doi：10. 12068/j. issn. 1005－3026. 2026. 20269022

分数阶多方向多涡卷Jerk系统的构造与DSP实现

艾星星[1]，王会海[2]，卓佳豪[1]，孙克辉[1]
（1. 中南大学 物理学院，湖南 长沙 410083；2. 中南大学 电子信息学院， 湖南 长沙 410004）

摘 要：针对现有分数阶多涡卷混沌系统大多局限于单方向或2维网格扩展，难以在多个状态变量方向上实现均匀多涡卷结构扩展及硬件实现验证的问题，本文提出1种基于平移变换函数的分数阶多方向多涡卷Jerk混沌系统设计方法. 在整数阶Jerk系统基础上引入分数阶微分算子，构造连续非线性函数生成分数阶单方向多涡卷吸引子；通过在多个状态变量中引入平移变换函数，实现了多方向多涡卷结构扩展. 采用吸引子相图、最大Lyapunov指数、多尺度排列熵和Poincaré截面分析系统动力学特性，并完成DSP（digital signal processor）硬件实现. 结果表明，系统具有丰富的动力学行为，DSP实现结果与数值仿真一致，验证了系统的物理可实现性.

关 键 词：分数阶微积分；多涡卷吸引子；Jerk系统；动力学分析；DSP实现
中图分类号：TP 273 **文献标志码**：A **文章编号**：1005-3026(2026)07-0048-09

Construction and DSP Implementation of Fractional-Order Multi-directional Multi-scroll Jerk System

AI Xing-xing[1], *WANG Hui-hai*[2], *ZHUO Jia-hao*[1], *SUN Ke-hui*[1]
(1. School of Physics, Central South University, Changsha 410083, China; 2. School of Electronic Information, Central South University, Changsha 410004, China. Corresponding author: SUN Ke-hui, E-mail: kehui@csu.edu.cn)

Abstract: Existing fractional-order multi-scroll chaotic systems are mainly confined to unidirectional or two-dimensional grid extensions, making it difficult to achieve uniform multi-scroll structure expansion in multiple state variable directions and to verify their hardware implementation. To address this issue, a design method for fractional-order multi-directional multi-scroll Jerk chaotic systems based on translation transformation functions was proposed. The fractional-order differential operator was introduced into the integer-order Jerk system, and continuous nonlinear functions were constructed to generate fractional-order unidirectional multi-scroll attractors. The multi-directional multi-scroll structure expansion was achieved by introducing translation transformation functions into multiple state variables. System dynamical characteristics were analyzed using attractor phase portraits, maximum Lyapunov exponent, multiscale permutation entropy, and Poincaré sections. Digital signal processor (DSP) hardware implementation was completed. The results indicate that the system exhibits rich dynamical behaviors, and the DSP implementation results are consistent with numerical simulations, verifying the physical realizability of the proposed system.

Key words: fractional calculus; multi-scroll attractor; Jerk system; dynamical analysis; DSP implementation

混沌系统因其复杂的非线性动力学行为而受到广泛关注，在图像加密与信息安全[1]、FPGA（field programmable gate array）同步与安全通信[2]、伪随机数生成器设计[3]、复杂系统与信号预测[4]以及电动汽车充放电调度[5]等领域具有重要应用价值. 相比传统单涡卷混沌系统，多涡卷混

收稿日期：2026-03-24
基金项目：国家自然科学基金资助项目（62471496，62071496）.
作者简介：艾星星（1989—），男，广东深圳人，中南大学博士研究生.
通信作者：孙克辉，E-mail：kehui@csu.edu.cn.

沌吸引子具有更复杂的拓扑结构和动力学行为,已成为非线性动力学领域的重要研究方向[6-10].Lu 等[6]基于 Jerk 混沌系统构造了多涡卷吸引子结构.Ding 等[7-8]通过引入正弦函数,实现了多涡卷混沌吸引子构造.此外,在单方向多涡卷系统基础上,在第二维引入合适的非线性函数,可以构造出网格型多涡卷吸引子结构[9],进一步提高了多涡卷混沌系统的复杂度.

另一方面,传统整数阶混沌系统难以描述许多真实物理系统中存在的记忆特性,而分数阶微积分能够有效描述系统的历史依赖性和非局部特性[10].因此,分数阶微积分在复杂动力系统建模中得到了广泛研究.研究表明,分数阶混沌系统相比整数阶混沌系统,能够表征出系统更加丰富的动力学行为.近年来,一些学者开始研究分数阶多涡卷混沌系统.例如,Yu 等[11]设计了 1 种新型分数阶混沌系统,该系统具有丰富的动力学特性与多涡卷吸引子,丰富了分数阶多涡卷混沌系统的构造与分析方法.此外,Matouk 等[12]基于扩展 Caputo 算子研究了分数阶多涡卷混沌系统的复杂动力学行为.

在众多混沌系统模型中,Jerk 系统[13]由于其结构简单、易于硬件实现等优点,在混沌系统设计中受到了广泛关注.近年来,一些研究者通过在 Jerk 系统中引入非线性函数,构造了多涡卷混沌吸引子.例如,Wang 等[14]基于 Jerk 系统提出了 1 种新型多稳态混沌系统,通过引入正切非线性函数生成了 2m 个涡卷吸引子,深入分析了多涡卷吸引子的形成机制与多吸引子共存行为,并探讨了其在工程中的应用潜力.此外,随着分数阶微积分理论的发展,一些研究将分数阶微分算子引入 Jerk 系统,从而构造分数阶 Jerk 混沌系统,并分析其动力学特性.例如,Adelakun 等[15]通过在 Jerk 系统中引入指数函数和正切函数 2 种非线性项,提出了改进的分数阶混沌 Jerk 系统,通过稳定性分析确定了混沌行为的参数范围,利用 Lyapunov 指数和分岔图分析了系统的混沌动力学,并采用主动控制方法实现了系统同步.然而,现有研究大多集中于单方向或者网格多涡卷混沌系统,即多涡卷吸引子结构主要沿某 1 到 2 个状态变量方向扩展,而在多个方向(≥3)上同时产生多涡卷吸引子的研究仍然较少.此外,现有多涡卷混沌系统的构造方法在尝试构造 3 个方向多涡卷吸引子时,遇到 z 方向非均匀分布而无法简单扩展的问题,如 Zhang 等[16]发现:x 和 y 方向的涡卷生成机制与 z 方向不同,前者基于 Duffing 方程的势阱分布,后者归因于不同类型的鞍焦点,无法直接扩展生成对称均匀分布的 3D 涡卷吸引子.同时,基于高阶(4 或 5 阶)Jerk 系统[17],构造更多维度的多个方向(≥3)多涡卷吸引子结构具有更大的挑战性.因此,研究 1 种能够实现多方向均匀多涡卷扩展的分数阶 Jerk 系统构造方法具有重要意义.

针对上述问题,本文提出了 1 种基于平移变换函数的分数阶多方向多涡卷 Jerk 混沌系统设计方法,实现了 3 个方向多涡卷吸引子的同时扩展,并使吸引子在相空间中呈现近似均匀分布.将所提方法推广至 4 阶和 5 阶分数阶 Jerk 系统,实现了高阶系统中 4 个方向和 5 个方向多涡卷吸引子的构造,验证了方法的通用性和可扩展性.采用 Lyapunov 指数、分岔图、Poincaré 截面和多尺度排列熵等方法分析系统动力学特性,并完成 DSP 硬件实现,验证了系统的物理可实现性和工程应用潜力.

1　分数阶多涡卷 Jerk 系统建模

1.1　分数阶多涡卷 Jerk 系统模型

为了构造分数阶多涡卷混沌吸引子,在整数阶 Jerk 系统[13]的基础上,引入分数阶微分算子(采用 Caputo 分数阶微分[18]定义)和连续的非线性函数,其系统方程为

$$\left.\begin{aligned} D_x^{\alpha_1} &= y,\\ D_y^{\alpha_2} &= z,\\ D_z^{\alpha_3} &= 0.6(-x-y-z+f(x)). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中:D 为分数阶微分算子;α_n 为分数阶微分算子的阶数,取值范围为(0,1];x,y,z 为系统状态变量;$f(x)$ 为非线性函数,定义为

$$f(x)=kp\left[-\tanh(nx)+\sum_{i=0}^{N}\tanh(n(x+2ip))+\sum_{i=0}^{N}\tanh(n(x-2ip))\right] \tag{2}$$

或

$$f(x)=kp\left[\sum_{i=0}^{N}\tanh(n(x+(1+2i)p))+\sum_{i=0}^{N}\tanh(n(x-(1+2i)p))\right]. \tag{3}$$

式中:k 为系统的增益系数,取值范围为正实数,决定多涡卷吸引子振荡的幅度尺度;p 为平衡点

控制参数,决定x方向涡卷的位置,取值范围为正实数;n为双曲正切函数斜率因子,取值范围为正实数;n越大切换边界越陡峭;N为非负整数;i为N具体取值的索引值,可控制涡卷生成的个数.

当$f(x)$为式(2)时,系统能产生(2N+2)−涡卷吸引子;当$f(x)$为式(3)时,系统能产生(2N+3)−涡卷吸引子.令α_n=0.5,k=1,p=4,n=100,初始值(x_0,y_0,z_0)=(0.1,0.1,0.3),基于Adomian算法[4,18]求解分数阶多涡卷混沌系统(1),其中Adomian算法的步长设为0.000 1,数值仿真得到的吸引子相图如图1所示.可见系统在x方向呈现多涡卷吸引子,而在y,z方向上均呈现出单涡卷吸引子.

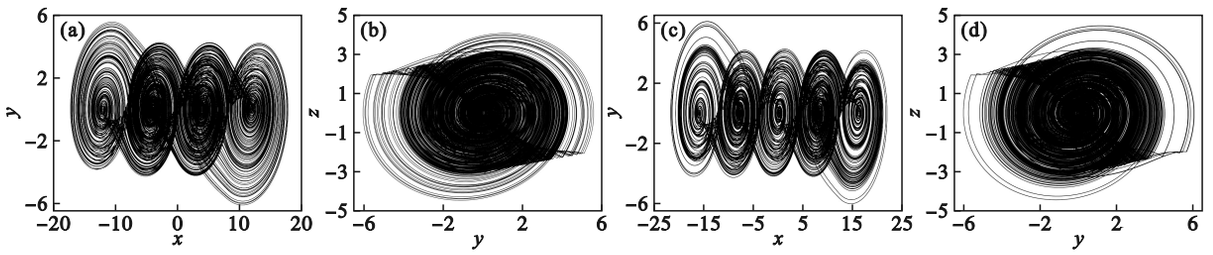


图1 单方向多涡卷混沌吸引子相图

Fig. 1 Phase diagrams of single-directional multi-scroll chaotic attractors

(a)—4涡卷x–y平面相图;(b)—4涡卷y–z平面相图;(c)—5涡卷x–y平面相图;(d)—5涡卷y–z平面相图.

基于系统(1),在y方向上引入平移变换函数$g_1(y)$,则系统方程表示为

$$\left.\begin{aligned} D_x^{\alpha_1} &= y - g_1(y), \\ D_y^{\alpha_2} &= z, \\ D_z^{\alpha_3} &= 0.6\left(-x - \left(y - g_1(y)\right) - z + f(x)\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中,$g_1(y)$定义为

$$g_1(y) = \sum_{i=1}^{M_1} B[1 + \tanh(n(y - y_i))] \pm \sum_{j=1}^{M_2} B[1 \pm \tanh(n(y - y_j'))]. \tag{5}$$

其中:M_1和M_2为非负整数;参数B的取值与基础涡卷在扩展方向上的跨度L相关,B的取值范围约为L/2;y_i和y_j'为平移目标位置,与吸引子的位置相关,其取值决定相邻涡卷吸引子的衔接位置.通过控制$f(x)$和$g_1(y)$的表达式和参数,系统(4)能产生(2N+2)×(M_1+M_2+1)−涡卷吸引子或(2N+3)×(M_1+M_2+1)−涡卷吸引子.其数值仿真结果如图2所示.在图2a,2b中,$g_1(y)$=4(1+tanh(n(y−4)))−4(1−tanh(n(y+4)));而在图2c,2d中,$g_1(y)$=4(1+tanh(n(y−4)))−4(1−tanh(n(y+4)))−4(1−tanh(n(y+12))).对比图1和图2可知,在y方向引入非线性平移变换函数后,系统在y方向从单涡卷吸引子拓展成多涡卷吸引子.

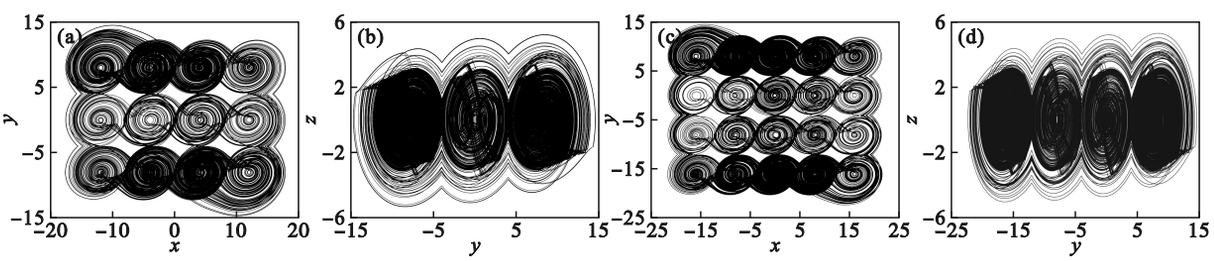


图2 网格多涡卷平面吸引子相图

Fig. 2 Phase diagrams of grid multi-scroll planar attractors

(a)—4×3涡卷x–y平面相图;(b)—4×3涡卷y–z平面相图;(c)—5×4涡卷x–y平面相图;(d)—5×4涡卷y–z平面相图.

同样地,为了得到3个方向多涡卷吸引子,在z方向上引入相应的平移变换函数$g_2(z)$,则系统方程变为

$$\left.\begin{aligned} D_x^{\alpha_1} &= y, \\ D_y^{\alpha_2} &= z - g_2(z), \\ D_z^{\alpha_3} &= 0.6\left(-x - y - \left(z - g_2(z)\right) + f(x)\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中,$g_2(z)$定义为

$$g_2(z) = \sum_{i=1}^{M_3} B[1 + \tanh(n(z - z_i))] \pm \sum_{j=1}^{M_4} B[1 \pm \tanh(n(z - z_j'))]. \tag{7}$$

其中:M_3,M_4为非负整数;参数B的取值与基础涡卷在扩展方向上的跨度L相关,B的取值范围约

为 $L/2$;z_i,z'_j 为平移目标位置.系统(6)可产生(2N+2)×(M_1+M_2+1)×(M_3+M_4+1)−涡卷吸引子或(2N+3)×(M_1+M_2+1)×(M_3+M_4+1)−涡卷吸引子.令 N=2,$g_1(y)$=4(1+tanh(n(y−4)))−4(1−tanh(n×(y+4))),$g_2(z)$=4(1+tanh(n(z−4)))−4(1+tanh(n×(z+4))),系统可产生 6×3×3−涡卷吸引子,其吸引子相图见图 3a 和 3b;令 N=3,$g_1(y)$=4(1+tanh(n(y−4)))−4(1−tanh(n(y+4)))−4(1−tanh(n(y+12))),$g_2(z)$=4(1+tanh(n(z−4)))−4(1+tanh(n(z+4)))−4(1+tanh(n(z+12))),系统可产生 8×4×4−涡卷吸引子,其吸引子相图如图 3c 和 3d 所示.可见,系统在 z 方向上引入平移变换函数后,系统在 z 方向上也呈现出多涡卷吸引子,从而在系统的 3 个方向都呈现出多涡卷吸引子.

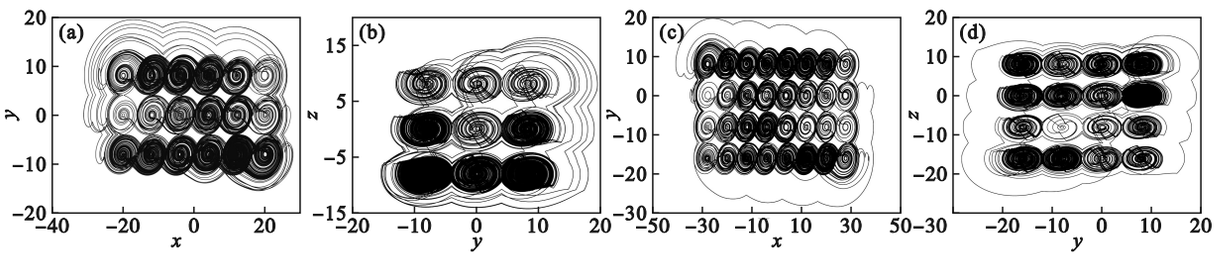


图 3　多方向多涡卷吸引子

Fig. 3　Phase diagrams of multi-directional multi-scroll attractors

(a)—6×3×3 涡卷 x–y 平面相图;(b)—6×3×3 涡卷 y–z 平面相图;(c)—8×4×4 涡卷 x–y 平面相图;(d)—8×4×4 涡卷 y–z 平面相图.

1.2　分数阶高阶多涡卷 Jerk 系统模型

Chlouverakis 等[17]提出了高阶 Jerk 系统,其定义为

$$a_m\frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}\tau^m}+a_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}x}{\mathrm{d}\tau^{m-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}+a_0x=H(x).\quad(8)$$

其中:a_i(i=0,1,…,m)为系数;$H(x)$为非线性函数;m 表示系统的阶数,m=4 或 5.同样地,引入分数阶微分算子和产生多涡卷吸引子的连续非线性函数,分数阶高阶 Jerk 系统为

$$a_m\frac{\mathrm{d}^{\alpha_n+m}x}{\mathrm{d}\tau^{\alpha_n+m}}+a_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{\alpha_n+m-1}x}{\mathrm{d}\tau^{\alpha_n+m-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}^{\alpha_n}x}{\mathrm{d}\tau^{\alpha_n}}+a_0x=H(x).\quad(9)$$

其中:m 表示系统的阶数,取值为 4 或 5;α_n 为分数阶微分算子的阶数,取值范围为(0,1].$H(x)$为非线性函数,其定义同 $f(x)$的式(2)或(3),系统能产生(2N+2)−涡卷吸引子或(2N+3)−涡卷吸引子.当 m=4,k=8,p=4,n=100,N=2,4 个状态变量的初始值为(0.3,0.1,0.5,0.5)时,基于 Adomian 算法求解,分数阶 4 阶 Jerk 系统(9)的数值仿真结果如图 4 所示;令 m=5,N=4,5 个状态变量的初始值为(0.3,0.1,0.1,0.1,0.3),分数阶 5 阶 Jerk 系统(9)的数值仿真结果如图 5 所示.可见,高阶系统在 x 方向引入非线性函数后,x 方向呈现多涡卷吸引子,但其他方向均呈现单涡卷吸引子.

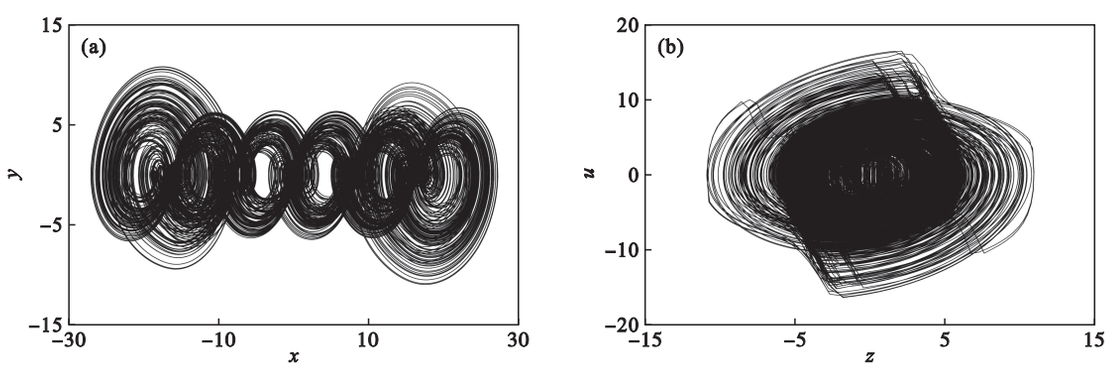


图 4　4 阶 Jerk 单方向多涡卷混沌吸引子相图

Fig. 4　Phase diagrams of single-directional multi-scroll chaotic attractors in the 4th-order Jerk system

(a)—6 涡卷 x–y 平面相图;(b)—6 涡卷 z–u 平面相图.

为了实现 4 个方向多涡卷吸引子,在系统(9)(m=4)的基础上,在 y,z,u 3 个方向上分别引入平移变换函数 $g_1(y)$,$g_2(z)$,$g_3(u)$,可得

$$\left.\begin{aligned}D_x^{\alpha_1}&=y-g_1(y),\\D_y^{\alpha_2}&=z-g_2(z),\\D_z^{\alpha_3}&=u-g_3(u),\\D_u^{\alpha_4}&=F_1(x,y,z,u).\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

其中,$F_1(x,y,z,u)$定义为

$$F_1(x,y,z,u)=-\begin{bmatrix}7.278(u-g_3(u))+4(z-g_2(z))+\\ 9.19(y-g_1(y))+7.9x\end{bmatrix}+H(x). \tag{11}$$

其中:$g_1(y)$,$g_2(z)$,$g_3(u)$的表达形式与式(5)一致.令$g_1(y)=9(1+\tanh(n(y-9)))-9(1-\tanh(n(y+9)))$,$g_2(z)=9(1+\tanh(n(z-9)))+9(1+\tanh(n(z-27)))$,$g_3(u)=10(1+\tanh(n(u-10)))+10(1+\tanh(n(u-30)))$,系统的数值仿真结果如图6所示.可见系统在平移变换函数的作用下,在x,y,z和u 4个方向均呈现出多涡卷吸引子,且吸引子的大小基本一致.

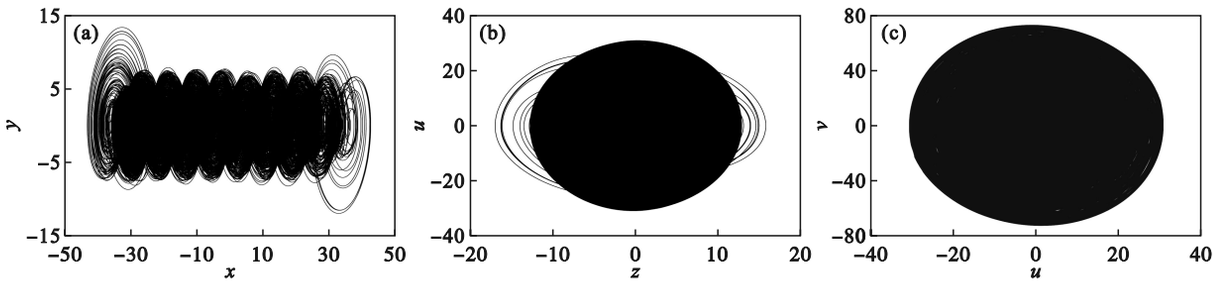


图5 5阶Jerk单方向多涡卷混沌吸引子相图

Fig. 5 Phase diagrams of single-directional multi-scroll chaotic attractors in the 5th-order Jerk system

(a)—10涡卷x–y平面相图;(b)—10涡卷z–u平面相图;(c)—10涡卷u–v平面相图.

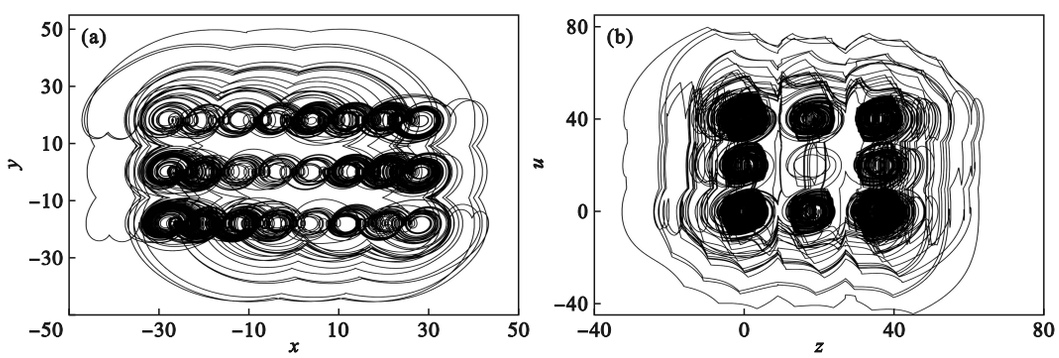


图6 4阶Jerk 8×3×3×3−涡卷混沌吸引子相图

Fig. 6 Phase diagrams of 8×3×3×3−scroll chaotic attractors in the 4th-order Jerk system

(a)—x–y平面相图;(b)—z–u平面相图.

类似地,在分数阶5阶Jerk系统的基础上,在y,z,u和v 4个方向上分别引入平移变换函数$g_1(y)$,$g_2(z)$,$g_3(u)$,$g_4(v)$,可得

$$\left.\begin{aligned}D_x^{\alpha_1}&=y-g_1(y),\\ D_y^{\alpha_2}&=z-g_2(z),\\ D_z^{\alpha_3}&=u-g_3(u),\\ D_u^{\alpha_4}&=v-g_4(v),\\ D_v^{\alpha_5}&=F_2(x,y,z,u,v).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

其中,$F_2(x,y,z,u,v)$定义为

$$F_2(x,y,z,u,v)=-\begin{bmatrix}v-g_4(v)+7.278(u-g_3(u))+\\ 4(z-g_2(z))+9.19(y-g_1(y))+7.9x\end{bmatrix}+H(x). \tag{13}$$

令$g_1(y)=7.2(1+\tanh(n(y-7.2)))$,$g_2(z)=13(1+\tanh(n(z-13)))$,$g_3(u)=27.5(1+\tanh(n(u-27.5)))$,$g_4(v)=50(1+\tanh(n(v-50)))$,系统的数值仿真结果如图7所示.可见,系统在平移变换函数的作用下,在x,y,z,u和v 5个方向均呈现出多涡卷吸引子.

2 分数阶多涡卷Jerk系统性能分析

以分数阶3阶Jerk系统(1)的单方向4涡卷为例,分析系统的最大Lyapunov指数随系统分数阶阶数α_n变化的情况,其变化范围为[0.2,1.0],如图8所示(纵坐标$\mathrm{LE_{max}}$表示系统的最大Lyapunov指数).图8b为[0.80,1.00]区间范围放大图,可见系统在阶数[0.2,1.0]的最大Lyapunov指数均大于0,系统处于混沌状态,但最大Lyapunov指数数值随阶数增大,呈下降趋势,混沌强度有所减弱.同时,系统随α_n变化的分岔图(固定取前100 000演化点分析)如图9所示,表明系统在$\alpha_n\in[0.2,1.0]$稳定地呈现为4涡卷混沌吸引子,涡卷数量对阶数不敏感,系统在宽阶数范围内具有稳定的涡卷保持能力.需要说明的是,图9中高阶数区间($\alpha_n>0.7$)的相点分布较为稀疏,低阶数区间

较为密集.这并非涡卷结构退化,而是因为不同分数阶参数下系统状态遍历完整吸引子所需的迭代样本点数目不同,高阶数时演化出完整吸引子需要更多的迭代样本点数目.同时,以平面y=0.5为切面,分析系统的Poincaré截面如图10所示.可见截面的点密集地分布在4条平行线上,且平行线间通过键带互相连接,再次论证系统在该参数配置下处于混沌状态,且呈现为4涡卷混沌吸引子的拓扑结构.整体而言,本文分数阶4涡卷Jerk系统在[0.2,1.0]阶数范围内涡卷数量和拓扑结构均稳定保持,阶数主要影响Lyapunov指数的大小(混沌强度).这一宽阶数范围内的高稳定性,为多方向扩展系统的工程应用提供了参数鲁棒性基础.

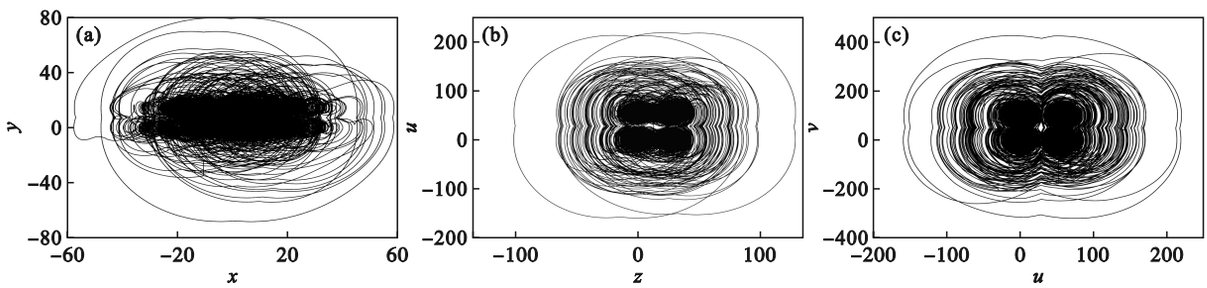


图7　5阶Jerk 10×2×2×2×2−涡卷混沌吸引子相图

Fig. 7　Phase diagrams of 10×2×2×2×2−scroll chaotic attractors in the 5th-order Jerk system

(a)—x–y平面相图;(b)—z–u平面相图;(c)—u–v平面相图.

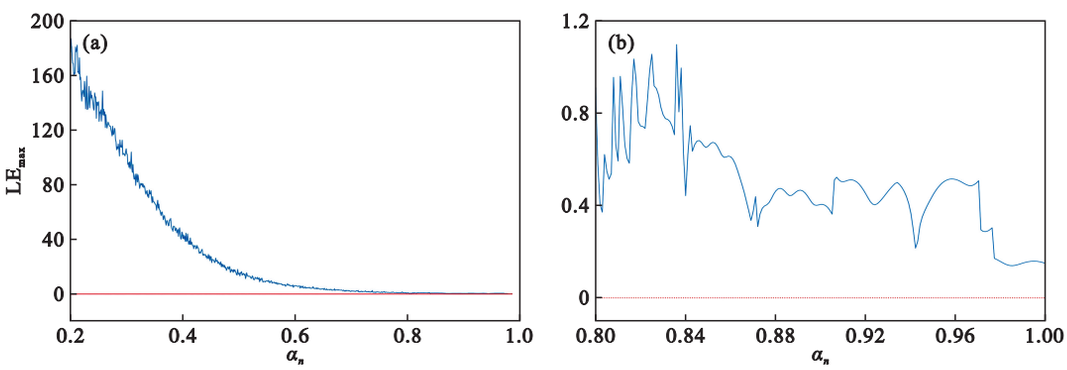


图8　参数α_n变化时的最大Lyapunov指数

Fig. 8　Maximum Lyapunov exponent under varying parameter α_n

(a)—α_n变化区间为[0.2,1.0];(b)—α_n变化区间为[0.8,1.0]的放大图.

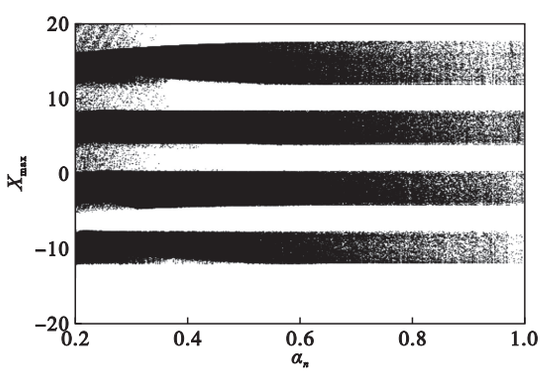


图9　参数α_n变化时的分岔图

Fig. 9　Bifurcation diagram under varying parameter α_n

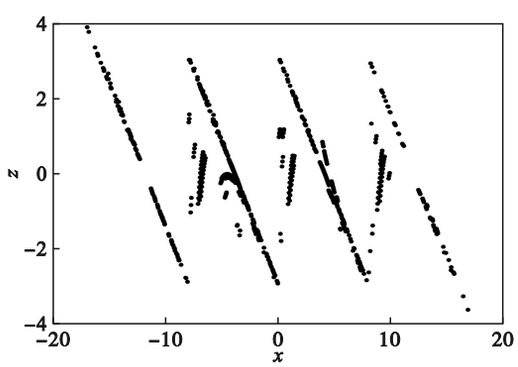


图10　平面y=0.5的Poincaré截面

Fig. 10　Poincaré section on plane y=0.5

用平均复杂度表征系统的复杂性[19],平均复杂度越大,系统越复杂,其表达式为

$$P_{\text{ave}}=\frac{\sum_{i=1}^{\tau_{\max}}\text{PE}(i)}{\tau_{\max}}. \tag{14}$$

其中:P_{ave}为所有排列熵复杂度的平均值;PE(i)为每个尺度因子下系统的排列熵复杂度;$\tau_{\max}$为最大尺度因子.令$\tau_{\max}$=500,计算分数阶多涡卷混沌系统的多尺度排列熵复杂度随τ变化情况如图11所示.可见,随着尺度因子的增加,系统的复杂性

先快速增大,然后趋于平缓.计算其平均复杂度 P_{ave},结果如表 1 所示.表 1 中每列分别对应于整数阶 3 阶 Jerk 系统的 6 涡卷,分数阶 3 阶 Jerk 系统的 6 涡卷,分数阶 4 阶 Jerk 系统的 6 涡卷,分数阶 5 阶 Jerk 系统的 6 涡卷的平均复杂度.同时选取分数阶 3 阶 Jerk 系统,分析复杂度随多涡卷演化情况如表 2 所示,其中每列分别对应 6×1×1-涡卷,6×4×1-涡卷,6×4×4-涡卷.可见,分数阶多涡卷系统的平均复杂度高于整数阶多涡卷系统的平均复杂度,高阶系统的平均复杂度值高于低阶系统的平均复杂度值,并且本文的 3 阶系统的平均复杂度与文献[19]中报道(见文献中图 3 所示)的平均复杂度相当,4 阶和 5 阶系统的平均复杂度和最大复杂度均要高于文献[19]中的报道值;此外,同一阶 Jerk 系统中,平均复杂度变化不大.因此,高阶的分数阶多涡卷系统在实现高复杂度的伪随机序列时具有显著优势.

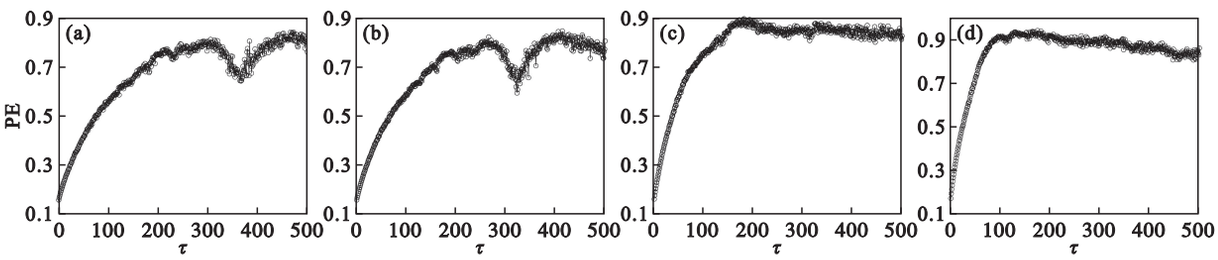


图 11 Jerk 系统的多尺度复杂度

Fig. 11 Multiscale complexity of Jerk system

(a)—整数阶 3 阶 6 涡卷;(b)—分数阶 3 阶 6 涡卷;(c)—分数阶 4 阶 6 涡卷;(d)—分数阶 5 阶 6 涡卷.

表 1 Jerk 系统的平均复杂度

Table 1 Average complexity of Jerk system

不同阶数系统	整数阶 3 阶 6 涡卷	分数阶 3 阶 6 涡卷	分数阶 4 阶 6 涡卷	分数阶 5 阶 6 涡卷
P_{ave}	0.669 1	0.682 4	0.785 4	0.838 4

表 2 分数阶 3 阶 Jerk 系统的平均复杂度

Table 2 Average complexity of fractional-order 3rd-order Jerk system

不同涡卷	6×1×1-涡卷	6×4×1-涡卷	6×4×4-涡卷
P_{ave}	0.682 4	0.693 3	0.681 1

3 分数阶多涡卷 Jerk 系统 DSP 实现

基于 TMS320F28335 DSP 平台,其连接框图和实物图如图 12 和 13 所示.

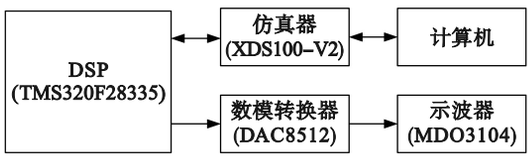


图 12 DSP 平台连接框图

Fig. 12 Block diagram of DSP platform connection

硬件配置包括 1 个用于实时程序加载和调试的 XDS100-V2 仿真器,1 个用于高精度迭代的 TMS320F28335 DSP(150 MHz,32 位 FPU),1 个用于将状态变量转换为模拟信号的 DAC8512 16 位数模转换器,以及 1 个用于波形捕获的 MDO3104 示波器.使用 Code Composer Studio (CCS)进行编码,实现了用 Adomian 分解法对分数阶多方向多涡卷系统的求解,分数阶多涡卷 Jerk 系统的吸引子图如图 14 和 15 所示.

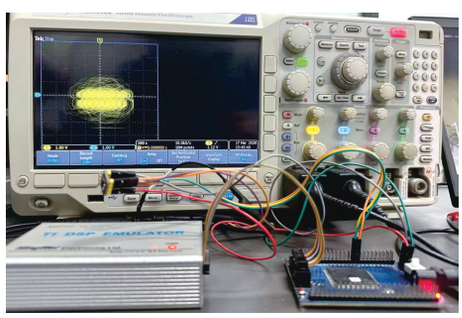


图 13 DSP 平台实物图

Fig. 13 Physical prototype of DSP platform

其中,图 14a,14b 与图 3c,图 3d 相对应,图 14c,14d 与图 6a,图 6b 相对应,图 15 与图 7 相对应.可见,DSP 实现结果和 MATLAB 数值仿真结果一致,证明了系统的物理可实现性和理论分析的正确性.此外,表 3 对比了不同类型非线性函数在硬件资源开销上的差异.分析可知,本文采用的双曲正切函数在乘除法及指数运算方面确有一定开销,资源消耗等级高于阶梯函数与分段线性函数.但需要指出的是,双曲正切函数在整个区间内连续且无突变,这一连续可导性有利于 Adomian 中非线性项展开过程的求导处理.同时,得益于 DSP 硬件层面集成的浮点运算单元

(FPU)对指数及浮点乘除指令的加速,该方案仍能满足实时计算的要求.

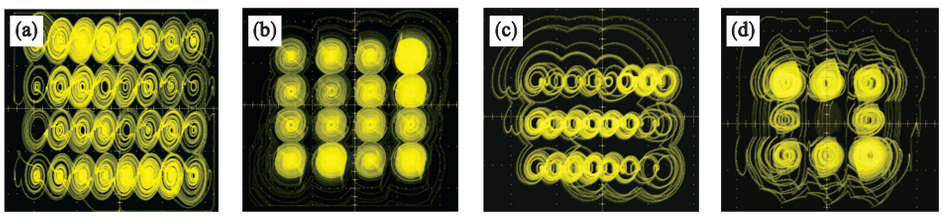


图 14　示波器上观察到的实时吸引子相图(分数阶 3 阶和 4 阶多涡卷吸引子相图)

Fig. 14　Real-time attractor phase diagrams observed on oscilloscope(phase diagrams of fractional-order 3rd-order and 4th-order multi-scroll attractors)

(a)—3 阶 8×4×4 涡卷(x–y 平面);(b)—3 阶 8×4×4 涡卷(y–z 平面);(c)—4 阶 8×3×3×3 涡卷(x–y 平面);(d)—4 阶 8×3×3×3 涡卷(z–u 平面).

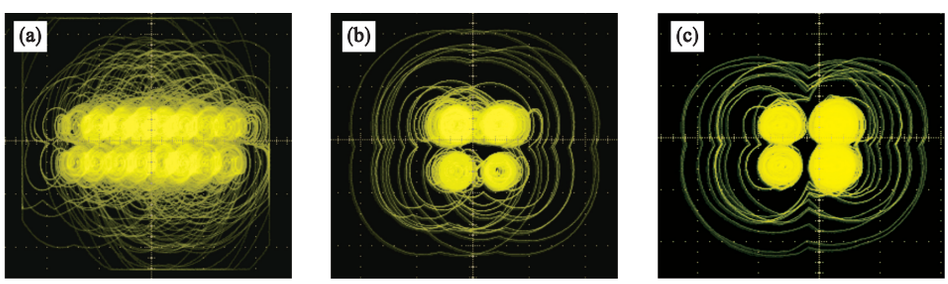


图 15　示波器上观察到的实时吸引子相图(分数阶 5 阶多涡卷吸引子相图)

Fig. 15　Real-time attractor phase diagrams observed on oscilloscope (phase diagrams of fractional-order 5th-order multi-scroll attractor)

(a)—5 阶 10×2×2×2×2 涡卷(x–y 平面);(b)—5 阶 10×2×2×2×2 涡卷(z–u 平面);(c)—5 阶 10×2×2×2×2 涡卷(u–v 平面).

表 3　不同非线性函数硬件资源消耗对比

Table 3　Comparison of hardware resource consumption for different nonlinear functions

非线性函数	阶梯函数	PWL 分段线性	双曲正切(tanh)
每周期乘除法次数	0	1 次乘法	≥1 次除法+1 次乘法
指数运算	无	无	1 次
参数存储需求	低(分段阈值+常数输出)	中等(每段 2 参数,与段数线性)	高(指数与倒数采用存表实现)
资源消耗等级	低	中	高

4　结　　论

1) 本文提出了 1 种基于平移变换函数的分数阶多方向多涡卷 Jerk 混沌系统构造方法,能够有效生成单方向及多方向多涡卷混沌吸引子.

2) 该方法可推广至 4 阶和 5 阶 Jerk 系统,实现多维空间中多方向多涡卷吸引子结构的扩展.

3) 动力学分析表明,所构建的系统具有丰富的混沌行为,并能在较宽参数范围内保持稳定的混沌状态.

4) 分数阶高阶多涡卷 Jerk 系统在产生高复杂度随机序列方面展现出显著优势,具有较好的工程应用前景.

5) DSP 硬件实验结果与数值仿真结果一致,验证了所提方法的物理可实现性.

参考文献:

[1] Gao J X, Shen Y L, Li S L, et al. An enhanced hybrid chaotic system and its application in image encryption[J]. *Journal of King Saud University: Computer and Information Sciences*, 2025, 37(9): 295.

[2] Li C, Xiao L W, Yan M X. Controlled chaotic systems for secure communications: FPGA synchronization and control [J]. *AIP Advances*, 2025, 15(10): 105325.

[3] Ouamri M. Exploiting geometric symmetry in chaotic maps for next-generation pseudo-random number generator design [J]. *Cybernetics and Physics*, 2025, 14(4): 363−369.

[4] Ai X X, Wang H H, Chen X J, et al. Design, analysis, and application of a fractional-order multi-scroll chaotic system [J]. *Physica Scripta*, 2025, 100(10): 105226.

[5] 曹知奥, 马晨硕. 基于改进多目标混沌粒子群优化的电动汽车充放电调度[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2025, 46(9): 1−8.
(Cao Zhi-ao, Ma Chen-shuo. Charging and discharging scheduling for electric vehicles based on improved multi-objective chaotic particle swarm optimization[J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2025, 46(9): 1−8.)

(下转第 84 页)