doi：10. 12068/j. issn. 1005－3026. 2026. 20269026

忆阻移相混沌振荡器的设计与动力学分析

吴洁宁[1,2,3]，方宇航[1,2]，王丽丹[1,2,3]，段书凯[1,2,3]

（1. 西南大学 人工智能学院，重庆 400715；2. 西南大学 类脑计算与智能芯片重庆市重点实验室，重庆 400715；
3. 西南大学 国家与地方联合智能传输工程实验室，重庆 400715）

摘 要：针对传统三阶RC(resistor-capacitor)移相振荡器参数单一、频率响应固定、动力学调控能力弱、难以生成可控混沌信号的问题，本文提出一种基于三阶RC超前型结构的忆阻耦合移相混沌振荡器. 通过引入忆阻器以修正振荡器选频网络的频率响应特性. 同时，设计了1个受控忆阻器以维持恒定的环路增益. 因此，该振荡器具有2个独立的偏移增压电压，2个电容器的电压可以通过抵消被有效控制. 此外，调节核心比例因子可有效驱动系统经由倍周期分岔级联从周期振荡过渡至混沌态. 最后，通过平衡点、李雅普诺夫指数谱与分岔图等动力学分析验证了理论分析的结果. 仿真与动力学分析结果表明，所提电路具备良好的混沌可实现性与参数可调性，可为忆阻混沌电路设计及保密通信应用提供理论与仿真支撑.

关 键 词：忆阻器；混沌振荡器；受控忆阻器；移相选频网络；动力学分析

中图分类号：TP 13 ；TN 752.2 ；O 415.5 **文献标志码**：A **文章编号**：1005-3026(2026)07-0107-08

Design and Dynamic Analysis of Memristive Phase-Shifting Chaotic Oscillators

WU Jie-ning[1,2,3], *FANG Yu-hang*[1,2], *WANG Li-dan*[1,2,3], *DUAN Shu-kai*[1,2,3]

(1. College of Artificial Intelligence, Southwest University, Chongqing 400715, China; 2. Brain-Inspired Computing & Intelligent Control of Chongqing Key Laboratory, Southwest University, Chongqing 400715, China; 3. National & Local Joint Engineering Laboratory of Intelligent Transmission and Control Technology, Southwest University, Chongqing 400715, China. Corresponding author: DUAN Shu-kai, E-mail: duansk@swu.edu.cn)

Abstract: To address the limitations of conventional third-order resistor-capacitor (RC) phase-shift oscillators including single parameter, fixed frequency response, poor dynamic tunability, and difficulty in generating controllable signals chaotic, this paper proposes a memristive coupled phase-shifting chaotic oscillator based on a third-order RC lead-type structure. The introduced memristor modifies the frequency response characteristics of the frequency-selective network in the oscillator. Meanwhile, a controlled memristor is designed to maintain a constant loop gain. Therefore, the oscillator features two independent offset boosting voltages, enabling the voltages across the two capacitors to be effectively controlled through cancellation. Furthermore, adjusting the core scaling factor can effectively drive the system from periodic oscillation to chaos through a period-doubling bifurcation cascade. Finally, dynamic analyses including equilibrium points, Lyapunov exponent spectra, and bifurcation diagrams verify the results of the theoretical analysis. Numerical results demonstrate that the presented circuit achieves controllable chaotic dynamics with excellent parameter adjustability, which provides theoretical and simulation references for memristive chaotic circuit design and secure communication applications.

Key words: memristor; chaotic oscillator; controlled memristor; phase-shifting frequency-selective network; dynamic analysis

近年来，混沌系统具备初值高敏感、轨迹类随机、动力学行为丰富等特性，在事件预测、图像

收稿日期：2026-03-26
基金项目：国家自然科学基金资助项目(62306246,62576291).
作者简介：吴洁宁(1991—)，女，重庆万州人，西南大学人工智能学院讲师，博士.
通信作者：段书凯，E-mail：duansk@swu.edu.cn.

压缩、保密通信、神经网络等领域得到广泛研究[1].忆阻器是继电阻、电容、电感后的第四类基础电路元件,具有非易失、低功耗、纳米尺度等优势,在存内计算、神经形态电路、保密通信等领域具备重要应用价值[2].围绕忆阻器建模,学界已提出分段线性、多项式、tanh、局域有源等多种模型,并将其逐步用于混沌系统的构建与动力学分析[3-5].设计新型混沌系统能够丰富加密系统的候选资源,是提升混沌加密安全性的重要途径.文献[6]提出1种多气泡串联结构的四维忆阻混沌系统,借助分岔图分析其丰富动力学行为,并完成FPGA(field-programmable gate array)硬件实现.文献[7]构建了1种基于离散忆阻器的复高斯混沌模型,验证了其增强的混沌特性,并成功应用于双图像加密方案.上述研究表明,忆阻混沌系统在复杂动力学行为和工程应用方面均展现出巨大潜力.

在忆阻混沌振荡器研究中,向振荡电路引入忆阻器是非线性电路领域的热门方向,主流实现思路分为三类:一是将忆阻器本构方程直接嵌入系统动力学方程[8-9];二是引入忆阻模块提升系统维度[10-11];三是将实物忆阻器作为硬件元件接入振荡电路[12-13].由于Chua电路、双T振荡器、Colpitts电路及文氏桥振荡器等经典结构具备成熟振荡理论,常作为忆阻器搭载载体,用以生成混沌乃至超混沌信号[14-19].例如,Zhang等[16]将非理想磁控忆阻器与多段线性忆阻器耦合到Chua电路中,获得了多涡卷吸引子;Iu等[17]提出了基于忆阻器的双T混沌振荡器方案;Li等[18]则基于指数型广义忆阻器构建了1个四维忆阻Colpitts振荡器.近期,Zhao等[20]利用自整流铁酸铋(BFO)忆阻器的模拟非线性动力学,将RC混沌振荡器中的二极管替换为忆阻器,设计了1个五阶忆阻混沌振荡器,验证了模拟型忆阻器在混沌电路中的可行性.此外,Song等[21]通过研究基于非易失忆阻器的二阶非线性振荡器的多稳态、噪声诱导状态跳变与随机共振特性,揭示忆阻器在边缘混沌动力学中的核心作用,进一步证实忆阻器可强化非线性电路的复杂动力学特征.

在移相振荡器方面,Cen等[22]提出1种忆阻移相混沌振荡器,其通过在传统RC移相振荡器中引入受控忆阻器实现混沌输出,并指出该方法具有拓扑迁移潜力.本文在此基础上对文献[22]所给拓扑进行变型设计:受控忆阻器被配置于R_1支路,而非原文所采用的反馈支路.忆阻器的电荷相关阻值特性由此被用于对选频网络实施动态调节,同时受控忆阻器的耦合作用有助于维持放大环节增益稳定,从而形成1种新型忆阻移相混沌振荡器.如表1所示,本文与文献[22]的振荡器在多个方面存在本质差异.

表1 本文与文献[22]的振荡器对比

Table 1 Comparison of oscillator between this work and reference[22]

对比项	文献[22]	本文
受控忆阻器接入位置	反馈电路(替代R_f)	R_1支路(替代原固定电阻)
耦合关系形式	$M_f=k(R+M)$	$M_f=-M+R_f/k$
环路增益表达式	$T=k/6$	$T=k/6$
增益恒定的实现方式	M_f与$R+M$成比例	M_f+M为常数
平衡点稳定性分析	给出特征多项式,未给出d_c	给出$d_c\approx 0.60$的横向分岔临界值

1 忆阻移相混沌振荡器的电路设计

1.1 传统RC移相正弦波振荡器

移相正弦波振荡器[23]可根据RC的位置分为超前型和滞后型,也可根据RC的个数进行分类.本文以三阶RC超前型移相正弦波振荡器为基础进行设计,其电路结构如图1所示,取电容参数满足$C_1=C_2=C_3=C$.

根据Barkhausen准则,振荡条件要求环路总相移为360°.对于三阶RC超前型移相网络,每个RC节提供约60°相移,由此可解得振荡角频率为$\omega=1/\left(C\sqrt{3R_1R_2}\right)$.这是RC移相振荡器设计中的经典结论.Holzel[23]在其宽频带正弦波振荡器的研究中,亦基于此类RC移相网络的频率特性开展工作.

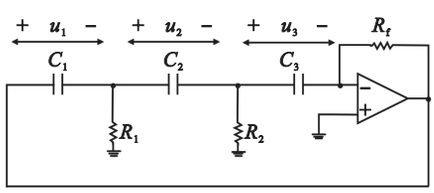


图1 传统RC移相正弦波振荡器

Fig. 1 Traditional RC phase-shifting sine-wave oscillator

该振荡器的振荡角频率满足 $\omega=1/\left(C\sqrt{3R_1R_2}\right)$,环路增益 $T=R_f/\left[6(R_1+R_2)\right]$,且环路增益需为实数值.当取 $R_1=R_2=R$ 时,仅当反馈电阻 $R_f>12R$ 时,电路中的信号才能被有效放大并产生持续的正弦振荡.

1.2　忆阻移相混沌振荡器的拓扑设计

文献[22]提出了1种受控忆阻器参与的移相混沌振荡器方案.其核心思路是将忆阻器与受控忆阻器分别接入指定支路,并利用二者耦合关系稳定环路放大倍数,进而触发混沌振荡.该文同时指出,受控忆阻器的接入位置具有可迁移性,不同支路配置可能形成动力学特性不同的混沌系统.基于这一思路,本文对文献[22]的原拓扑进行了支路重构:以忆阻值分别为 M 和 M_f 的2个忆阻器,取代原电路中的 R_2 和 R_1 支路,反馈电阻 R_f 保持不变,最终构建出图2所示的忆阻移相混沌振荡器.

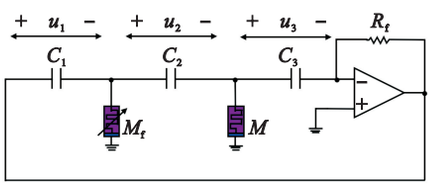


图2　忆阻移相混沌振荡器

Fig. 2　Memristive phase-shifting chaotic oscillator

为保证环路增益稳定,避免因忆阻器阻值变化导致频率响应范围变窄,定义受控忆阻器的 M_f 与忆阻器的 M 及固定电阻 R_f 满足如下耦合关系:

$$M_f=-M+\frac{R_f}{k}. \tag{1}$$

其中,k 为比例因子,是调控系统混沌行为的核心参数.

文献[22]在类似的忆阻移相振荡器中,将受控忆阻器置于反馈支路,并推导出环路增益 $T=R_f/\left[6\left(R_1+R_2\right)\right]$.本文对拓扑改造后,利用基尔霍夫定律可推导出该振荡器的环路增益为 $T=R_f/[6(M_f+M)]$.由上式可知,环路增益 T 依赖于忆阻器的时变阻值 M.为了使 T 与 M 无关,应令 M_f+M 为常数.设该常数为 R_f/k,其中 k 为正实数,即可得式(1).

由于受控忆阻器的阻值 M_f 由忆阻器的阻值 M 决定,且与传统忆阻器具有相似的本构特性,因此将其定义为受控忆阻器[22].该受控忆阻器与电路中的受控源类似,其阻值与自身支路的电压、电流无关,仅由忆阻器 M 所在支路的电压或电流决定,通过记录其他支路的电荷或磁通量来实现阻值的动态调控.

1.3　受控忆阻器的分类定义

结合忆阻器本构关系与本文所涉及的移相混沌振荡器拓扑特性,对引入的受控忆阻器进行明确定义,并依据其调控机制分为3类,具体表述如下:

备注1:受控忆阻器(controlled memristor,CM)为非独立型忆阻器,其核心特征为可记录电路中另一控制支路的电荷或磁通量信息,自身阻值由控制支路的电荷或磁通量动态调控,与自身支路的电压、电流无直接关联.

备注2:电荷控制型受控忆阻器(charge-controlled CM,CCCM),该类型忆阻器专用于记录控制支路的电荷参数,其阻值随支路电荷单调变化,为本文所选用器件.

备注3:磁控型受控忆阻器(magnetic-controlled CM,MCCM),该类型忆阻器记录控制支路的磁通量参数,其阻值随控制支路的磁通量变化而动态调整,适用于磁耦合类非线性电路系统.

在本文移相混沌振荡器中,受控忆阻器的核心作用是建立 M 支路电荷与 R_1 支路电阻的耦合关系;该器件不向电路输出激励信号,仅依靠多端跨支路耦合效应稳定环路增益.同时,受控忆阻器的阻值动态响应特性可配合忆阻器的 M 完成对振荡器选频网络的频率修正,有效拓宽电路的频率响应范围,为混沌振荡的产生提供必要条件.

1.4　振荡器的频率与环路增益特性

将图2电路中的忆阻器的 M 和受控忆阻器的 M_f 在正弦稳态下视为线性电阻.设3个电容相等 $C_1=C_2=C_3=C$.由基尔霍夫定律,可解得选频网络的传递函数,根据相位平衡条件,可推导出振荡角频率满足式(2):

$$\omega=\frac{1}{C\sqrt{3M_fM}}. \tag{2}$$

由上文可知,对于标准的三阶RC移相振荡器,其环路增益为

$$T=\frac{R_f}{6\left(R_1+R_2\right)}.$$

R_1 对应 M_f,R_2 对应 M,代入 T 中即可得式(3):

$$T=\frac{R_f}{6\left(M_f+M\right)}=\frac{R_f}{6\left[\left(-M+\dfrac{R_f}{k}\right)+M\right]}=\frac{k}{6}. \tag{3}$$

当比例因子 k 取固定常数时,可通过其合理取值

使振荡器环路增益 T 保持恒定，这一特性让电路对不同频率的输入信号具备一致的放大能力，有效拓宽了振荡器的频率响应带宽，为混沌振荡的产生奠定了关键基础．具体而言，当忆阻器的 M 呈现低阻值特性时，电路可对高频信号实现有效放大与传输；当忆阻器的 M 增大时，电路仍能对低频信号保持稳定的放大效果，从根本上避免了传统 RC 移相振荡器因支路阻值变化引发的频率响应范围狭窄、振荡信号失真甚至振荡不完整等问题．

忆阻器的忆阻值 M 随自身电荷实时变化，持续修正选频网络振荡频率．电路内各频率分量经放大、衰减达到能量平衡时，系统维持稳定周期振荡；若环路增益过小，电路损耗无法被补偿，振荡无法持续；环路增益过大将使运放输出饱和，信号失去动态调节空间．只有增益取值适中，信号能量收支平衡，叠加忆阻器变阻带来的频率随机扰动，系统才能脱离周期约束，产生混沌振荡．

1.5 忆阻器的数学模型

本文采用 HP(Hewlett-Packard)忆阻器模型作为忆阻器(忆阻值 M)的数学描述．该模型属电荷控制型，结合式(1)的耦合关系，受控忆阻器亦为电荷控制型(CCCM)．选用带 Biolek 窗口函数的非线性模型，其本构关系为

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=k_u F(u) I(t),\\ M&=R_{\mathrm{on}}u+R_{\mathrm{off}}(1-u).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中：u 为忆阻器的内部状态变量，取值范围为 $[0, 1]$；k_u 为忆阻器内部状态的变化率，为固定常数；$F(u)$ 为窗口函数，用于限制内部状态变量 u 的取值范围；$I(t)$ 为流经忆阻器(忆阻值 M)的电流；R_{on} 和 R_{off} 分别为忆阻器的导通电阻和关断电阻，为忆阻器的固有参数．

采用 Biolek 窗口函数：$F(u)=1-[u-\varepsilon(-I)]^{2p}$．其中：$p$ 为正整数，用于调节窗口函数的特性；I 为流经忆阻器的电流；$\varepsilon(x)$ 为阶跃函数，用于判断忆阻器电流的极性．由于忆阻器具有电阻特性，其阻值始终为正，因此判断忆阻器电流极性等价于判断其电压极性．

由于阶跃函数在 0 点的导数为冲激函数，取值为无穷大，不便于计算机数值仿真，利用 $\lim\limits_{a\to+\infty}\tanh(ax)=2\varepsilon(x)-1$ 的特性，采用 $\tanh(ax)$ 替代阶跃函数 $\varepsilon(x)$，其中 a 取足够大的常数．若设忆阻器两端的电压为 V_{M}，则忆阻器的数学模型可改写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=k_u F(u)\frac{V_{\mathrm{M}}}{M},\\ M&=R_{\mathrm{on}}u+R_{\mathrm{off}}(1-u),\\ F(u)&=1-\left\{u-\frac{\left[\tanh\left(-aV_{\mathrm{M}}\right)+1\right]}{2}\right\}^{2p}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

本文选取忆阻器的参数为 $a=10^6$，$k_u=10^3$，$R_{\mathrm{on}}=100\ \Omega$，$R_{\mathrm{off}}=10\,000\ \Omega$，$p=2$，该参数下 MATLAB 仿真的 HP 忆阻器伏安特性曲线表现为典型的忆阻滞回线，如图 3 所示．输入电源电压表达式为 $V=A\sin(2\pi ft)$．其中：A 为幅值，取值为 10；f 为频率，具体数值如图 3 所示；设置仿真总时长为 3 倍的最大振荡周期，在仿真区间内均匀划分 200 个离散采样点开展数值计算．

本文采用 HP 忆阻器模型及其 Biolek 窗口函数，这是 1 种广泛用于混沌系统理论研究的理想化模型．需要指出的是，实际商用忆阻器的伏安特性与理想 HP 模型存在一定差异，且电路中不可避免存在寄生电容和寄生电感．因此，本文的数值仿真结果主要用于揭示系统的定性动力学行为，而定量工程实现则需进一步结合具体器件参数进行电路级仿真(如 Multisim)或硬件校准．

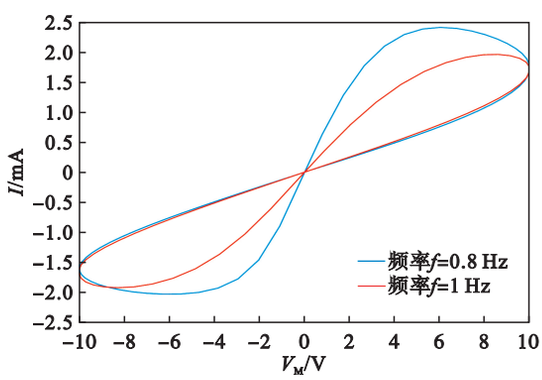


图 3 HP 忆阻器伏安特性曲线

Fig. 3 Volt-ampere characteristic curves of HP memristor

2 系统方程与动力学分析

2.1 系统方程的推导

图 2 中 3 个电容 C_1，C_2，C_3 两端的电压分别为 u_1，u_2，u_3，运算放大器的输出电压为 V，其输出幅值为 $\pm V_{\mathrm{amp}}$，则运算放大器的输出电压可表示为

$$V=\frac{1}{2}\left(\left|u_1+u_2+u_3+V_{\mathrm{amp}}\right|-\left|u_1+u_2+u_3-V_{\mathrm{amp}}\right|\right). \tag{6}$$

结合忆阻器两端的电压 $V_{\mathrm{M}}=V-u_1-u_2$，将窗口函数 $F(u)$ 用电容电压表示为

$$F(u)=1-\left\{u-\frac{\left[\tanh\left(-aV_{\mathrm{M}}\right)+1\right]}{2}\right\}^{2p},\\ V_{\mathrm{M}}=V-u_1-u_2.\Bigg\} \tag{7}$$

根据基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL),对忆阻移相混沌振荡器的各节点进行电路分析,推导得到系统的状态方程为

$$\left.\begin{aligned} C_1\dot{u}_1&=\frac{V-u_1}{M_{\mathrm{f}}}+\frac{V-u_1-u_2}{M}-\frac{u_1+u_2+u_3}{R_{\mathrm{f}}},\\ C_2\dot{u}_2&=\frac{V-u_1-u_2}{M}-\frac{u_1+u_2+u_3}{R_{\mathrm{f}}},\\ C_3\dot{u}_3&=-\frac{u_1+u_2+u_3}{R_{\mathrm{f}}},\\ \dot{u}&=k_uF(u)\frac{V-u_1-u_2}{M}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中,V满足式(6),M满足式(4),M_{f}满足式(1),$F(u)$由式(1),(4),(6),(7)确定.该系统为四维非线性系统,包含3个电容电压和1个忆阻器内部状态变量,具备产生混沌行为的维数条件.

2.2　无量纲系统归一化

为消除量纲影响,对式(8)进行无量纲化处理.定义无量纲参数(α,β):

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=\frac{R_{\mathrm{off}}}{R_{\mathrm{on}}},\\ \beta&=\frac{R_{\mathrm{f}}}{R_{\mathrm{on}}}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

将M和M_{f}用无量纲参数表示为

$$M=R_{\mathrm{on}}m(u), \tag{10}$$

$$M_{\mathrm{f}}=R_{\mathrm{on}}m_{\mathrm{f}}(u). \tag{11}$$

其中,$m(u)$和$m_{\mathrm{f}}(u)$为无量纲忆阻函数,其表达式为

$$m(u)=u+\alpha(1-u), \tag{12}$$

$$m_{\mathrm{f}}(u)=m(u)+\frac{1}{k}\beta. \tag{13}$$

将M和M_{f}的无量纲参数代入式(8)的4个状态方程,并在等式右边提取公因子$1/R_{\mathrm{on}}$,等式两边再同时乘$1/C_i$,得到无量纲化后的中间方程:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_1&=\frac{1}{R_{\mathrm{on}}C_1}\cdot\left[\frac{V-u_1}{m_{\mathrm{f}}(u)}+\frac{V-u_1-u_2}{m(u)}-\frac{u_1+u_2+u_3}{\beta}\right],\\ \dot{u}_2&=\frac{1}{R_{\mathrm{on}}C_2}\cdot\left[\frac{V-u_1-u_2}{m(u)}-\frac{u_1+u_2+u_3}{\beta}\right],\\ \dot{u}_3&=-\frac{1}{R_{\mathrm{on}}C_3}\cdot\frac{u_1+u_2+u_3}{\beta},\\ \dot{u}&=k_uF(u)\frac{1}{R_{\mathrm{on}}}\cdot\frac{V-u_1-u_2}{m(u)}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

进一步定义无量纲参数,$A=\dfrac{1}{R_{\mathrm{on}}C_1}$,$B=\dfrac{1}{R_{\mathrm{on}}C_2}$,$C=\dfrac{1}{R_{\mathrm{on}}C_3}$,$\rho=\dfrac{k_u}{R_{\mathrm{on}}}$,最终得到无量纲化的系统状态方程:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_1&=A\left[\frac{V-u_1}{m_{\mathrm{f}}(u)}+\frac{V-u_1-u_2}{m(u)}-\frac{u_1+u_2+u_3}{\beta}\right],\\ \dot{u}_2&=B\left[\frac{V-u_1-u_2}{m(u)}-\frac{u_1+u_2+u_3}{\beta}\right],\\ \dot{u}_3&=-C\frac{u_1+u_2+u_3}{\beta},\\ \dot{u}&=\rho F(u)\frac{V-u_1-u_2}{m(u)}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中,$m(u)$,$m_{\mathrm{f}}(u)$分别由式(12),(13)给出.该无量纲系统为后续的动力学分析提供了简洁、通用的数学模型,便于分析参数对系统混沌行为的调控规律.

本文选取系统的核心仿真参数为$a=1\times10^6$,$k_u=1\times10^3$,$p=2$,$R_{\mathrm{on}}=100\ \Omega$,$R_{\mathrm{off}}=10\,000\ \Omega$,$C_1=C_2=C_3=9\times10^{-4}\ \mathrm{F}$,$V_{\mathrm{amp}}=15\ \mathrm{V}$,$k=14$,$R_{\mathrm{f}}=85\,000\ \Omega$.

采用MATLAB的ODE45算法(设置相对容差$r_{\mathrm{tol}}=1\times10^{-7}$,绝对容差$a_{\mathrm{tol}}=1\times10^{-10}$)对无量纲系统进行数值仿真,仿真时间范围$t_{\mathrm{span}}=[0,5\,000]$,初始值为$[1,0,0,1]$,计算得到系统的李雅普诺夫指数$\lambda$为$(0.006,-0.009,-0.059,-0.630)$.

从计算结果看,这组李雅普诺夫指数已经能够比较清楚地说明系统动力学特征.最大指数为正,说明系统对初值敏感;另外3个指数为负,说明轨道不会无限制扩张,而是被吸引到有限区域内.结合前述数值仿真结果,可以认为该无量纲系统在当前参数下表现为有界混沌.基于这一点,给出李雅普诺夫指数曲线图,如图4所示,用于和后续的时域及相图分析相互印证.

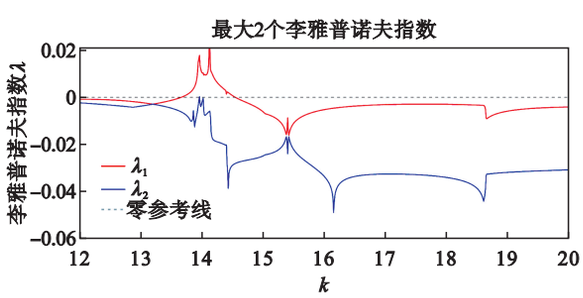


图4　李雅普诺夫指数随参数k演化图

Fig. 4　Lyapunov exponent versus parameter k

为直观展示系统动力学行为,本文进一步给出2组图像结果:图5为4个相平面轨迹图,分别为u_1-u_3,u_1-u_2,u_2-u,u_3-u,用于表征吸引子在相空间中的分布形态,仿真参数如下:求解器为MATLAB ODE45,相对容差$r_{\mathrm{tol}}=1\times10^{-7}$,绝对容差

$a_{tol}=1\times10^{-10}$，仿真时长 $t_{span}=[0,1\ 000]$，初始值为 $[1,0,0,1]$；图 6 为 4 个状态变量的时域波形图，用于反映系统的时间演化特征.

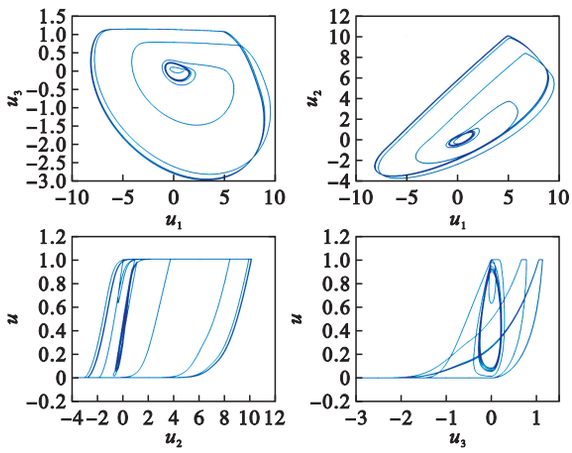


图 5 初始值为[1,0,0,1]时系统(15)的相轨迹

Fig. 5 Phase trajectory of system(15) with initial value [1,0,0,1]

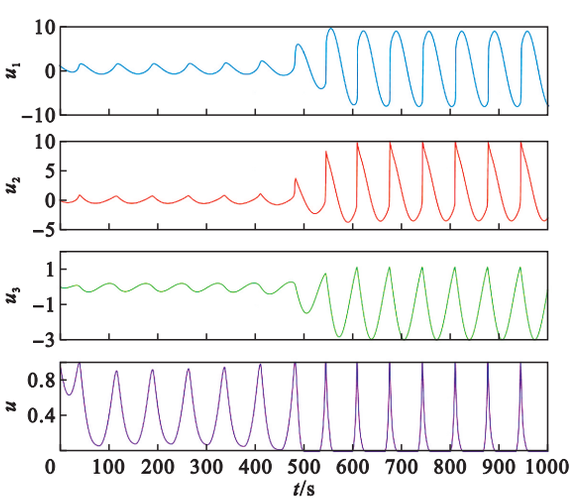


图 6 初始值为[1,0,0,1]时系统(15)的波形

Fig. 6 Waveform of system (15) with initial value [1,0,0,1]

2.3 平衡点与稳定性分析

平衡点是分析非线性系统动力学行为的基础，反映了系统的稳态特性. 当运算放大器工作在线性区时，满足 $V=u_1+u_2+u_3$，代入无量纲系统(15)可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}_1&=A\left[\frac{u_2+u_3}{m_f(u)}+\frac{u_3}{m(u)}-\frac{u_1+u_2+u_3}{\beta}\right],\\ \dot{u}_2&=B\left[\frac{u_3}{m(u)}-\frac{u_1+u_2+u_3}{\beta}\right],\\ \dot{u}_3&=-C\frac{u_1+u_2+u_3}{\beta},\\ \dot{u}&=\rho F(u)\frac{u_3}{m(u)}.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

令式(16)右端为零，由 $\dot{u}_3=0$ 得 $u_1+u_2+u_3=0$；将其代入 $\dot{u}_2=0$ 得 $u_3=0$；进而由 $u_1+u_2+u_3=0$ 得 $u_1+u_2=0$；再由 $\dot{u}_1=0$ 得 $u_2+u_3=0$，故 $u_2=0$. 因此 $u_1=u_2=u_3=0$，而 $\dot{u}=0$ 自动满足，故 u 可取 $(0,1)$ 内任意常数. 记平衡点处的内部状态为 d，则系统全部平衡点构成 1 条连续直线：

$$E=\{(0,0,0,d)|d\in(0,1)\}.\tag{17}$$

为分析平衡点的稳定性，在平衡点 $(0,0,0,d)$ 处对系统(16)进行线性化，得到雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$：

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{-A}{\beta} & A\left(\dfrac{1}{m_f(d)}-\dfrac{1}{\beta}\right) & A\left(\dfrac{1}{m_f(d)}+\dfrac{1}{m(d)}-\dfrac{1}{\beta}\right) & 0\\ \dfrac{-B}{\beta} & \dfrac{-B}{\beta} & B\left(\dfrac{1}{m(d)}-\dfrac{1}{\beta}\right) & 0\\ \dfrac{-C}{\beta} & \dfrac{-C}{\beta} & \dfrac{-C}{\beta} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\rho F(d)}{m(d)} & 0\end{bmatrix}.\tag{18}$$

该矩阵最后 1 列全为零，因此系统存在 1 个零特征值，其余特征值由左上角的 3×3 子矩阵 $\boldsymbol{J}_3$ 决定. 特征方程可写为

$$\lambda\cdot\det(\boldsymbol{J}_3-\lambda\boldsymbol{I})=0.$$

对于实际电路，取电容值相等 $C_1=C_2=C_3$，则无量纲参数 $A=B=C$. 此时令 $h=A/\beta$，并记 $X=\beta/m_f(d)$，$Y=\beta/m(d)$，经计算可得 $\boldsymbol{J}_3$ 的特征多项式为

$$\lambda^3+3h\lambda^2+2h^2(X+Y)\lambda+h^3XY=0,\tag{19}$$

或等价为，

$$\beta\lambda^3+3A\lambda^2+2A^2\left(\frac{1}{m_f(d)}+\frac{1}{m(d)}\right)\lambda+\frac{A^3}{m_f(d)m(d)}=0.\tag{20}$$

采用第 2.2 节所给参数 $A=1/(R_{on}C_1)\approx11.11$，$\beta=R_f/R_{on}=850$，$k=14$ 对式(20)进行数值求解，得到特征值实部随内部状态 d 的演化规律：系统平衡点并非在整个 $d\in(0,1)$ 区间内统一不稳定，而是存在明显的稳定性转变. 结合特征值实部变化曲线，如图 7 所示，可见：当 d 位于较小区间时，3 个非零特征值的实部均小于 0；随着 d 增大，特征值的最大实部逐渐上升，并在临界值 $d_c\approx0.60$ 附近穿过零轴变为正值.

具体而言，平衡点直线存在横向收敛-横向发散的稳定性分岔：当 $d<d_c$ 时，平衡点在横向，即非平衡点直线方向，为稳定状态；当 $d>d_c$ 时，至少存在 1 个具有正实部的特征值，所有平衡点均退化为不稳定的鞍点或鞍焦点.

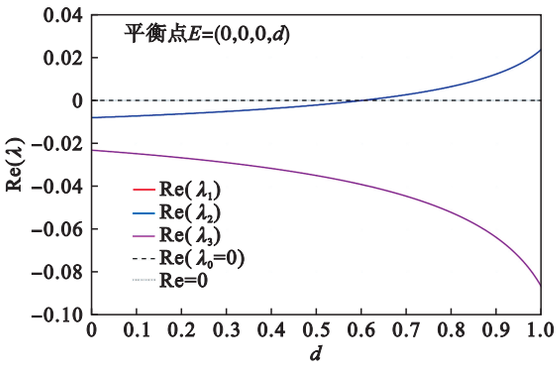


图7　特征值实部随参数 d 的变化曲线

Fig. 7　Curves of the real part of eigenvalues varying with parameter d

由于存在1个零特征值,平衡线本身构成一维中心流形.横向稳定性由 $\boldsymbol{J}_3$ 的特征值决定.当 $d<d_c$ 时,所有横向特征值实部为负,平衡点为稳定的结点或焦点;当 $d>d_c$ 时,至少1个横向特征值实部为正,平衡点变为不稳定的鞍点或鞍焦点.综上,本系统的平衡点稳定性与忆阻器内部状态 d 强相关,混沌行为主要出现在平衡点横向失稳的 d 区间.由于电路环路增益远大于1,忆阻器因频率变化消耗的能量可被及时补充,状态在扰动下无法回归稳定平衡点,最终借助忆阻器阻值的动态变化演化出混沌振荡.

2.4　分岔图分析

为深入揭示系统随参数 k 变化的动力学演化规律,本文通过数值积分方法计算了系统在参数 $k\in[10,16]$ 内以 u_3 为纵坐标的分岔图,如图8所示.分岔图清晰地呈现了系统从规则运动向混沌运动的演化过程,揭示了比例因子 k 对系统非线性动力学行为的调控作用.

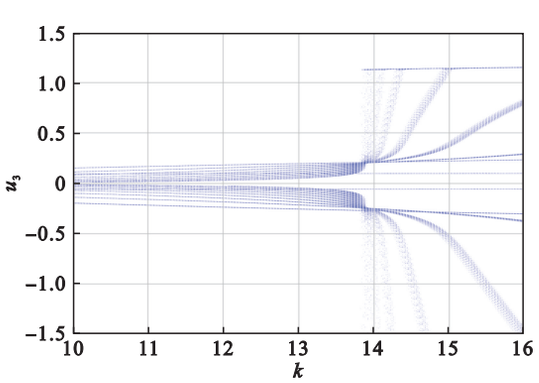


图8　以 k 为参数的系统分岔图

Fig. 8　Bifurcation diagram of the system with respect to parameter k

当 $k\in[10,\ 13]$ 时,系统处于小幅周期振荡状态,分岔图上的极值点高度集中于零轴附近,表明系统轨迹收敛于简单的周期吸引子,动力学行为较为规则.此阶段忆阻器 u_3 的振荡幅值较小,系统整体处于近似线性的工作区间,与第2.3节平衡点横向稳定区间的分析结论一致.

当参数增大至 $k\approx14$ 时,分岔图发生显著突变:分岔图上的极值点由单一集聚状态迅速展开为多个分支,标志着系统经历了由周期运动向复杂非线性运动的临界转变.这一现象与第2.3节平衡点稳定性分析中临界值 $d_c\approx0.60$ 处平衡点横向失稳的结论相互印证:当忆阻器内部状态 d 超过临界值后,平衡点退化为鞍焦点,系统对初始条件的敏感性急剧增强,这正是 $k\approx14$ 处分岔突变的动力学根源.

在 $k\in[14,16]$ 区间内,分岔图呈现出典型的倍周期分岔级联特征:极值点由单支逐步裂变为2支、4支乃至更多分支,各分支间距随 k 增大而持续压缩,体现了费根鲍姆(Feigenbaum)倍周期分岔路径的经典规律.随着 k 进一步增大,各分支趋于弥散,系统进入混沌状态,截面散点呈现分形带状分布,这是混沌吸引子的典型几何特征,与图4所示李雅普诺夫指数最大值由负转正的演化趋势高度吻合.

综上,系统以比例因子 k 为分岔参数,在 $k\approx14$ 处发生首次分岔,随后经历完整的倍周期分岔级联路径最终进入混沌.分岔图与平衡点稳定性分析、李雅普诺夫指数曲线及相图构成多维互证体系,共同支撑了系统具有真实混沌动力学行为的结论.

3　结　　语

本文以传统RC移相正弦波振荡器为基础,在保持反馈电阻 R_f 不变的条件下,将受控忆阻器引入 R_1 支路,并与忆阻器(忆阻值 M)共同构建了忆阻耦合移相振荡电路.围绕该电路,本文完成了模型推导与动力学数值分析.主要结论如下:

1)在参数 $a=10^6$,$k_u=10^3$,$p=2$,$R_{on}=100\ \Omega$,$R_{off}=10\ 000\ \Omega$,$C_1=C_2=C_3=9\times10^{-4}$ F,$V_{amp}=15$ V,$k=14$,$R_f=85\ 000\ \Omega$ 下,建立了系统的四维无量纲非线性状态方程,并完成了基于ODE45的数值仿真.仿真参数 $t_{span}=[0,5\ 000]$,初值[1,0,0,1].平衡点分析表明,系统平衡点构成1条平衡线 $E=\{(0,0,0,d)|d\in(0,1)\}$.线性化后雅可比矩阵存在1个零特征值,其余特征值由 $\boldsymbol{J}_3$ 子矩阵决定.结合图7可知,平衡线稳定性随内部状态 d 变化而改变,并非在整个区间内保持同一稳定性类型;在部分 d 区间内出现正实部,对应局部失稳.

2) 在上述参数与初值条件下,系统的李雅普诺夫指数计算结果为(0.006, −0.009, −0.059, −0.630).最大指数为正,系统对初值扰动具备指数敏感性;其余指数为负,相空间存在收缩方向.该结果与相图、时域波形呈现的复杂非周期行为吻合,可判定系统处于混沌态,轨迹具备非线性耦合特征.

3) 李雅普诺夫指数图进一步表明,参数k可显著调控系统动力学行为.分岔图完整刻画了以k为控制参数的演化路径:系统经倍周期分岔由周期态进入混沌,演化区间内存在窄带周期窗口;首次分岔发生在$k\approx14$处,与平衡点失稳临界条件匹配.

综上,本文所提忆阻耦合移相振荡拓扑可在给定参数下产生混沌行为,完成了电路建模、稳定性分析与分岔图分析的完整闭环研究,为受控忆阻器在移相振荡电路支路中的应用提供理论参考.本文现阶段仅开展理论建模与数值仿真,后续可搭建硬件电路完成实测,验证器件在误差、噪声、参数漂移下系统混沌的鲁棒性;同时针对参数调控、可控波形输出展开深入研究.

参考文献:

[1] Picano B, Fantacci R, Han Z. Nonlinear dynamic chaos theory framework for passenger demand forecasting in smart cities [J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2019, 68(9): 8533−8545.

[2] Yang X X, Taylor B, Wu A L, et al. Research progress on memristor: from synapses to computing systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2022, 69(5): 1845−1857.

[3] Lin H R, Wang C H, Du S C, et al. A family of memristive multibutterfly chaotic systems with multidirectional initial-based offset boosting [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 172: 113518.

[4] Teng L, Wang X Y, Ye X L. Hyperchaotic behavior in the novel memristor-based symmetric circuit system[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 151535−151545.

[5] Lai Q, Wan Z Q, Zhang H, et al. Design and analysis of multiscroll memristive Hopfield neural network with adjustable memductance and application to image encryption [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2023,34(10): 7824−7837.

[6] 李子涵, 刘嵩, 张博, 等. 具有多气泡串联结构的忆阻混沌系统动力学分析及其实现[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2026, 44(1): 110−115.
(Li Zi-han, Liu Song, Zhang Bo, et al. Dynamic analysis and implementation of memristive chaotic system with multi-bubble tandem structure[J]. *Journal of Hubei Minzu University* (*Natural Sciences Edition*), 2026, 44(1): 110−115.)

[7] 邓全利, 王春华, 杨港. 基于离散忆阻器的复值混沌系统动力学分析及其在双图像加密中的应用[J]. 物理学报, 2026, 75(1): 195−209.
(Deng Quan-li, Wang Chun-hua, Yang Gang. Discrete memristor-based complex-valued chaotic system dynamic analysis and its application in dual-image encryption [J]. *Acta Physica Sinica*, 2026, 75(1): 195−209.)

[8] Wang R, Li C B, Kong S X, et al. A 3D memristive chaotic system with conditional symmetry [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, 158: 111992.

[9] Kotadai Z, Fischer C, Rodríguez-Muñoz J D, et al. Multistability and initial-offset boosting dynamics in a new 3D memristive chaotic system with FPGA implementation [J]. *The European Physical Journal Plus*, 2024, 139: 70.

[10] Chang H, Li Y X, Chen G R, et al. Extreme multistability and complex dynamics of a memristor-based chaotic system [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2020, 30(8): 2030019.

[11] Wang S F. A memristive system: dynamics, synchronization, parameter modulation and demodulation [J]. *Physica Scripta*, 2024, 99(1): 015222.

[12] Huang J T, Saleem A, Poh Y H, et al. HfON−based optoelectronic memristor for synaptic computing[J]. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2024, 71(1): 536−541.

[13] Saha S M, Pal S, Roy S, et al. Experimental demonstration of CeO_2−based tunable gated memristor for RRAM applications[J]. *ACS Applied Electronic Materials*, 2023, 5(11): 6392−6400.

[14] Mannan Z I, Yang C J, Kim H. Oscillation with 4−lobe chua corsage memristor [J]. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2018, 18(2): 14−27.

[15] Tchitnga R, Nguazon T, Louodop Fotso P H, et al. Chaos in a single op-amp-based jerk circuit: experiments and simulations[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2016, 63(3): 239−243.

[16] Zhang S, Li C B, Zheng J H, et al. Generating any number of initial offset-boosted coexisting Chua's double-scroll attractors via piecewise-nonlinear memristor [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(7): 7202−7212.

[17] Iu H H C, Yu D S, Fitch A L, et al. Controlling chaos in a memristor based circuit using a twin−T notch filter [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2011, 58(6): 1337−1344.

[18] Li S, Dong E Z, Zhang Z F. A four-dimensional memristor chaotic system based on Colpitts oscillator [C]// Proceedings of the Chinese Automation Congress (CAC). Piscataway, NJ: IEEE, 2020: 4837−4842.

[19] Karthikeyan A, Rajagopal K, Tamba V K, et al. A simple chaotic Wien bridge oscillator with a fractional-order memristor and its combination synchronization for efficient antiattack capability[J]. *Complexity*, 2021, 2021: 8857075.

[20] Zhao X Y, Ascoli A, Demirkol A S, et al. Chaotic circuit design leveraging the analog nonlinear dynamics of a self-rectifying memristor[J]. *IEEE Open Journal of Circuits and Systems*, 2026(7): 269−281.

[21] Song K L, Bonnin M, Ascoli A, et al. Multistability, noise-induced transitions, and stochastic resonance in a nonlinear oscillator with a nonvolatile memristor [J/OL]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2026: 1−12. https://ieeexplore. ieee. org/document/11510752. DOI: 10.1109/TCSI.2026.3685449.

[22] Cen X L, Li C B, Gao X D, et al. A memristive phase-shifting chaotic oscillator[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2024, 71(12): 5792−5803.

[23] Holzel R. A simple wide-band sine wave quadrature oscillator [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 1993, 42(3): 758−760.