 DOI: https://doi.org/10.12349/iser.v7i6.10800

Finite-frequency Fault Estimation for Roesser Models Based on Two-dimensional Stationary Random Fields

Zhixuan Zhao

School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang, Liaoning, 110034, China

Abstract

Firstly, combining the theoretical characteristics of two-dimensional systems with the requirements of practical engineering applications, this paper constructs a two-dimensional stationary random field model. This model can accurately characterize the distribution properties of stationary stochastic processes in both spatial and temporal dimensions, laying a solid theoretical foundation for the subsequent research on fault estimation.In terms of fault estimation method selection, relying on the existing finite-frequency fault estimation method rigorously derived via the generalized KYP lemma, this paper innovatively applies it to the established two-dimensional stationary random field model and carries out targeted numerical simulation experiments on fault estimation. In the process of solving simulation parameters, the key parameters of the fault estimation filter are accurately calculated through standardized operations with the Linear Matrix Inequality (LMI) toolbox in MATLAB, providing data support for the smooth progress of the simulation experiments.Finally, the numerical simulation results fully verify that the finite-frequency fault estimation method based on two-dimensional Roesser systems exhibits good adaptability and feasibility, and can be effectively applied to the fault estimation scenarios of two-dimensional stationary random field models, providing a feasible technical approach for the field of fault detection and diagnosis of such models.

Keywords

fault detection; fault estimation; finite frequency

基于二维平稳随机场的 Roesser 模型有限频故障估计

赵知轩

沈阳师范大学数学与系统科学学院，中国 · 辽宁 沈阳 110034

摘　要

本文首先结合二维系统的理论特性与实际工程应用需求，搭建起二维平稳随机场模型，该模型能够精准刻画空间与时间双维度下平稳随机过程的分布特征，为后续故障估计研究奠定了坚实的理论基础。在故障估计方法选取上，依托已有的、通过广义KYP引理严谨推导得出的有限频故障估计方法，将其创新性地应用于所构建的二维平稳随机场模型中，开展针对性的故障估计数值仿真实验。在仿真参数求解环节，借助Matlab软件中的线性矩阵不等式（LMI）工具箱，通过规范化的运算流程，精准计算出故障估计滤波器的关键参数，为仿真实验的顺利推进提供了数据支撑。最终的数值仿真结果充分验证，基于二维Roesser系统的有限频故障估计方法，具备良好的适配性与可行性，能够有效适用于二维平稳随机场模型的故障估计场景，为该类模型的故障检测与诊断领域提供了可行的技术思路。

关键词

故障检测；故障估计；有限频

1 引言

近年来，针对有限频域内的故障估计问题，国内外学者已开展大量深入研究并取得了丰硕成果 [1-3]。从线性系统 [4-6] 到非线性系统 [7]、从全频域分析到有限频域约束 [8]，各类改进观测器与优化算法不断涌现，结合 LMI、广义 KYP 引理 [9] 等工具，有效提升了故障检测的灵敏度与抗干扰能力，为实际工程系统的安全监测提供了坚实理论支撑。

二维平稳随机场就是把一维平稳时间序列，推广到平面（空间），用来描述平面上随机且具有空间相关性的场。一维平稳随机过程可以理解为时间序列，而二维平稳随机场可以理解为平面空间场，无论是一维还是二维的，平稳随机场的统计特性都不会随着坐标平移而改变。很多研究对象是平面分布的：图像、地形、温度场、压力场、材料表面、地质平面属性等。这些场在局部区域统计均匀，满足平稳近似。传统随机变量无法描述空间相关性，会严重低估 / 高估不确定性。

平稳随机场模型有很强大的应用背景，如图像处理 [10] 中的去噪、纹理分析、图像复原；地理 / 地质方面 [11] 的平

【作者简介】赵知轩（2007–），女，中国辽宁阜新人，在读本科生，从事数学与应用数学研究。

面插值、空间预测（克里金）；信号处理[12]中的二维随机信号、阵列信号；材料与力学中的[13]平面材料属性随机场、可靠性分析；遥感 / 气象[14]中的二维空间场建模。由于平稳随机场模型建立了空间随机性 + 空间相关性的统一数学框架，是随机场理论、地统计学、随机有限元、信号处理的基础模型为高维随机场（3D/ 时空场）提供了标准范式。本文研究二维平稳随机场模型的故障估计问题。在完成二维平稳随机场模型的建模过程后，采用已有的故障估计方法应用于二维平稳随机场模型中。仿真结果表明，二维系统的故障估计方法取得了很好的效果，在完成故障检测的基础上，又实现了故障估计。

2 系统模型描述

2.1 二维 Roesser 模型描述

考虑如下形式的二维 Roesser 模型：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}x^h(i+1,j)\\x^v(i,j+1)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x^h(i,j)\\x^v(i,j)\end{bmatrix}+B_d d(i,j)+B_f f(i,j),\\ y(i,j)=C\begin{bmatrix}x^h(i,j)\\x^v(i,j)\end{bmatrix}+D_d d(i,j)+D_f f(i,j),\end{cases}\tag{1}$$

在本文构建的二维系统模型中，系统状态被分解为水平与垂直两个独立维度，并分别通过对应的状态向量进行定量描述。外部扰动向量 $d(i,j)$ 则反映系统运行过程中不可避免的环境干扰项。此外，模型中的系数矩阵 A，B_d，B_f，C，D_d，D_f 均为具备明确取值的已知常数矩阵，分别用于刻画系统内部的动态演化规律、输入输出通道的映射关系以及性能约束条件。上述各部分共同组成一套完整的二维状态空间数学模型。

2.2 故障估计滤波器形式描述

二维系统故障估计滤波器的形式如下

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\hat{x}^h(i+1,j)\\\hat{x}^v(i,j+1)\end{bmatrix}=K_f\begin{bmatrix}x^h(i,j)\\x^v(i,j)\end{bmatrix}+L_f y(i,j),\\ r(i,j)=M_f\begin{bmatrix}\hat{x}^h(i,j)\\\hat{x}^v(i,j)\end{bmatrix}+N_f y(i,j),\end{cases}\tag{2}$$

在该式中，向量 $\hat{x}^h(i,j)\in\mathcal{R}^{n_h}$ 与 $\hat{x}^v(i,j)\in\mathcal{R}^{n_v}$ 分别刻画了所设计滤波器在水平与垂直维度上的内部状态。待求的矩阵 K_f，L_f，M_f 和 N_f 则构成了故障估计滤波器的核心增益参数集，其核心作用在于对系统潜在的故障信号进行在线重构，从而实现对故障程度的定量估计，并进一步推导得到故障估计误差动态。为便于开展整体系统分析，本文将原系统动态方程与滤波器方程进行有机联立，通过引入状态增广技术将全维状态信息进行统一整合与扩展，由此构建出包含滤波器的闭环增广系统。结合公式 (1) 与公式 (2) 的数学关系，可推导出如下形式的增广系统状态方程。

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\xi^h(i+1,j)\\\xi^v(i,j+1)\end{bmatrix}=\tilde{A}\begin{bmatrix}\xi^h(i,j)\\\xi^v(i,j)\end{bmatrix}+\tilde{B}_d d(i,j)+\tilde{B}_f f(i,j),\\ e(i,j)=\tilde{C}\begin{bmatrix}\xi^h(i,j)\\\xi^v(i,j)\end{bmatrix}+\tilde{D}_d d(i,j)+\tilde{D}_f f(i,j),\end{cases}\tag{3}$$

其中

$\hat{i}^h(i,j)=\begin{bmatrix}x^h(i,j)\\\hat{x}^h(i,j)\end{bmatrix}$，$\hat{i}^v(i,j)=\begin{bmatrix}x^v(i,j)\\\hat{x}^v(i,j)\end{bmatrix}$，$\widetilde{A}=\Sigma\overline{A}\Sigma^T$，$\widetilde{B}_d=\Sigma\overline{B}_d$，$\overline{B}_d=\begin{bmatrix}B_d\\L_fD_d\end{bmatrix}$，$\overline{A}=\begin{bmatrix}A&0\\L_fC&K_f\end{bmatrix}$，$\widetilde{B}_f=\Sigma\overline{B}_f$，$\overline{B}_f=\begin{bmatrix}B_f\\L_fD_f\end{bmatrix}$，$\Sigma=\begin{bmatrix}I&0&0&0\\0&0&I&0\\0&I&0&0\\0&0&0&I\end{bmatrix}$

$\widetilde{C}=\overline{C}\Sigma^T$，$\overline{C}=[N_fC\quad M_f]$，$\widetilde{D}_d=N_fD_d$，

$\widetilde{D}_f=N_fD_f-I$

2.3 故障检测逻辑规则

本文借助滤波器的输出信号实现对系统故障进行有效检测以及估计，为后续系统安全监测与故障诊断提供可靠的理论依据。

下式给出的是逻辑关系，故障的发生可以根据如下的逻辑规则进行检测：

$$J_r(i,j)<J_h\Rightarrow\text{系统无故障}\Rightarrow\text{不报警；}\tag{4}$$

$$J_r(i,j)>J_{th}\Rightarrow\text{系统无故障}\Rightarrow\text{报警。}\tag{5}$$

3 平稳随机场模型

考虑文献 [15] 中的平稳随机场模型，可以由以下的二维系统描述：

$$\begin{aligned}x(i+1,j+1)&=a_1x(i,j+1)+a_2x(i+1,j)\\&\quad-a_1a_2x(i,j)+\omega(i,j)\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $x(i,j)$ 为随机场在空间坐标 (i,j) 处的状态，$\omega(i,j)$ 为干扰输出，a_1,a_2 为在水平和垂直方向状态的系数，且满足 $a_1^2<1,a_2^2<1$。

定义状态变量 $x^h(i,j)=x(i,j+1)-a_2x(i,j),-a_2x(i,j),x^v(i,j)=x(i,j),d(i,j)=\omega(i,j)$，式（6）可以用（1）形式的二维 Roesser 模型描述，其中，

$$A=\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix},\quad B_d=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad B_f=\begin{bmatrix}0.3532\\0.8212\end{bmatrix}$$

令系数 $a_1=$ -0.3375，$a_2=0.4218$，并假设式 (2-5) 的 Roesser 模型中的其余系数矩阵 $C=[0.0154\quad 0.0430]$，$D_d=$ 0.1690，$D_f=$ 0.6491。

利用 Matlab 工具箱求得滤波器参数如下：

$$K_f=\begin{bmatrix}-0.3891 & -0.0130\\ -0.111 & 0.3937\end{bmatrix},\ L_f=\begin{bmatrix}0.6312\\ 1.3590\end{bmatrix},$$

$$M_f=\begin{bmatrix}-0.1210 & -0.0306\end{bmatrix},\ N_f=1.4795$$

两个卡死型故障如下所示：

$$f_1(i,j)=\begin{cases}1, 40\le i\le 45,\ j\ge 50\\ 0,\ \text{其他}\end{cases},$$

$$f_2(i,j)=\begin{cases}2, 20\le i\le 27, 20\le j\ge 120\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

系统故障如图 1 所示。

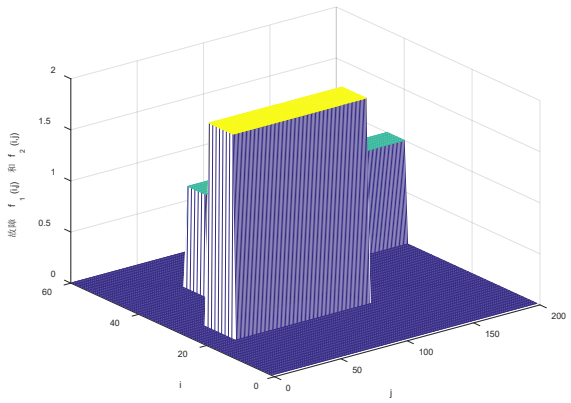


图 1 故障 $f_1(i,j)$ 和 $f_2(i,j)$

系统干扰为 $d(i,j)=0.05\sin(i)\mathrm{e}^{-0.02i}+0.05\cos(j)\mathrm{e}^{-0.03j}$

在二维随机场模型发生了卡死故障之后，图 2 所示为三维空间的故障检测效果。

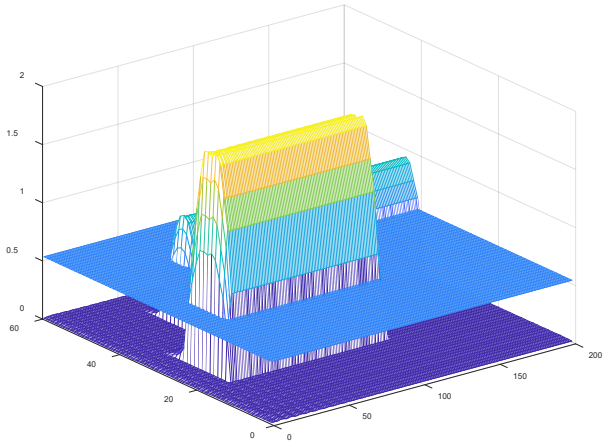


图 2 三维空间中的 $J_r(i,j)$ 和 J_{th}

本文通过图 3 展示二维空间下的故障检测结果。从图 3 的检测曲线分布能够清晰发现，在取值为 10，15 和 35 的时刻，代表残差评价函数的变化曲线始终处于阈值直线的下方，满足无故障判定的逻辑条件，由此可判断该时间段内系统未出现故障；而在取值为 23 和 44 的时刻，对应特定参数区间下，残差评价函数曲线明显超出阈值直线范围，符合故障发生的判定逻辑表达式要求。

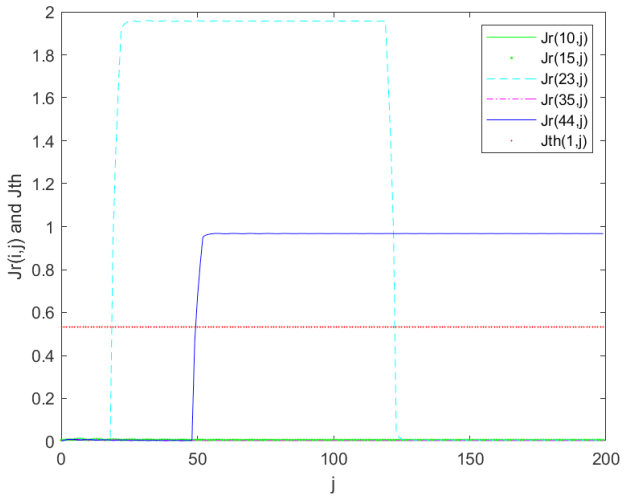


图 3 二维空间中的 $J_r(i,j)$ 和 J_{th}

接下来针对故障估计展开仿真验证。图 4 呈现了三维坐标系下的故障估计响应曲线，该图展示了故障估计曲线。

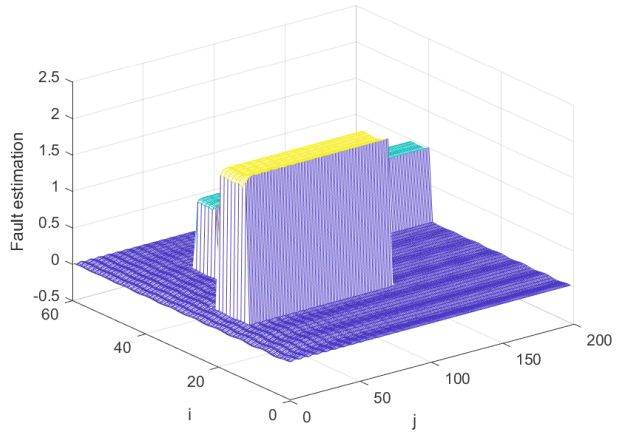


图 4 三维空间中的故障估计

4 结论

本文围绕二维 Roesser 系统故障估计的实际应用场景展开深入研究，通过搭建仿真实例对所设计的故障估计滤波器性能进行全面验证。结果表明，该滤波器不仅能够保障增广系统实现渐近稳定，还具备高效的故障检测能力，可对故障的形状、幅值等关键特征实现近似估计。

参考文献

[1] 吴小雪, 丁大伟, 任莹莹, 等. 二维FM系统的同时故障检测与控制[J]. 自动化学报, 2021, 47(01): 224-234.

[2] Wang Z, Shang H. Observer based fault detection for two dimensional systems described by Roesser models[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2015, 26(3): 753-775.

[3] Wang Z, Shang H. Kalman filter based fault detection for two-dimensional systems[J]. Journal of Process Control, 2015, 28:

83-94.

[4] Zhao D, Li Y, Ahn C K, et al. Optimal state and fault estimation for two-dimensional discrete systems[J]. Automatica, 2020, 115: 108856.

[5] Cao L, Zhao D, Wang Y. Simultaneous estimation of multiple channel faultsfor two-dimensional linear systems[J]. International Journal of Systems Scien-ce, 2017, 48(13): 2838-2849.

[6] Zhao D, Wang Y, Li Y. H_- Fault estimation for 2-D linear discrete time-varying systems based on krein space method[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 48(12): 2070-2079.

[7] Qin W, Zhang C, Wang G, et al. Fault detection for two-dimensional multi- state delay Roesser systems with finite frequency specifications[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2023, 21(1): 161-170.

[8] Wang M, Yan H, Qiu J, et al. Fuzzy-model-based finite frequency fault detection filtering design for two-dimensional nonlinear systems[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2024, 11(10): 2099-2110.

[9] Wang G, Qin W. Fault detection filter for uncertain two-dimensional continuous-discrete state-delayed systems in finite frequency domains[C]. 2022 41st Chinese Control Conference (CCC). IEEE, 2022: 4124-4129.

[10] 赵东阳,万阳阳,何祖源. 基于物理信息神经网络的DAS系统二维声源定位研 究[J/OL]. 光学学报, 2026, 1：1-17.

[10] 张宏鸣，王养军，李书涛.基于平稳随机场的图像纹理分析与去噪方法 [J]. 中国图象图形学报，2010, 15 (7):1001-1007.

[11] Cressie N. Statistics for Spatial Data[M]. New York: John Wiley & Sons, 1993.

[12] Papoulis A. Probability Random Variables and Stochastic Processes[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.

[13] 闫澍旺，朱红霞.随机场理论在岩土工程可靠性分析中的应用[J].岩土工程学报，2006, 28 (12):2053-2059.

[14] Gneiting T. Nonseparable stationary covariance functions for space-time data[J]. Journal of the American Statistical Association, 2002, 97(459):590-600.

[15] Katayama T, Kosaka M. Recursive filtering algorithm for a two-dimensional syst-em[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1979, 24(1):130-137.