\boldsymbol{\psi}^{(0)}\rangle=a_q|\boldsymbol{s}\rangle+b_q|\boldsymbol{t}\rangle,\quad(6)$$

其中 $a_q=\sin\theta(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\varphi}\boldsymbol{U}_q(y)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-1)\varphi}\boldsymbol{U}_{q-1}(y))$，$b_q=\cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-1)\varphi}(\boldsymbol{U}_q(y)+\boldsymbol{U}_{q-1}(y))$，$\boldsymbol{G}^q$ 表示 $\boldsymbol{G}$ 经过 q 次迭代，$y=\cos\delta=2\sin^2\theta\sin^2(\varphi/2)-1$，$\boldsymbol{U}_q(y)=\sin((q+1)\delta)/\sin\delta$ 是第二类 Chebyshev 多项式. 算法的成功概率为

$$P_s^q=|a_q|^2=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\delta}(1-\cos\delta\cos((2q+1)\delta)+2\cos\varphi\sin((q+1)\delta)\sin(q\delta)).\quad(7)$$

在龙算法的 SO(3)图中[34]，每迭代一次，算子 $\boldsymbol{G}$ 使相位旋转 $4\arcsin(\sin(\varphi/2)\sin\theta)$ 弧度，使成功概率最大化的迭代次数为

$$Q=\left\lfloor\frac{\pi}{4}\arcsin\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sqrt{\frac{M}{N}}\right\rfloor,\quad(8)$$

其中 φ 为相位参数，当 $\varphi=\pi$ 时，该算法等价于原始 Grover 算法. 当 φ 取其他特定值时，该算法等价于其他版本的 Grover 算法. 成功概率最大时的迭代次数与标记数 M 有关，若预先不知道标记项数量，则不能直接使用该算法.

2.1.2 搜索目标个数未知时相移 φ 的确定

为解决标记项数未知的搜索问题，给出以下引理.

引理 1 令 m 为正整数，q 是 0～$(m-1)$内随机选取的正整数. 测量从初始状态开始进行 q 次迭代后寄存器的平均成功概率为

$$P_m=\frac{1}{2\sin^2(\varphi/2)(1-\cos\delta)}\left(1+\cos\delta\cos\varphi-(\cos\delta+\cos\varphi)\frac{\sin2m\delta}{2m\sin\delta}\right).$$

当 $m\geqslant\frac{1}{\sin\delta}$ 时，如果 φ 为 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$，则 $\frac{1}{4}\leqslant P_m\leqslant\frac{2\cos\varphi\sin^2\theta+\cos^2\theta+2}{4-2\sin^2\theta(1-\cos\varphi)}$.

证明：随机选取整数 $0\leqslant q\leqslant m-1$，当 $m\geqslant\frac{1}{\sin\delta}$ 时，q 次迭代之后的平均成功概率为

$$P_m=\frac{1}{m}\sum_{q=0}^{m-1}P_s^q\frac{1}{2\sin^2\varphi/2(1-\cos\delta)}\left(1+\cos\delta\cos\varphi-\frac{(\cos\delta+\cos\varphi)\sin(2m\delta)}{2m\sin\delta}\right)\geqslant$$

$$\frac{1}{2\sin^2\varphi/2(1-\cos\delta)}\left(1+\cos\varphi\cos\delta+\frac{\cos\delta+\cos\varphi}{2}\right)\geqslant\frac{1}{4\sin^2\varphi/2}\left(\frac{1-\cos\varphi}{2}\right)=\frac{1}{4}=P_{\min},$$

$$P_m=\frac{1}{2\sin^2\varphi/2(1-\cos\delta)}\left(1+\cos\delta\cos\varphi-\frac{(\cos\delta+\cos\varphi)\sin(2m\delta)}{2m\sin\delta}\right)\leqslant$$

$$\frac{1}{2\sin^2\varphi/2(1-\cos\delta)}\left(1+\cos\varphi\cos\delta-\frac{\cos\delta+\cos\varphi}{2}\right)=\frac{2\cos\varphi\sin^2\theta+\cos^2\theta+2}{4-2\sin^2\theta(1-\cos\varphi)}=P_{\max},$$

$$\frac{\partial P_{\max}}{\partial\varphi}=\frac{\partial P_{\max}}{\partial\cos\varphi}\frac{\partial\cos\varphi}{\partial\varphi}=\frac{-2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin\varphi}{(4-2\sin^2\theta(1-\cos\varphi))^2},$$

其中 $\delta=\arccos(2\sin^2\theta\sin^2(\varphi/2)-1)$.

由于 Grover 算法的迭代次数不超过 $\sqrt{N}$，所以 m 必须满足 $\frac{1}{\sin\delta}\leqslant m\leqslant\sqrt{N}$，即 $\sin\delta\geqslant\frac{1}{\sqrt{N}}$，$\sin\delta=\sqrt{1-\cos^2\delta}=2\sin\theta\sin(\varphi/2)\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2(\varphi/2)}$.

当 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ 或 $3\pi/2\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ 时，

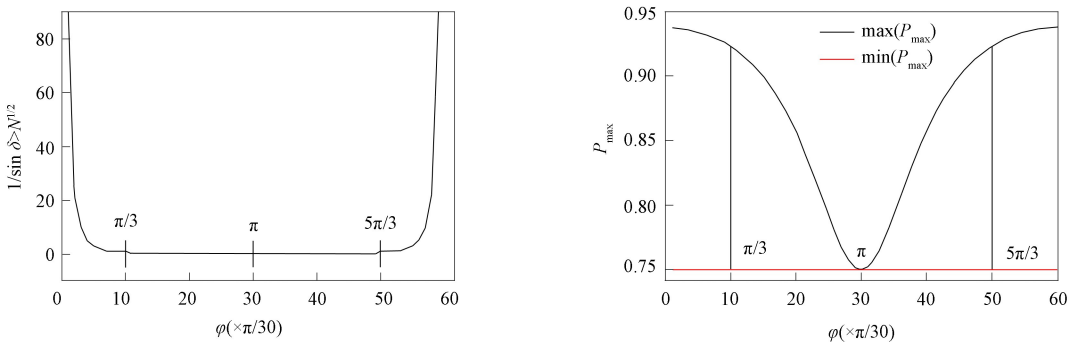
$$\frac{\partial\sin\delta}{\partial\sin\theta}=\frac{2\sin(\varphi/2)-4\sin^3(\varphi/2)\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi/2)\sin^2\theta}}\geqslant 0,$$

此时，$\sin\delta$ 随 $\sin\theta$ 的增大而增大，所以

$$\sin\delta\geqslant(\sin\delta)_{\min}=2\sqrt{\frac{1}{N}}\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\frac{1}{N}\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

由 $(\sin\delta)_{\min}\geqslant\frac{1}{\sqrt{N}}$ 可得 $\cos\varphi\leqslant\frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}+\sqrt{N-1}}\leqslant\frac{1}{2}$. 因此，$\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{3}$.

由于当 $\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\partial P_{\max}}{\partial\varphi}\leqslant0$；当 $\frac{3\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{3}$ 时，$\frac{\partial P_{\max}}{\partial\varphi}\geqslant0$，因此本文将旋转相位设为 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 或 $\varphi=\frac{5\pi}{3}$. 以 $N=2^{20}$，$M=1\sim\frac{3N}{4}$ 为例，设 φ 分别为 $\frac{\pi}{30},\frac{2\pi}{30},\cdots,\frac{59\pi}{30}$，计算每个 φ 值 $\frac{1}{\sin\delta}>\sqrt{N}$ 的个数及 $P_{\max}$ 的最大值和最小值，结果如图 3 所示. 设置 $M=1\sim3N/4$ 只是为使不同 φ 值比较结果更清晰. 在实际算法中并没有该限制，即 $1\leqslant M\leqslant N$.



(A) 不同相位中 $1/\sin\delta>N^{1/2}$ 的个数　　(B) 不同相位 φ 的 $P_{\max}$ 曲线

图 3　不同相位中 $1/\sin\delta>\sqrt{N}$ 的个数(A)及成功概率 $P_{\max}$ 曲线(B)

Fig. 3　Number of $1/\sin\delta>\sqrt{N}$ (A) and curve of success probabilities $P_{\max}$ (B) under different phases

由图 3(A)可见，当 $\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{3}$ 时，$\frac{1}{\sin\delta}\leqslant\sqrt{N}$；当 $\varphi<\frac{\pi}{3}$ 或 $\varphi>\frac{5\pi}{3}$ 时，$\frac{1}{\sin\delta}>\sqrt{N}$. 由图 3(B)可见，当 $\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{3}$，且 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 或 $\varphi=\frac{5\pi}{3}$ 时，$P_{\max}$ 的最大值为 0.923 1，这也是本文选择这两个相位的原因. 当本文算法相位 $\varphi=\pi$ 时，等价于原始 Grover 算法. 虽然它不违反 $\frac{1}{\sin\delta}\leqslant\sqrt{N}$，但成功的最大概率只有 0.75. 对于标记项数未知的 Grover 算法，固定相位 $\pi/3$ 或 $5\pi/3$ 是最佳选择.

但文献[33]算法中 $\varphi=1.916\ 84\pi$，不能满足 $\frac{1}{\sin\delta}\leqslant\sqrt{N}$. 因此，对于某些标记项数概率 M/N，不能保证搜索的有效实现.

2.1.3　搜索目标个数未知时的搜索方案

设存在 $T[0,1,\cdots,N-1]$，希望找到 x，即找到一个整数 $0\leqslant i\leqslant N-1$，并且 $T[i]=x$，假设 i 存在，但 i 的数量 M 未知. 本文采用文献[35]中的方案对未知标记项数进行搜索.

算法 3　搜索目标个数未知时的搜索方案.

输入：含 N 个基态的量子均衡叠加态；

输出：搜索基态 i；

步骤 1) 初始化 $n=1$, $m=1$, $\lambda=\frac{6}{5}\left(1<\lambda<\frac{4}{3}\right)$;

步骤 2) 均匀随机选择小于 m 的非负整数 j;

步骤 3) 初始化 $|\boldsymbol{\psi}^{(0)}\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i|i\rangle$;

步骤 4) While $n\leqslant j$

步骤 5) $|\boldsymbol{\psi}^{(n)}\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i|i\rangle$;

步骤 6) 观察寄存器: i 作为输出;

步骤 7) If $T[i]=x$;

步骤 8) 问题解决, exit;

步骤 9) Else

步骤 10) $m=\min\{\lambda m,\sqrt{N}\}$;

步骤 11) 返回步骤 2);

步骤 12) End if

步骤 13) End while.

2.2 基于改进固定相位 Grover 算法的最小值搜索

设 $T[0,1,\cdots,N-1]$为包含 N 个元素的无序列表. 最小搜索是找到最小值 $T[y]$的索引 y, 但标记最小值 $T[y]$的索引可能不是唯一的, 因此这是一个含有未知数量标记项的搜索. 本文采用文献[36]中的方案进行最小搜索. 搜索的基本思想是先使用固定相位($\pi/3$ 或 $5\pi/3$)的 Grover 算法查找小于当前阈值 $T[y]$的项的索引 y_0, 然后使用 $T[y_0]$作为新的阈值. 重复上述过程, 直到获得最小值的概率足够大, 算法如下.

算法 4 量子最小值搜索算法.

输入: 含 N 个基态的量子均衡叠加态;

输出: 搜索目标 y;

步骤 1) 令 $t=0$

步骤 2) 均匀随机选择阈值索引 $0\leqslant y\leqslant N-1$;

步骤 3) While $t\leqslant\frac{45}{4}\sqrt{N}+\frac{7}{10}\log_2^2N$;

步骤 4) 初始化内存为 $\sum_j N^{-0.5}|j\rangle|y\rangle$, 标记 $T[j]<T[y]$ 的每个条目 j;

步骤 5) $t=t+p(N,r)\log_2N$;

步骤 6) 使用固定相位 $\pi/3$ 或 $5\pi/3$ 的 Grover 算法;

步骤 7) $t=t+p(N,r)\frac{9}{2}\sqrt{\frac{N}{r-1}}$;

步骤 8) 观察第一个寄存器, 令 y'作为输出;

步骤 9) If $T[y']<T[y]$;

步骤 10) $y=y'$;

步骤 11) End if

步骤 12) End while

步骤 13) Return y.

关于最小搜索算法的运行时间, 有如下结果.

定理 1 用算法 4 的搜索方案可求出最小值, 其期望总时间步数为 $O(\sqrt{N})$.

证明: 设 $P(t,r)$是当有固定相位($\pi/3$ 或 $5\pi/3$)的 Grover 算法在 t 个元素中搜索时, r 个元素的索引将被选择的概率. 根据文献[36]中的引理 1, 如果 $r\leqslant t$, 则 $P(t,r)=1/r$, 否则 $P(t,r)=0$.

令 $m_q=\frac{1}{\sin\delta}$，使用固定相位$\frac{\pi}{3}$或$\frac{5\pi}{3}$的 Grover 算法寻找解的期望迭代次数上界为$\frac{9}{2}m_q$. 此外，根据文献[36]中的引理 2，在 $T[y]$保持最小值之前的第 2 阶段的预期时间步长总数最多为 $\sum_{r=2}^{N}\left(p(N,r)\frac{9}{2}\sqrt{\frac{N}{r-1}}\right)\leqslant\frac{45}{4}\sqrt{N}$，并且在 $T[i]$保持最小之前的第 2 阶段的预期时间步长总数至多为 $\sum_{r=2}^{N}(p(N,r)\log_2 N)\leqslant\frac{7}{10}\log_2^2 N$. 因此，算法 4 中方案预期的时间步长最多为$\frac{45}{4}\sqrt{N}+\frac{7}{10}\log_2^2 N=O(\sqrt{N})$.

算法 4 中的方案，运行$\frac{45}{4}\sqrt{N}+\frac{7}{10}\log_2^2 N$次并不总能找到最小值. 实际上，该方案通过反复调用算法 4 中的方案搜索最小值. 算法 4 中的方案实际上是一个试探性随机搜索，成功所需平均迭代次数的上界为$\frac{9}{2}m_q$. 因此，算法 4 的最小搜索方案实际上采用了不达到目标不放弃的策略，平均迭代次数的上界是$\frac{45}{4}\sqrt{N}+\frac{7}{10}\log_2^2 N=O(\sqrt{N})$.

2.3　计算 Hamming 距离的量子线路设计

量子联想分类器的分类基于 Hamming 距离，因此需设计量子线路计算两个样本之间的 Hamming 距离. 本文首先设计一个量子线路模块实现加 1，如图 4 所示.

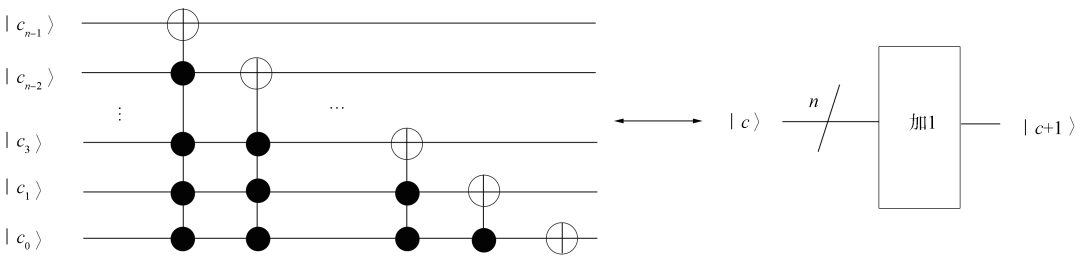


图 4　加 1 量子线路模块

Fig. 4　Add 1 quantum circuit module

对于 n 量子位基态，该模块使其以循环的方式反复加 1，即$|0\rangle\rightarrow|1\rangle\rightarrow\cdots|2^n-1\rangle\rightarrow|0\rangle\rightarrow\cdots$. 对于两组 q 位二进制样本，Hamming 距离是具有相同位置且它们之间的值不同的位的数目. 因此，计算 Hamming 距离可通过逐个检测对应的位，并将检测结果累加实现. 根据该思想设计的计算两个样本之间 Hamming 距离的量子线路如图 5 所示. 其中$|m_{q-1}m_{q-2}\cdots m_0\rangle$为存储样本，$|p_{q-1}p_{q-2}\cdots p_0\rangle$为输入样本. q 加 1 模块依次检测两个采样对应的位. 如果它们不相同，则 Hamming 距离增加 1. 最终 Hamming 距离存储在$|h_{s-1}h_{s-2}\cdots h_0\rangle$中，初始态为$|0\rangle^{\otimes s}$.

2.4　基于量子联想分类器的输入样本分类

设基态$|p_{q-1}p_{q-2}\cdots p_0\rangle$为 q 位输入样本，$h=|0\rangle^{\otimes s}$为存储 Hamming 距离的寄存器. 它们都与存储的 N 个 q 位模式样本纠缠在一起，用公式表示为

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}|h_{s-1}^k h_{s-2}^k\cdots h_0^k\rangle p_{q-1}p_{q-2}\cdots p_0\rangle|m_{q-1}^k m_{q-2}^k\cdots m_0^k\rangle|c_{t-1}^k c_{t-2}^k\cdots c_0^k\rangle|k\rangle, \tag{9}$$

其中：$n=\lceil\log_2 N\rceil$；$s=\lceil\log_2 q\rceil$，$t=\lceil\log_2 C\rceil$，C 为存储样本的类别数.

量子联想分类器的分类任务是通过寻找新输入样本与所有存储样本之间的 Hamming 距离的最小值确定新输入样本$|p_{q-1}p_{q-2}\cdots p_0\rangle$的类别. 解决该问题的基本思路是利用 Hamming 距离模块计算输入样本与所有存储样本之间的 Hamming 距离. 根据量子态的叠加原理，可同时计算输入样本与所有存储样本之间的距离，然后使用固定相位($\pi/3$ 或 $5\pi/3$)的 Grover 算法搜索这些距离的最小值，最后对分类器进行测量. 此时，寄存器$|c_{t-1}c_{t-2}\cdots c_0\rangle$的测量结果为输入样本的类别. 用于分类的量子线路如图 6 所示.

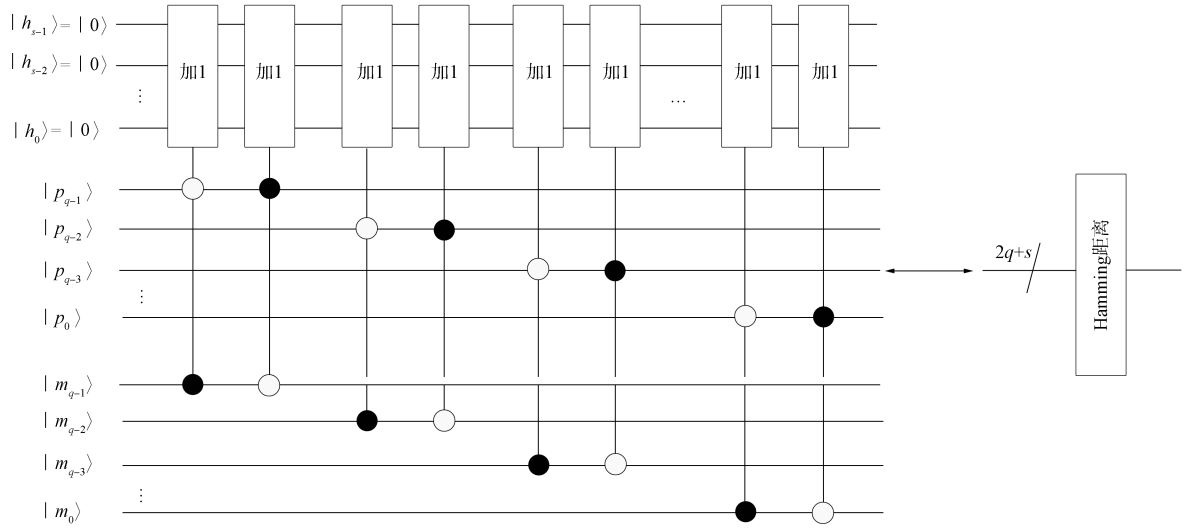


图 5 计算两组 q 位样本之间 Hamming 距离的量子线路($s=\lceil \log_2 q \rceil$)

Fig. 5 Quantum circuit that calculates Hamming distance between two sets of q-bit samples ($s=\lceil \log_2 q \rceil$)

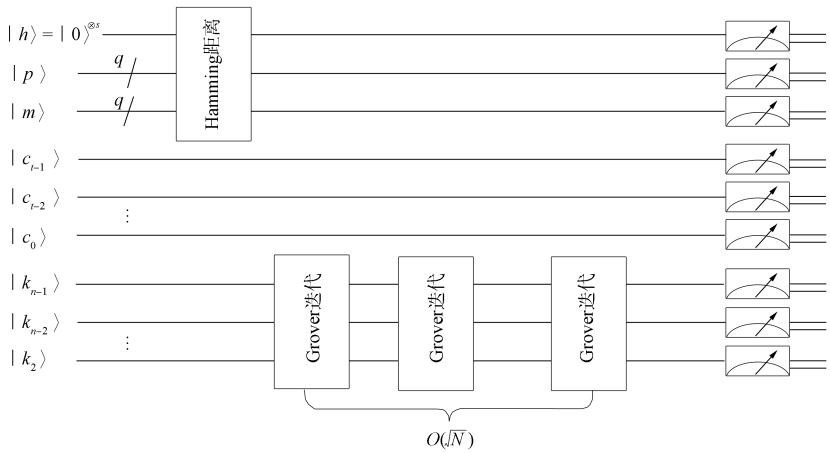


图 6 用于输入样本分类的量子线路

Fig. 6 Quantum circuit used for input sample classification

由图 6 可见，Grover 算法在由 N 个样本的序号组成的无序数据库中进行搜索. 搜索过程还涉及到 Hamming 距离模块与序号量子比特的纠缠，例如确定一条记录是否为标记项等.

设有 N 个 q 位二进制样本，可分为 C 类，其中一个输入二进制样本 $P=p_{q-1}p_{q-2}\cdots p_0$. 量子联想分类器的任务是将 N 个已知样本存储在内存中，同时确定输入样本的类别. 量子联想分类器采用 5 个纠缠寄存器 $|\boldsymbol{h}\rangle|\boldsymbol{p}\rangle|\boldsymbol{m}\rangle|\boldsymbol{c}\rangle|\boldsymbol{k}\rangle$，初始态分别为 $|0\rangle^{\otimes s}|0\rangle^{\otimes q}|0\rangle^{\otimes q}|0\rangle^{\otimes t}|0\rangle^{\otimes n}$，分别存储 Hamming 距离、输入样本、模式样本、类别和序号. 根据上述假设，5 个寄存器中的量子比特数为 $s=\lceil \log_2 q \rceil$，$q,q,t=\lceil \log_2 C \rceil$，$n=\lceil \log_2 N \rceil$. 量子联想分类器总线路如图 7 所示. 旋转门 $\boldsymbol{R}(\theta_j)$用于将输入样本加载到分类器的寄存器 $|p_{q-1}p_{q-2}\cdots p_0\rangle$中，其中 $\theta_j=p_j(\pi/2)$，$j=q-1,q-2,\cdots,0$.

图 7 中，分类器的 5 个寄存器在不同时刻的状态分别为

$$|\boldsymbol{\psi}_0\rangle=|0\rangle^{\otimes s}|0\rangle^{\otimes q}|0\rangle^{\otimes q}|0\rangle^{\otimes t}|0\rangle^{\otimes n}, \tag{10}$$

$$|\boldsymbol{\psi}_1\rangle=\sum_{k=0}^{N-1}|0\rangle^{\otimes s}|0\rangle^{\otimes q}|0\rangle^{\otimes q}|0\rangle^{\otimes t}|\boldsymbol{k}\rangle, \tag{11}$$

$$|\boldsymbol{\psi}_2\rangle=\sum_{k=0}^{N-1}|0\rangle^{\otimes s}|p_{q-1}p_{q-2}\cdots p_0\rangle|m_{q-1}^k m_{q-2}^k\cdots m_0^k\rangle|c_{t-1}^k c_{t-2}^k\cdots c_0^k\rangle|\boldsymbol{k}\rangle, \tag{12}$$

$$|\psi_3\rangle=\sum_{k=0}^{N-1}|h_{s-1}^k h_{s-2}^k\cdots h_0^k\rangle|p_{q-1}p_{q-2}\cdots p_0\rangle|m_{q-1}^k m_{q-2}^k\cdots m_0^k\rangle|c_{t-1}^k c_{t-2}^k\cdots c_0^k\rangle|\boldsymbol{k}\rangle,\tag{13}$$

$$|\psi_4\rangle=|\hat{h}_{s-1}^k\hat{h}_{s-2}^k\cdots\hat{h}_0^k\rangle|p_{q-1}p_{q-2}\cdots p_0\rangle|\hat{m}_{q-1}^k\hat{m}_{q-2}^k\cdots\hat{m}_0^k\rangle|\hat{c}_{t-1}^k\hat{c}_{t-2}^k\cdots\hat{c}_0^k\rangle|\hat{k}_{n-1}\hat{k}_{n-2}\cdots\hat{k}_0\rangle,\tag{14}$$

其中$|\psi_4\rangle$不再处于叠加态，而是处于某一基态，寄存器$|\hat{c}_{t-1}^k\hat{c}_{t-2}^k\cdots\hat{c}_0^k\rangle$的值为输入二进制样本$P=p_{q-1}p_{q-2}\cdots p_0$的分类结果.

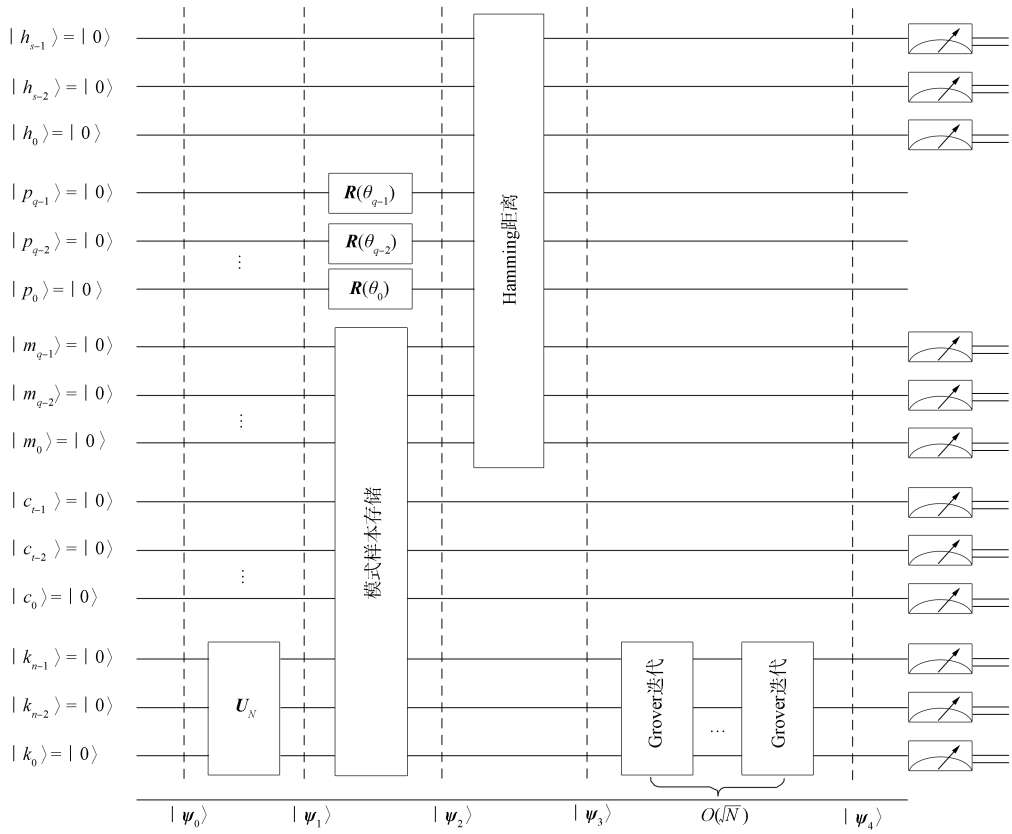


图 7　量子联想分类器总线路

Fig. 7　Total circuit of quantum associative classifier

3　经典计算机仿真

目前物理量子计算机还无法实现，本文在经典计算机上进行量子联想分类器的模拟. 在 Intel(R) Core(TM) i7-4790 CPU @ 3.60 GHz，8.00 GB RAM 和 64 位操作系统的经典计算机上进行仿真. 仿真基于线性代数，以复向量作为量子态，幺正矩阵作为幺正变换，使用 MATLAB 9.3.0.713579 (R2017b)进行计算. 在经典计算机上，虽然无法验证量子计算的并行性，但可以验证算法的实验结果. 下面以 MNIST 手写体数字数据库为例验证量子联想分类器的可行性.

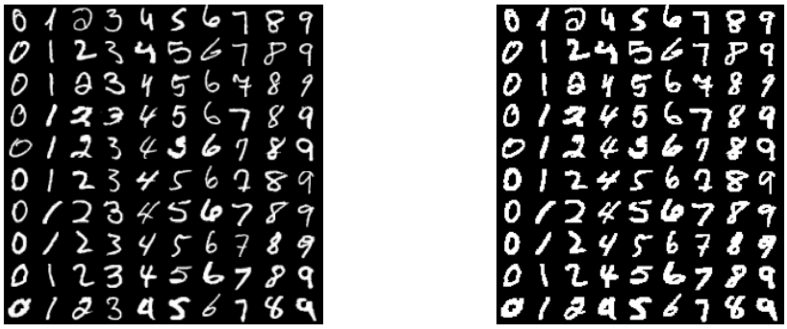
3.1　手写数字数据库 MNIST

手写数字数据库 MNIST 有一个包含 6 万个样本的训练集和一个包含 1 万个样本的测试集(http://yann.lecun.com/exdb/mnist/index.html). 这些数字已被尺寸标准化，并在固定大小的图像中居中. 从 0～9 的图像数量训练集分别为 5 923,6 742,5 958,6 131,5 842,5 421,5 918,6 265,5 851,59 492，测试集分别为 980,1 135,1 032,1 010,982,892,958,1 028,974,1 009. 所有数字都是 28×28 的灰度图像.

3.2　手写数字图像的预处理

由于量子联想分类器只能接收二值向量样本，因此本文需将所有手写数字图像转换为二值向量. 对数字图像的二值化，通常采用阈值分割，如具有全局最优效果的 Otsu 阈值. 为简单，本文先选择基于像素灰度值直方图的阈值. 然后将所有大于等于该阈值的灰度值设为 1，将小于该阈值的灰度值设

为0. 以从每个类别的训练集中随机选择10张训练图像为例，二值化前后的图像如图8所示. 最后使用NEQR(nearly equal quantizer with a rounding-off procedure)模型将28×28的二值图像用11个量子比特表示，其中1个量子比特表示颜色，5个量子比特表示Y方向坐标$|y_4\rangle|y_3\rangle|y_2\rangle|y_1\rangle|y_0\rangle$，5个量子比特表示$X$方向坐标$|x_4\rangle|x_3\rangle|x_2\rangle|x_1\rangle|x_0\rangle$，$|y_i\rangle$，$|x_i\rangle\in\{0,1\}$.



(A) 灰度图像 (B) 二进制图像

图8 每个类别随机选择的10个训练集图像

Fig. 8 Ten randomly selected training set images for each category

3.3 量子联想分类器参数设置

对于数据库MNIST，训练集需存储在内存中. 根据训练集的样本信息，量子联想分类器中初始状态为$|\boldsymbol{h}\rangle|\boldsymbol{p}\rangle|\boldsymbol{m}\rangle|\boldsymbol{c}\rangle|\boldsymbol{k}\rangle=|0\rangle^{\otimes s}|0\rangle^{\otimes q}|0\rangle^{\otimes q}|0\rangle^{\otimes t}|0\rangle^{\otimes n}$的5个寄存器大小分别为$s=\lceil\log_2 11\rceil=4$，$q=\lceil\log_2 28\rceil+\lceil\log_2 28\rceil+1=11$，$t=\lceil\log_2 10\rceil=4$，$n=\lceil\log_2 60\ 000\rceil=16$. 因此，构建该量子联想分类器需要46个量子比特和一些用于酉变换的量子门.

3.4 量子联想分类器的分类结果

量子联想分类器的初始状态为$|0\rangle^{\otimes 46}$，存储训练集样本后的状态为

$$|\boldsymbol{\psi}\rangle=\frac{1}{\sqrt{60\ 000}}\sum_{k=0}^{59\ 999}|0\rangle^{\otimes 4}|0\rangle^{\otimes 11}|m_{10}^k m_9^k\cdots m_0^k\rangle|c_3^k c_2^k c_1^k c_0^k\rangle|k\rangle. \tag{15}$$

对于第j个测试样本($1\leqslant j\leqslant 10\ 000$)，首先通过一些量子旋转门将其加载到寄存器$|p_{10}p_9\cdots p_0\rangle$中，然后使用Hamming距离模块并行计算Hamming距离，并使用固定相位($\pi/3$或$5\pi/3$)的Grover算法求出这些Hamming距离的最小值. 最后，经过约$\frac{45}{4}\sqrt{N}+\frac{7}{10}\log_2^2 N=2\ 932$次的搜索，可由寄存器$|c_{t-1}c_{t-2}\cdots c_0\rangle$的测量结果$|\hat{c}_{t-1}\hat{c}_{t-2}\cdots\hat{c}_0\rangle$得到输入样本的模式，由寄存器$|h_{s-1}h_{s-2}\cdots h_0\rangle$的测量结果$|\hat{h}_{s-1}\hat{h}_{s-2}\cdots\hat{h}_0\rangle$得到输入样本与最相似存储样本的Hamming距离，由$|m_{q-1}\ m_{q-2}\cdots m_0\rangle$和$|k_{n-1}k_{n-2}\cdots k_0\rangle$的测量结果$|\hat{m}_{q-1}\hat{m}_{q-2}\cdots\hat{m}_0\rangle$和$|\hat{k}_{n-1}\hat{k}_{n-2}\cdots\hat{k}_0\rangle$分别得到与输入样本最相似的存储样本值和序号.

通过对10 000个测试样本的分析，发现其中345个样本与Hamming距离最小的训练样本不属于同一类. 因此，量子联想分类器不可能对这些样本获得正确结果. 此外，在所有测试样本中，有59个匹配样本. 每种方法都有多个Hamming距离最小的训练样本，但这些训练样本并不都与测试样本属于同一类别. 对于这59个测试样本，量子联想分类器并不能总得到正确结果. 实验结果表明，量子联想分类器的分类准确率可达95.96%以上，比文献[31]方法的准确率更高. 文献[31]中提出的模式识别方法通过手动设置Hamming距离的阈值方式进行样本识别，只要存储的模式样本与待识别样本的Hamming距离小于该阈值，则将此待识别样本的类别判定为与存储模式样本相同. 在这种方式中，当小于该阈值的存储模式存在多个不同类型的样本时，可能会出现待识别样本被错误识别的情况，从而导致识别率相对较低，识别效果不理想. 而本文方法通过搜索Hamming距离的最小值，得到最终分类结果，使分类结果更准确，在一定程度上解决了该问题，使本文方法的分类准确率更高.

综上所述，针对现有联想分类器不能存储重复样本的问题，本文提出了一种新的量子联想分类器，并给出了实现模式样本存储的量子线路. 该分类器采用两种新技术：1) 提出了任意数量样本的存

储技术，通过将样本序号和样本值分开存储，可有效解决其他类似算法无法存储重复样本的问题；2）基于固定相位的 Grover 算法搜索技术，通过将旋转相位固定为 $\pi/3$ 或 $5\pi/3$ 提高搜索性能. 与经典分类器相比，该分类器的优势是对所有样本进行并行处理的能力. 随着海量数据在信息处理领域的日益突出，这种并行处理能力具有重要意义. 此外，目前量子计算机尚未普及，本文提出的联想分类器设计方案无实用价值，但作为一种前瞻性的理论探索，本文结果对未来量子硬件普及后解决联想分类问题具有一定的参考意义.

参　考　文　献

[1] FEYNMAN R. Simulating Physics with Computers [J]. International Journal of Theoretical Physics, 1982, 21: 467-488.

[2] GYONGYOSI L, IMRE S. A Survey on Quantum Computing Technology [J]. Computer Science Review, 2019, 31: 51-71.

[3] PAQUET E, SOLEYMANU F. QuantumLeap: Hybrid Quantum Neural Network for Financial Predictions [J]. Expert Systems with Applications, 2022, 195: 116583-1-116583-11.

[4] ABBAS A, SUTTER D, ZOUFAL C, et al. The Power of Quantum Neural Networks [J]. Nature Computational Science, 2021, 1(6): 403-409.

[5] TIAN J K, SUN X Y, DU Y X, et al. Recent Advances for Quantum Neural Networks in Generative Learning [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2023, 45(10): 12321-12340.

[6] QI J, YANG C H H, CHEN P Y. QTN-VQC: An End-to-End Learning Framework for Quantum Neural Networks [EB/OL]. (2021-10-06)[2023-01-15]. https://arxiv.org/abs/2110.03861.

[7] SKOLIK A, MCCLEAN J R, MOHSENI M, et al. Layerwise Learning for Quantum Neural Networks [J]. Quantum Machine Intelligence, 2021, 3: 1-11.

[8] SHARMA R, KAUSHIK B, GONDHI N K, et al. Quantum Particle Swarm Optimization Based Convolutional Neural Network for Handwritten Script Recognition [J]. Computers Materials and Continua, 2022, 71(3): 5855-5873.

[9] CEREZO M, VERDON G, HUANG H Y, et al. Challenges and Opportunities in Quantum Machine Learning [J]. Nature Computational Science, 2022, 2(9): 567-576.

[10] MELNIKOV A, KORDZANGANEH M, ALODJANTS A, et al. Quantum Machine Learning: From Physics to Software Engineering [J]. Advances in Physics: X, 2023, 8(1): 2165452-1-2165452-52.

[11] RANA A, VAIDYA P, GUPTA G. A Comparative Study of Quantum Support Vector Machine Algorithm for Handwritten Recognition with Support Vector Machine Algorithm [J]. Materials Today: Proceedings, 2022, 56: 2025-2030.

[12] KAVITHA S S, KAULGUD N. Quantum Machine Learning for Support Vector Machine Classification [J]. Evolutionary Intelligence, 2022, 17: 819-828.

[13] SINGH G, KAUR M, SINGH M, et al. Implementation of Quantum Support Vector Machine Algorithm Using a Benchmarking Dataset [J]. Indian Journal of Pure & Applied Physics (IJPAP), 2022, 60(5): 407-414.

[14] XIAO F, PEDRYCZ W. Negation of the Quantum Mass Function for Multisource Quantum Information Fusion with Its Application to Pattern Classification [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2022, 45(2): 2054-2070.

[15] ISHWARYA M S, CHERUKURI A K. Quantum-Inspired Ensemble Approach to Multi-attributed and Multi-agent Decision-Making [J]. Applied Soft Computing, 2021, 106: 107283-1-107283-9.

[16] FERRO G M, KOVALENKO T, SORNETTE D. Quantum Decision Theory Augments Rank-Dependent Expected Utility and Cumulative Prospect Theory [J]. Journal of Economic Psychology, 2021, 86: 102417-1-102417-21.

[17] KRELINA M. Quantum Technology for Military Applications [J]. EPJ Quantum Technology, 2021, 8(1): 24-1-24-53.

[18] HERMAN D, GOOGIN C, LIU X, et al. Quantum Computing for Finance [J]. Nature Reviews Physics, 2023,

5(8): 450-465.

[19] ZHANG J W, LI Z, HE R F, et al. Interactive Quantum Classifier Inspired by Quantum Open System Theory [C]//2021 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). Piscataway, NJ: IEEE, 2021: 1-7.

[20] WU Q, LIU X W, QIN J D, et al. A Linguistic Distribution Behavioral Multi-criteria Group Decision Making Model Integrating Extended Generalized TODIM and Quantum Decision Theory [J]. Applied Soft Computing, 2021, 98: 106757-1-106757-20.

[21] QUIROZ G, ICE L, DELGADO A, et al. Particle Track Classification Using Quantum Associative Memory [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2021, 1010: 165557-1-165557-12.

[22] CHEN S, COTLER J, HUANG H Y, et al. Exponential Separations between Learning with and without Quantum Memory [C]//2021 IEEE 62nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). Piscataway, NJ: IEEE, 2022: 574-585.

[23] DRMOTA P, MAIN D, NADLINGER D P, et al. Robust Quantum Memory in a Trapped-Ion Quantum Network Node [J]. Physical Review Letters, 2023, 130(9): 090803-1-090803-8.

[24] NIMBE P, WEYORI B A, ADEKOYA A F. Models in Quantum Computing: A Systematic Review [J]. Quantum Information Processing, 2021, 20(2): 80-1-80-61.

[25] KHAN M, FAYE J P L, MENDES U C, et al. EP-PQM: Efficient Parametric Probabilistic Quantum Memory with Fewer Qubits and Gates [J]. IEEE Transactions on Quantum Engineering, 2022, 3: 1-15.

[26] ALIAKBARZADEH M, KITTO K. Preparation and Measurement in Quantum Memory Models [J]. Journal of Mathematical Psychology, 2018, 83: 24-34.

[27] ABRAMS D S, LLOYD S. Nonlinear Quantum Mechanics Implies Polynomial-Time Solution for NP-Complete and #P Problems [J]. Physical Review Letters, 1998, 81(18): 3992-1-3992-4.

[28] TCHAPET N J P, NANA E S G. Concise Quantum Associative Memories with Nonlinear Search Algorithm [J]. Fortschritte der Physik, 2016, 64(2/3): 250-268.

[29] VENTURA D, MARTINEZ T. Initializing the Amplitude Distribution of a Quantum State [J]. Foundations of Physics Letters, 1999, 12: 547-559.

[30] TRUGENBERGER C A. Probabilistic Quantum Memories [J]. Physical Review Letters, 2001, 87(6): 067901-1-067901-4.

[31] DE PAULA N F M, DA SILVA A J, DE OLIVEIRA W R, et al. Quantum Probabilistic Associative Memory Architecture [J]. Neurocomputing, 2019, 351: 101-110.

[32] 肖红, 刘新彤, 李盼池. 灵活的固定相位量子搜索算法 [J]. 北京工业大学学报, 2023, 49(6): 630-638. (XIAO H, LIU X T, LI P C. Flexible Fixed Phase Quantum Search Algorithm [J]. Journal of Beijing University of Technology, 2023, 49(6): 630-638.)

[33] YOUNES A. Fixed Phase Quantum Search Algorithm [EB/OL]. (2007-04-12)[2023-01-10]. https://arxiv.org/abs/0704.1585.

[34] LONG G L. Grover Algorithm with Zero Theoretical Failure Rate [J]. Physical Review A, 2001, 64(2): 022307-1-022307-7.

[35] BOYER M, BRASSARD G, HØYER P, et al. Tight Bounds on Quantum Sarching [J]. Fortschritte der Physik: Progress of Physics, 1998, 46(4/5): 493-505.

[36] DURR C, HOYER P. A Quantum Algorithm for Finding the Minimum [EB/OL]. (1996-07-18) [2023-02-01]. https://arxiv.org/abs/quant-ph/9607014.

(责任编辑: 韩 啸)