多状态系统脆弱性动态演化分析方法

罗忠诚 高贵兵*
湖南科技大学机电工程学院，湘潭，411201

摘要：脆弱性分析是多状态系统健康预测领域急需解决的难点，为此，提出了一种多状态系统脆弱性动态演化分析方法。根据系统的L_Z变换原理，将可靠性的相关指标作为多状态系统脆弱性分析的评价因子，建立了状态实时变化的多状态系统脆弱性动态演化分析模型。首先利用离散马尔可夫过程（discrete-time Markov process，DTMP）描述单元的多状态变化，通过拉普拉斯变换得到单元的L_Z变换函数，根据系统的结构特征和L_Z变换的运算原理得到系统的L_Z变换函数；然后将可靠性原理与脆弱性分析方法相融合，将多状态系统的可靠性指标代入系统脆弱性分析模型，用以分析多状态系统的脆弱性动态演化机制；最后以某主轴承孔加工系统为例，通过建立基于L_Z变换函数与动态可靠性指标的脆弱性分析模型分析脆弱性的动态演化趋势，解决了多状态系统脆弱性分析的难题。

关键词：多状态系统；L_Z变换；脆弱性；可靠性评价；动态演化
中图分类号：TG156
DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2026.11.021 **开放科学（资源服务）标识码（OSID）**：

A Dynamic Evolution Analysis Method for Vulnerability in Multi-state Systems

LUO Zhongchen GAO Guibing*
College of mechanical and Electrical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan, 411201

Abstract: Vulnerability analysis remains a critical issue in health prediction for multi-state systems. To address this challenge, this study proposes a dynamic evolution analysis method for system vulnerability. Based on the L_Z-transform principle, relevant reliability metrics are adopted as evaluation factors, and a dynamic evolution model that accounts for real-time state changes is established. Discrete Markov processes are first used to characterize the multi-state transitions of system units. The L_Z-transform function of each unit is derived via Laplace transformation, and the system-level L_Z -transform function is subsequently obtained based on the system structure and the operational rules of L_Z-transform. Reliability theory is then integrated with vulnerability analysis, allowing reliability indicators of the multi-state system to be incorporated into the vulnerability analysis model, thereby revealing the dynamic evolution mechanism of system vulnerability. A main bearing hole machining system is taken as a case study to construct a vulnerability analysis model based on L_Z-transform functions and dynamic reliability indicators. This model enables the analysis of vulnerability evolution trends and effectively addresses the long-standing challenge of vulnerability analysis in multi-state systems.

Key words: multi-state system; L_Z-transform; vulnerability; reliability evaluation; dynamic evolution

0 引言

多状态系统（multi-state systems，MSS）指系统及其组件可呈现多个性能水平的复杂系统，在航空航天、智能制造等领域应用广泛[1]。通信、网络、自动控制等各种先进技术的发展、普及和推广应用，提高了多状态系统的可观性和可控性，改善了系统的经济性[2]。然而多状态系统及组件间的相互依赖为故障从一个系统传播到另一个系统开辟了新的路径，使其在极端场景下易发连锁故障、呈现固有的脆弱性，给多状态系统埋下了重大安全隐患[3]。脆弱性表示系统容易受到攻击或容易被破坏的趋势，描述系统的不完美性、缺陷性或容易受到破坏的性能[4]。自然界中所有的研究对象均存在不同程度的脆弱性，复杂系统的脆弱性来源于内外各种不利因素对系统软硬件的破坏、损伤等，如软件的编码错误、流程缺陷、参数设置不合理，硬件的设计缺陷等[5]。多状态系统的脆弱性同样来自于系统内外的各种干扰、破坏，例如数控装备在生产过程中不断受到切削力、摩擦力、振动以及零部件的锈蚀等因素的影响，工作状态随

收稿日期：2025-07-23
基金项目：国家重点研发计划（2022YFF0609400）；湖南省自然科学基金（2023JJ60145）

着装备的性能劣化而产生变化，装备性能劣化时其脆弱程度必然增加[6]。脆弱性分析是系统健康管理领域的难点之一[7]。复杂系统脆弱性分析包括面向拓扑结构的分析和面向非拓扑结构的分析[8]。面向拓扑结构的脆弱性分析利用复杂网络理论，分析复杂系统CN部分的拓扑统计特征确定和筛选系统中的关键节点和脆弱环节[9]。非拓扑结构的脆弱性分析通过综合考虑系统的脆弱性因素，分析系统被攻击的难易程度、节点失效后对系统整体性能的影响程度等，建立脆弱性评估指标体系进行定量评估，分析较全面，但主观性较强[10]。多状态系统的脆弱性同样来自于系统内外的各种干扰、破坏，它与性能劣化有关，准确识别脆弱性和性能劣化之间的关系是脆弱性分析、评价的核心。

脆弱性分析评估方法主要有定性和定量两种。定性方法操作简单但受历史数据和实际数据的影响较大，评价精度较低。定量评价研究较多，主要有指标法、图层叠置法、脆弱性函数模型法、时间序列法、模糊物元法等[11]。指标法评价法的关键是建立评价指标体系，但指标体系因研究领域的不同而差异较大，应用普遍的有“压力-状态-响应”“暴露-敏感-适应”“多系统”三种指标体系[12]。脆弱性函数模型法需要详细分析系统结构和功能，对脆弱性要素之间的关系要有明确的认识，但脆弱性要素之间的关系往往难以形成统一认识[13]；图层叠置法通过叠置脆弱性图层得到脆弱性的空间分布，能直观反映空间差异，但图层的相对重要程度难以体现，无法实现脆弱性动态预测，且难以选择合适的图层[14]；时间序列法通过分析随机过程中时间序列的平稳性以评价系统脆弱性，操作简单但预测的偏差较大，一般只用于短期脆弱性评价[15]；模糊物元法需要设定一个参照系统，不用考虑变量的相互关系，但参照系统选取的主观性较强，评价结果受参照系统的影响较大[16]。综上所述，不管是定性还是定量方法，在脆弱性分析时并未探究系统状态变化对脆弱性的影响，与系统脆弱性随着状态变化发生的动态演化不符。此外，基于信息熵的脆弱性分析利用信息熵对“不确定性”的量化能力，将系统的“脆弱性”转化为可计算的“状态不确定性”，脆弱性越高的系统，其状态的不确定性越强、信息熵值越大[17]。复杂网络模型分析的核心是研究复杂系统的网络拓扑结构的功能特性与网络整体抗干扰能力之间的关系，关键点是网络拓扑特征提取和扰动影响量化[18]，但基于信息熵和复杂网络的分析方法难以描述清楚系统状态变化导致的脆弱性动态演化。

本文将离散马尔可夫过程与可靠性原理和L_Z变换方法等相关知识与方法进行深度融合，用以分析多状态系统的脆弱性动态演化机制。利用离散马尔可夫过程和L_Z变换原理得到多状态系统的L_Z变换函数，根据L_Z变换函数得到系统可靠性指标的动态变化过程，用可靠性指标的动态变化分析多状态系统脆弱性的动态演化机制。以主轴承孔加工系统为例，用所提方法得到该系统脆弱性的动态演化曲线，以证明该方法的可行性。

2 多状态系统动态脆弱性评估原理

由于环境变化和设备性能劣化等因素的影响，多状态系统的性能随着状态的变化而变化，表现出性能水平的动态变化性与脆弱性的动态演化特性。值得注意的是，对于多状态系统脆弱性的动态演化特性，仍然缺少有效的分析方法。为此，本文基于L_Z变换技术对多状态系统的多状态特性进行简化分析，利用系统可靠性指标的变化对脆弱性的动态演化特性进行量化分析，以解决脆弱性动态演化分析的难题。

2.1 多状态系统L_Z变换

根据LISNIANSKI等[19]提出的L_Z变换原理，对于离散状态连续时间马尔可夫过程(discrete-state continuous -time markov process，DSCT-MP)，有$G(t)\in\{g_1,g_2,\cdots,g_K\}$，$t\geqslant 0$，其中，$K$为包含的离散状态，$g=\{g_1,g_2,\cdots,g_K\}$表示状态集，$g_i$表示任意状态$i(i=1,2,\cdots,K)$的性能。令$\boldsymbol{E}$为转移概率矩阵，$\boldsymbol{E}=\left|e_{u,s}(t)\right|$，$u,s=1,2,\cdots K$，$p_0^G$为初始概率分布，$p_0^G=[p_{10}=\Pr\{G(0)=g_1\},\cdots,p_{K0}=\Pr\{G(0)=g_K\}]$，对于DSCTMP，有$G(t)=\left\langle g,E,p_0^G\right\rangle$，令$p_i^G(t)$表示在$t$时刻状态$g_i$的概率，则根据状态转移理论[19]，有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}p_1^G(t)}{\mathrm{d}t}=e_{11}(t)p_1^G(t)+e_{12}(t)p_2^G(t)+\cdots+e_{1K}(t)p_K^G(t)\\
&\frac{\mathrm{d}p_2^G(t)}{\mathrm{d}t}=e_{21}(t)p_1^G(t)+e_{22}(t)p_2^G(t)+\cdots+e_{2K}(t)p_K^G(t)\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{\mathrm{d}p_K^G(t)}{\mathrm{d}t}=e_{K1}(t)p_1^G(t)+e_{K2}(t)p_2^G(t)+\cdots+e_{KK}(t)p_K^G(t)
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

对式(1)进行拉氏变换，将初始条件$p_0^G=\{p_{10},\cdots,p_{K0}\}$代入得到任意$t$时刻的概率$p_i(t)$。基于$L_Z$变换原理[20]，则$G(t)$的$L_Z$变换函数$\mu(z,t,p_i(t))$的定义如下：

$$L_z\{G(t)\}=\mu(z,t,p_i^G(t))=\sum_{i=1}^{K}p_i^G(t)z^{g_i} \tag{2}$$

设多状态系统由n个组件$M_j(j=1,2,\cdots,n)$组成，每个组件包含m_j个单元$M_{jb}(b=1,2,\cdots,m_j)$，M_{jb}的状态数为m_{jb}，单元状态的取值用集合$g_{jb}=\{g_{jb1}^{M_{jb}},g_{jb2}^{M_{jb}},\cdots,g_{jbm_{jb}}^{M_{jb}}\}$表示，则多状态单元$M_{jb}$可用离散马尔可夫过程表示：$M_{jb}(t)=\left\langle g_{jb},B_{M_{jb}},p_{jb0}\right\rangle$。

基于离散马尔可夫过程，建立单元M_{jb}的状态转移方程，求得M_{jb}在任意状态h下的概率：

$$p_{jbh}^{M_{jb}}(t)=\Pr\{G_{jb}(t)=g_{jbh}\}\qquad h=1,2,\cdots,m_{jb} \tag{3}$$

基于式(2)中L_Z变换的定义，任意单元M_{jb}的L_Z变换为

$$L_z\{M_{jb}(t)\}=\sum_{h=1}^{m_{jb}}p_{jbh}^{M_{jb}}z^{g_{jbh}} \tag{4}$$

$$j=1,2,\cdots,n\qquad b=1,2,\cdots,m_j$$

多状态系统的L_Z变换函数的求解过程如下：基于L_Z变换原理与单元状态分析结果，利用式(2)求出单元的L_Z变换函数$L_z\{M_{jb}(t)\}$，根据串并联算子分析得到子系统M_j的L_Z变换函数$L_z\{M_j(t)\}$，再用串联算子运算得到系统的L_Z变换函数$L_z\{D_s(t)\}$，即

$$\begin{aligned}L_z\{M_s(t)\}=\Omega_{f_{ser}}\{&\Omega_{f_{par}}\{L_z(M_{11}(t)),\cdots,\\&L_z(M_{1m_1}(t))\},\cdots,\Omega_{f_{par}}\{L_z(M_{n1}(t)),\cdots,\\&L_z(M_{nm_n}(t))\}\}\end{aligned} \tag{5}$$

其中，f是多状态系统的结构函数，对于多状态系统，有

$$\begin{aligned}f=\min\{&(M_{11}(t)+,\cdots,M_{1m_1}(t)),(M_{21}(t)+,\cdots,\\&M_{2m_2}(t)),\cdots,(M_{n1}(t)+,\cdots,M_{nm_n}(t))\}\end{aligned} \tag{6}$$

其中，$\Omega_{f_{ser}}$和$\Omega_{f_{par}}$分别为串联算子和并联算子，子系统M_j、M_{j+1}的串联算子为

$$\begin{aligned}&\Omega_{f_{ser}}\{L_z\{M_j(t)\},L_z\{M_{(j+1)}(t)\}\}=\\&\Omega_{f_{ser}}\{\sum_{l=1}^{m_j}p_{jl}(t)z^{g_{jl}},\sum_{h=1}^{m_{(j+1)}}p_{(j+1)h}(t)z^{g_{(j+1)h}}\}=\\&\sum_{l=1}^{m_j}\sum_{h=1}^{m_{(j+1)}}p_{jl}(t)p_{(j+1)h}(t)z^{\min(g_{jl},g_{(j+1)h})}\end{aligned} \tag{7}$$

单元M_{jb}、$M_{j(b+1)}$的并联算子为

$$\begin{aligned}&\Omega_{f_{par}}\{L_z\{M_{jb}(t)\},L_z\{M_{j(b+1)}(t)\}\}=\\&\Omega_{f_{par}}\{\sum_{l=1}^{m_{jb}}p_{jbl}(t)z^{g_{jbl}},\sum_{h=1}^{m_{j(b+1)}}p_{j(b+1)h}(t)z^{g_{j(b+1)h}}\}=\\&\sum_{l=1}^{m_{jb}}\sum_{h=1}^{m_{j(b+1)}}p_{jbl}(t)p_{j(b+1)h}(t)z^{g_{jbl}+g_{j(b+1)h}}\end{aligned} \tag{8}$$

反复利用串并联算子计算，即可得到多状态系统的L_Z变换：

$$L_z\{D_S(t)\}=\sum_{s=1}^{d_s}P_s^{D_s}(t)z^{g_s} \tag{9}$$

式中：g_s为多状态系统在状态s时的性能取值；$P_s^{D_s}(t)$为系统处于状态s时的概率值；d_s为系统的包含总状态数。

2.2　多状态系统动态脆弱性分析

常见的脆弱性分析方法(如状态熵方法、UGF方法等)从系统状态变化的角度衡量系统的静态脆弱性，但多状态系统的脆弱性存在动态变化过程，系统的动态脆弱性与静态脆弱性存在较大区别，常见的静态脆弱性分析方法无法准确反映系统脆弱性的动态变化特征。为此，本文尝试从系统性能指标变化的角度对系统的动态脆弱性进行量化评估，其基本原理如下。

根据脆弱性定义[21]，将系统动态脆弱性定义为系统动态变化时的性能下降程度：

$$V_{D_S}[S,D]=1-\frac{\Phi_{D_S}(D)}{\Phi_{D_S}(S)} \tag{10}$$

式中：$\Phi_{D_S}(S)$为正常情况下的系统性能指标值；$\Phi_{D_S}(D)$为干扰或破坏情况下的系统性能指标期望值。

系统性能指标与其类型有关，包括生产率、资源利用率、可靠性等常见的指标，其中可靠性指产品在规定的时间和条件下的性能保持能力，即产品性能的稳定性，可靠性指标的变化亦体现了系统的性能变化趋势。因此，在多状态系统脆弱性分析时，以系统的可靠性指标代替系统的性能评价指标，并着重考虑系统的可用度$A_\omega(t)$、性能输出期望平均值$\bar{G}(t)$和瞬时性能缺陷均值$D_\omega(t)$[22]。

基于可靠性理论，给定生产水平ω下，多状态系统M_s在任意t时刻的可用度$A_\omega(t)$、性能输出期望平均值$\bar{G}_{D_S}(t)$、性能缺陷$D_\omega(t)$等可靠性性能评估指标分别为

$$A_\omega(t)=\sum_{g_{m_j}>\omega}P^{D_s}(t) \tag{11}$$

$$\bar{G}_{M_S}(t)=E\{G(t)\}=\sum_{s=1}^{d_s}g_sP_s^{D_s}(t) \tag{12}$$

$$D_\omega^{D_s}(t)=\sum_{s=1}^{d_s}P_s^{D_s}(t)\max\{\omega-g_{D_s},0\} \tag{13}$$

系统受到干扰或破坏后，系统可用度下降，性能指标随之变化，变化的性能指标值为

$$A_{\omega'}(t)=\sum_{g_{m_j}>\omega'}P^{D_s}(t) \tag{14}$$

$$\bar{G}_{D_S'}(t)=E\{G(t)\}=g_sP^{D_s}(t) \tag{15}$$

$$D_{\omega'}^{D_s}(t)=\sum_{s=\omega'}^{d_s}P^{D_s}(t)\max\{\omega'-g_{D_s},0\} \tag{16}$$

根据性能指标的动态变化与脆弱性的定义，系统动态脆弱性可定义为

$$V_{D_S}^{A}[S,F]=1-\frac{F'_{Pi}(t)}{F_{Pi}(t)} \tag{17}$$

其中，P_i为系统的性能指标，包括上述可靠性指标；$F_{Pi}(t)$为正常情况下对应性能指标下的系统性能；$F'_{Pi}(t)$为受到干扰后对应性能指标下系统性能的变化。

3 算例分析

图1所示为某柴油发动机主轴承孔的生产线，该生产线由4个子系统串联而成，每个子系统又分别由不同的加工单元并联组成。每个加工单元均存在正常工作、降级运行和完全故障等不同的状态，各加工单元的状态转移图见图2，各加工单元在不同状态下的生产率如表1所示。其中，M_{11}的状态转移率为$\lambda^{M_1}=6/\mathrm{y}$，$\lambda^{M_1 t}=(0.15+0.42t^2)/\mathrm{y}$，$\mu^{M_1}=150/\mathrm{y}$，$M_{21}$、$M_{22}$的状态转移率分别为$\lambda^{M_2}=2.4/\mathrm{y}$，$\lambda^{M_2 t}=(0.18+0.24t^2)/\mathrm{y}$，$\mu^{M_2}=120/\mathrm{y}$，$M_{31}$、$M_{32}$、$M_{33}$的状态转移率分别为$\lambda^{M_3}=4/\mathrm{y}$，$\lambda^{M_3 t}=(0.12+0.38t^2)/\mathrm{y}$，$\mu^{M_3}=160/\mathrm{y}$，$M_{41}$、$M_{42}$的状态转移率分别为$\lambda^{M_4}=0.48/\mathrm{y}$，$\lambda^{M_4 t}=(0.24+0.36t^2)/\mathrm{y}$，$\mu^{M_4}=180/\mathrm{y}$。

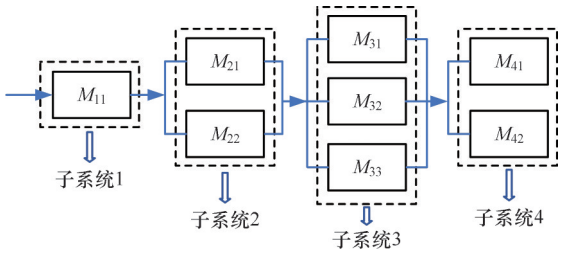


图1 发动机主轴承孔制造系统示意图

Fig.1 Schematic diagram of the manufacturing system for engine main bearing bores

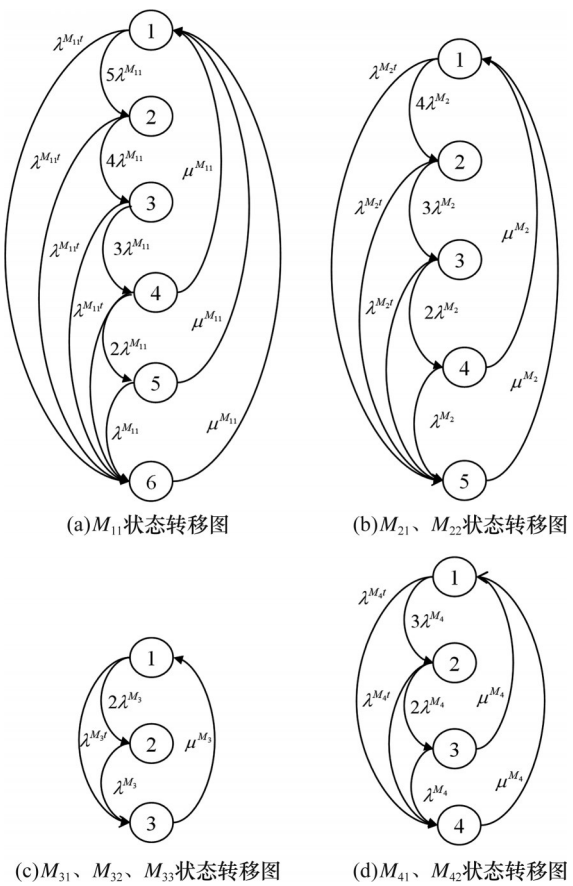


图2 各制造单元状态转移图

Fig.2 State transition diagram of each manufacturing unit

表1 各单元各状态下的生产率

Tab.1 Production rate of each unit under various states 件/h

单元	状态1	状态2	状态3	状态4	状态5	状态6
M_{11}	120	100	80	50	20	0
M_{21}	60	50	30	20	0	
M_{22}	60	50	30	20	0	
M_{31}	40	30	0			
M_{32}	40	30	0			
M_{33}	40	30	0			
M_{41}	60	40	20	0		
M_{42}	60	40	20	0		

3.1 主轴承孔制造系统的L_Z变换

主轴承孔制造系统由4个子系统串联而成，进行系统L_Z变换时，先对其子系统进行L_Z变换，然后利用串联算子计算得到系统的L_Z变换。

首先对子系统M_1进行L_Z变换。M_1只有一个单元M_{11}，有6种状态，$g_{m_1}^{M_1}=\{g_{111}^{M_{11}},g_{112}^{M_{11}},\cdots,g_{116}^{M_{11}}\}=\{120,100,80,50,20,0\}$，基于$M_{11}$的状态转移图和马尔可夫模型建立微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}p_{m_1}^{M_1}(t)}{\mathrm{d}t}=p_{m_1}^{M_1}(t)\cdot A^{AM_1} \tag{18}$$

$$p_{m_1}^{M_1}(t)=\{p_{111}^{M_{11}}(t),p_{112}^{M_{11}}(t),\cdots,p_{116}^{M_{11}}(t)\}=\{p_1^{M_1}(t),p_2^{M_1}(t),\cdots,p_6^{M_1}(t)\}$$

$$A^{AM_1}=\begin{bmatrix} A_{11} & 5\lambda^{M_1} & 0 & 0 & 0 & \lambda^{M_1 t} \\ 0 & A_{22} & 4\lambda^{M_1} & 0 & 0 & \lambda^{M_1 t} \\ 0 & 0 & A_{33} & 3\lambda^{M_1} & 0 & \lambda^{M_1 t} \\ \mu^{M_1} & 0 & 0 & A_{44} & 2\lambda^{M_1} & \lambda^{M_1 t} \\ \mu^{M_1} & 0 & 0 & 0 & A_{55} & \lambda^{M_1 t}+\lambda^{M_1 t} \\ \mu^{M_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu^{M_1 t} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}=-(5\lambda^{M_1}+\lambda^{M_1 t}) \qquad A_{22}=-(4\lambda^{M_1}+\lambda^{M_1 t})$$

$$A_{33}=-(3\lambda^{M_1}+\lambda^{M_1 t}) \qquad A_{44}=-(2\lambda^{M_1}+\lambda^{M_1 t}+\mu^{M_1})$$

$$A_{55}=-(\lambda^{M_1}+\lambda^{M_1 t}+\mu^{M_1 t})$$

其初始条件$p_{m_1}^{M_1}(0)=\{1,0,0,0,0,0\}$，用MATLAB求解以下微分方程：

$$\left.\begin{aligned} g_{m_1}^{M_1}&=\{g_{111}^{M_{11}},g_{112}^{M_{11}},\cdots,g_{116}^{M_{11}}\}=\{120,100,80,50,20,0\} \\ p_{m_1}^{M_1}(t)&=\{p_1^{M_1}(t),p_2^{M_1}(t),\cdots,p_6^{M_1}(t)\} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

得到$p_{m_1}^{M_1}(t)(m_1=1,2,\cdots,6)$的数值解，根据$L_Z$变换的定义，得到子系统$M_{11}$的$L_Z$变换：

$$L_z\{M_1(t)\}=L_z\{M_{11}(t)\}=\sum_{m_1=1}^{6}p_{m_1}^{M_1}(t)z^{g_{m_1}^{M_1}} \tag{20}$$

其次，对子系统M_2进行L_Z变换。M_2由M_{21}和M_{22}两个单元构成，每个单元包含5种不同的状态，$g_{2e}^{M_2}=\{g_{2e1}^{M_2},g_{2e2}^{M_2},\cdots,g_{2e5}^{M_2}\}=\{60,50,30,20,0\}$，

$e=1,2$，基于图3所示M_{21}和M_{22}的状态转移图和马尔可夫模型，对子系统2中的任意单元M_{2e}建立微分方程：

$$\boldsymbol{A}^{M_{2}}=\begin{bmatrix}-(4\lambda^{M_{2}}+\lambda^{M_{2}t}) & 4\lambda^{M_{2}} & 0 & 0 & \lambda^{M_{2}t}\\ 0 & -(3\lambda^{M_{2}}+\lambda^{M_{2}t}) & 3\lambda^{M_{2}} & 0 & \lambda^{M_{2}t}\\ 0 & 0 & -(2\lambda^{M_{2}}+\lambda^{M_{2}t}) & 2\lambda^{M_{2}} & \lambda^{M_{2}t}\\ \mu^{M_{2}} & 0 & 0 & -(\lambda^{M_{2}}+\lambda^{M_{2}t}+\mu^{M_{2}}) & \lambda^{M_{2}t}+\lambda^{M_{2}}\\ \mu^{M_{2}} & 0 & 0 & 0 & -\mu^{M_{2}}\end{bmatrix}$$

其初始条件为$p_{2eh}^{M_{2}}(0)=\{1,0,0,0,0\}$。利用MATLAB求解

$$\left.\begin{aligned}g_{2eh}^{M_{2}}&=\{g_{2e1}^{M_{2}},g_{2e2}^{M_{2}},\cdots,g_{2e5}^{M_{2}}\}=\{60,50,30,20,0\}\\ p_{2eh}^{M_{2}}(t)&=\{p_{2e1}^{M_{2}}(t),p_{2e2}^{M_{2}}(t),\cdots,p_{2e5}^{M_{2}}(t)\}\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

得到M_{21}和M_{22}在不同状态下的概率值$p_{2eh}^{M_{2}}(t)$的数值解，根据$g_{2eh}^{M_{2}}$和$p_{2eh}^{M_{2}}(t)$，则单元M_{21}和M_{22}的L_Z变换分别为

$$L_z\{M_2(t)\}=\sum_{h=1}^{5}p_{2eh}^{M_{2}}(t)z^{g_{2eh}^{M_{2}}}\tag{23}$$

根据单元M_{21}和M_{22}的变换函数，并联后可得到子系统2的L_Z变换函数：

$$L_z\{M_2(t)\}=$$
$$\Omega_{f\mathrm{par}}\{L_z\{M_{21}(t)\},L_z\{M_{22}(t)\}\}=\sum_{m_2=1}^{11}p_{m_2}^{M_{2}}(t)z^{g_{m_2}^{M_{2}}}\tag{24}$$

$$g_{m_2}^{M_{2}}=\{120,110,100,90,80,70,60,50,40,20,0\}$$
$$p_1^{M_{2}}(t)=p_{211}^{M_{2}}(t)p_{221}^{M_{2}}(t)$$
$$p_2^{M_{2}}(t)=p_{211}^{M_{2}}(t)p_{222}^{M_{2}}(t)+p_{212}^{M_{2}}(t)p_{221}^{M_{2}}(t)$$
$$p_3^{M_{2}}(t)=p_{212}^{M_{2}}(t)p_{222}^{M_{2}}(t)$$
$$p_4^{M_{2}}(t)=p_{211}^{M_{2}}(t)p_{223}^{M_{2}}(t)+p_{213}^{M_{2}}(t)p_{221}^{M_{2}}(t)$$
$$p_5^{M_{2}}(t)=p_{211}^{M_{2}}(t)p_{224}^{M_{2}}(t)+p_{214}^{M_{2}}(t)p_{221}^{M_{2}}(t)+p_{212}^{M_{2}}(t)p_{223}^{M_{2}}(t)+p_{213}^{M_{2}}(t)p_{222}^{M_{2}}(t)$$
$$p_6^{M_{2}}(t)=p_{212}^{M_{2}}(t)p_{224}^{M_{2}}(t)+p_{214}^{M_{2}}(t)p_{222}^{M_{2}}(t)$$
$$p_7^{M_{2}}(t)=p_{211}^{M_{2}}(t)p_{225}^{M_{2}}(t)+p_{215}^{M_{2}}(t)p_{221}^{M_{2}}(t)+p_{213}^{M_{2}}(t)p_{223}^{M_{2}}(t)$$
$$p_8^{M_{2}}(t)=p_{212}^{M_{2}}(t)p_{225}^{M_{2}}(t)+p_{215}^{M_{2}}(t)p_{222}^{M_{2}}(t)+p_{214}^{M_{2}}(t)p_{223}^{M_{2}}(t)+p_{213}^{M_{2}}(t)p_{224}^{M_{2}}(t)$$
$$p_9^{M_{2}}(t)=p_{214}^{M_{2}}(t)p_{224}^{M_{2}}(t)$$
$$p_{10}^{M_{2}}(t)=p_{215}^{M_{2}}(t)p_{224}^{M_{2}}(t)+p_{214}^{M_{2}}(t)p_{225}^{M_{2}}(t)$$
$$p_{11}^{M_{2}}(t)=p_{215}^{M_{2}}(t)p_{225}^{M_{2}}(t)$$

与子系统2类似，子系统3由M_{31}、M_{32}、M_{33}并联而成，首先建立单元$M_{3r}(r=1,2,3)$的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}p_{3rq}^{M_{3}}(t)}{\mathrm{d}t}=p_{3rq}^{M_{3}}(t)\cdot\boldsymbol{A}^{M_{3}}\tag{25}$$

$$\boldsymbol{A}^{M_{3}}=\begin{bmatrix}-(2\lambda^{M_{3}}+\lambda^{M_{3}t}) & 2\lambda^{M_{3}} & \lambda^{M_{3}t}\\ 0 & -(\lambda^{M_{3}}+\lambda^{M_{3}t}) & \lambda^{M_{4}}+\lambda^{M_{3}t}\\ \mu^{M_{3}} & 0 & -\mu^{M_{3}}\end{bmatrix}$$

根据初始条件利用MATLAB求解下式：

$$\left.\begin{aligned}g_{3r}^{M_{3}}&=\{g_{3r1}^{M_{3}},g_{3r2}^{M_{3}},g_{3r3}^{M_{3}}\}=\{40,30,0\}\\ p_{3r}^{M_{3}}(t)&=\{p_{3r1}^{M_{3}}(t),p_{3r2}^{M_{3}}(t),p_{3r3}^{M_{3}}(t)\}\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

得到三个单元的不同状态和概率的集合：

则单元M_{3r}的L_Z变换函数为

$$\frac{\mathrm{d}p_{2eh}^{M_{2}}(t)}{\mathrm{d}t}=p_{2eh}^{M_{2}}(t)\cdot\boldsymbol{A}^{M_{2}}\tag{21}$$
$$p_{2eh}^{M_{2}}(t)=\{p_{2e1}^{M_{2}}(t),p_{2e2}^{M_{2}}(t),\cdots,p_{2e5}^{M_{2}}(t)\}$$

$$L_z\{M_{3r}(t)\}=\sum_{q=1}^{3}p_{3rq}^{M_{3}}(t)z^{g_{3rq}^{M_{3}}}\tag{27}$$

然后利用并联算子，得到子系统3的L_Z变换函数：

$$L_z\{M_3(t)\}=\Omega_{f\mathrm{par}}\{L_z\{M_{31}(t)\},L_z\{M_{32}(t)\},$$
$$L_z\{M_{33}(t)\}\}=\sum_{m_3=1}^{10}p_{m_3}^{M_{3}}(t)z^{g_{m_3}^{M_{3}}}\tag{28}$$

$$g_{m_3}^{M_{3}}=\{120,110,100,90,80,70,60,40,30,0\}$$
$$p_1^{M_{3}}(t)=p_{311}^{M_{3}}(t)p_{321}^{M_{3}}(t)p_{331}^{M_{3}}(t)$$
$$p_2^{M_{3}}(t)=p_{311}^{M_{3}}(t)p_{321}^{M_{3}}(t)p_{332}^{M_{3}}(t)+p_{312}^{M_{3}}(t)p_{321}^{M_{3}}(t)p_{331}^{M_{3}}(t)+p_{311}^{M_{3}}(t)p_{322}^{M_{3}}(t)p_{331}^{M_{3}}(t)$$
$$p_3^{M_{3}}(t)=p_{311}^{M_{3}}(t)p_{322}^{M_{3}}(t)p_{332}^{M_{3}}(t)+p_{312}^{M_{3}}(t)p_{322}^{M_{3}}(t)p_{331}^{M_{3}}(t)+p_{312}^{M_{3}}(t)p_{321}^{M_{3}}(t)p_{332}^{M_{3}}(t)$$
$$p_4^{M_{3}}(t)=p_{312}^{M_{3}}(t)p_{322}^{M_{3}}(t)p_{332}^{M_{3}}(t)$$
$$p_5^{M_{3}}(t)=p_{311}^{M_{3}}(t)p_{321}^{M_{3}}(t)p_{333}^{M_{3}}(t)+p_{311}^{M_{3}}(t)p_{323}^{M_{3}}(t)p_{331}^{M_{3}}(t)+p_{313}^{M_{3}}(t)p_{321}^{M_{3}}(t)p_{331}^{M_{3}}(t)$$
$$p_6^{M_{3}}(t)=p_{311}^{M_{3}}(t)p_{322}^{M_{3}}(t)p_{333}^{M_{3}}(t)+p_{312}^{M_{3}}(t)p_{321}^{M_{3}}(t)p_{333}^{M_{3}}(t)+p_{313}^{M_{3}}(t)p_{321}^{M_{3}}(t)p_{332}^{M_{3}}(t)+p_{313}^{M_{3}}(t)p_{322}^{M_{3}}(t)p_{331}^{M_{3}}(t)+p_{311}^{M_{3}}(t)p_{323}^{M_{3}}(t)p_{332}^{M_{3}}(t)+p_{312}^{M_{3}}(t)p_{323}^{M_{3}}(t)p_{331}^{M_{3}}(t)$$
$$p_7^{M_{3}}(t)=p_{312}^{M_{3}}(t)p_{322}^{M_{3}}(t)p_{333}^{M_{3}}(t)+p_{313}^{M_{3}}(t)p_{322}^{M_{3}}(t)p_{332}^{M_{3}}(t)+p_{312}^{M_{3}}(t)p_{323}^{M_{3}}(t)p_{332}^{M_{3}}(t)$$
$$p_8^{M_{3}}(t)=p_{311}^{M_{3}}(t)p_{323}^{M_{3}}(t)p_{333}^{M_{3}}(t)+p_{313}^{M_{3}}(t)p_{321}^{M_{3}}(t)p_{333}^{M_{3}}(t)+p_{313}^{M_{3}}(t)p_{323}^{M_{3}}(t)p_{331}^{M_{3}}(t)$$
$$p_9^{M_{3}}(t)=p_{312}^{M_{3}}(t)p_{323}^{M_{3}}(t)p_{333}^{M_{3}}(t)+p_{313}^{M_{3}}(t)p_{322}^{M_{3}}(t)p_{333}^{M_{3}}(t)+p_{313}^{M_{3}}(t)p_{323}^{M_{3}}(t)p_{332}^{M_{3}}(t)$$
$$p_{10}^{M_{3}}(t)=p_{313}^{M_{3}}(t)p_{323}^{M_{3}}(t)p_{333}^{M_{3}}(t)$$

子系统4的L_Z变换同子系统2、3一样，通过建立类似的微分方程，根据初始条件求解方程组，得到各状态的概率值从而得到其L_Z变换：

$$L_z\{M_4(t)\}=\sum_{m_4=1}^{7}p_{m_4}^{M_{4}}(t)z^{g_{m_4}^{M_{4}}}\tag{29}$$

$$g_{m_4}^{M_{4}}=\{120,100,80,60,40,20,0\}$$
$$p_1^{M_{4}}(t)=p_{411}^{M_{4}}(t)p_{421}^{M_{4}}(t)$$
$$p_2^{M_{4}}(t)=p_{411}^{M_{4}}(t)p_{422}^{M_{4}}(t)+p_{412}^{M_{4}}(t)p_{421}^{M_{4}}(t)$$
$$p_3^{M_{4}}(t)=p_{411}^{M_{4}}(t)p_{423}^{M_{4}}(t)+p_{413}^{M_{4}}(t)p_{421}^{M_{4}}(t)+p_{412}^{M_{4}}(t)p_{422}^{M_{4}}(t)$$
$$p_4^{M_{4}}(t)=p_{411}^{M_{4}}(t)p_{424}^{M_{4}}(t)+p_{414}^{M_{4}}(t)p_{421}^{M_{4}}(t)+p_{412}^{M_{4}}(t)p_{423}^{M_{4}}(t)+p_{413}^{M_{4}}(t)p_{422}^{M_{4}}(t)$$
$$p_5^{M_{4}}(t)=p_{412}^{M_{4}}(t)p_{424}^{M_{4}}(t)+p_{414}^{M_{4}}(t)p_{422}^{M_{4}}(t)+p_{413}^{M_{4}}(t)p_{423}^{M_{4}}(t)$$
$$p_6^{M_{4}}(t)=p_{413}^{M_{4}}(t)p_{424}^{M_{4}}(t)+p_{414}^{M_{4}}(t)p_{423}^{M_{4}}(t)$$
$$p_7^{M_{4}}(t)=p_{414}^{M_{4}}(t)p_{424}^{M_{4}}(t)$$

求出主轴承孔制造系统的子系统1～4的L_Z变换之后，利用串联算子，即可得到整个系统的L_Z变换：

$$L_z\{M_s(t)\}=\Omega_{f\mathrm{ser}}\{L_z\{M_1(t)\},L_z\{M_2(t)\},$$
$$L_z\{M_3(t)\},L_z\{M_4(t)\}\}=\Omega_{f\mathrm{ser}}\{\sum_{m_1=1}^{6}p_{m_1}^{M_{11}}(t)g_{m_1}^{M_{11}},$$
$$\sum_{m_2=1}^{11}p_{m_2}^{M_2}(t)z^{g_{m_2}^{M_2}},\ \sum_{m_3=1}^{10}p_{m_3}^{M_3}(t)z^{g_{m_3}^{M_3}},\ \sum_{m_4=1}^{7}p_{m_4}^{M_4}(t)z^{g_{m_4}^{M_4}}\}\quad(30)$$

$$L_z\{M_s(t)\}=\sum_{m_s=1}^{12}p_{m_s}^{M_s}(t)z^{g_{m_s}^{M_s}}\quad(31)$$

$$g_{m_s}^{M_s}=\{120,110,100,90,80,70,60,50,40,30,20,0\}$$
$$p_1^{M_s}(t)=p_1^{M_1}(t)p_1^{M_2}(t)p_1^{M_3}(t)p_1^{M_4}(t)$$
$$p_2^{M_s}(t)=p_1^{M_1}(t)p_2^{M_2}(t)p_1^{M_3}(t)p_1^{M_4}(t)+$$
$$p_1^{M_1}(t)p_1^{M_2}(t)p_2^{M_3}(t)p_1^{M_4}(t)+p_1^{M_1}(t)p_2^{M_2}(t)p_2^{M_3}(t)p_1^{M_4}(t)$$
$$\vdots$$
$$p_{m_s}^{M_s}(t)=$$
$$\sum_{g_{m_1}^{M_1}=g_{m_s}^{M_s}}p_{m_1}^{M_1}(t)\sum_{g_{m_2}^{M_2}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_2}^{M_2}(t)\sum_{g_{m_3}^{M_3}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_3}^{M_3}(t)\sum_{g_{m_4}^{M_4}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_4}^{M_4}(t)+$$
$$\sum_{g_{m_1}^{M_1}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_1}^{M_1}(t)\sum_{g_{m_2}^{M_2}=g_{m_s}^{M_s}}p_{m_2}^{M_2}(t)\sum_{g_{m_3}^{M_3}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_3}^{M_3}(t)\sum_{g_{m_4}^{M_4}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_4}^{M_4}(t)+$$
$$\sum_{g_{m_1}^{M_1}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_1}^{M_1}(t)\sum_{g_{m_2}^{M_2}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_2}^{M_2}(t)\sum_{g_{m_3}^{M_3}=g_{m_s}^{M_s}}p_{m_3}^{M_3}(t)\sum_{g_{m_4}^{M_4}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_4}^{M_4}(t)+$$
$$\sum_{g_{m_1}^{M_1}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_1}^{M_1}(t)\sum_{g_{m_2}^{M_2}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_2}^{M_2}(t)\sum_{g_{m_3}^{M_3}\geqslant g_{m_s}^{M_s}}p_{m_3}^{M_3}(t)\sum_{g_{m_4}^{M_4}=g_{m_s}^{M_s}}p_{m_4}^{M_4}(t)$$

3.2 系统脆弱性动态演化

多状态系统脆弱性在内外干扰下系统性能状态的动态变化是系统的固有属性在内外干扰下的综合反映。在内外干扰作用下，系统的状态变化与性能的动态响应决定着系统脆弱性的动态特征。针对多状态系统动态脆弱性研究中难以量化评估的难题，从系统可靠性原理的角度出发，利用系统性能中的动态可靠性指标的变化衡量系统脆弱性的动态演化，动态可靠性指标有可用度、输出期望平均值和性能缺陷等，下面分别用这些指标的动态变化衡量系统脆弱性的动态演化。

3.2.1 基于可用度指标的脆弱性动态演化

基于可靠性原理和主轴承孔制造系统的L_Z变换函数，正常工作时系统的可用度为

$$A_0(t)=\sum_{g_{d_s}\geqslant 0}p_{d_s}^{D_s}(t)=\sum_{d_s=1}^{12}p_{d_s}^{D_s}(t)z^{g_{d_s}}$$

主轴承孔制造系统在内外干扰因素作用下性能发生变化，系统输出状态有多种可能，将可用度的期望平均值$\bar{A}_{\omega'}(t)$作为系统性能下降后的可用度值，即

$$\bar{A}_{\omega'}(t)=\sum_{d_s=1}^{12}p_{d_s}^{D_s}(t)A_{g_{d_s}}^{s}(t)$$

根据脆弱性动态演化计算公式(17)，基于可用度的动态脆弱性为

$$V_{D_s}^{A}[S,F]=1-\sum_{d_s=1}^{12}p_{d_s}^{D_s}(t)A_{g_{d_s}}^{s}(t)/\sum_{d_s=1}^{12}p_{d_s}^{D_s}(t)z^{g_{d_s}}$$

图3中，蓝色曲线为主轴承孔加工系统脆弱性动态演化曲线，小方框为系统正常状态和脆弱状态下的可用度曲线。显然，系统可用度随着时间的推移逐渐下降，在脆弱状态时下降较快，系统脆弱性随着时间的推移逐渐加大，经过4.25 y，系统的脆弱性达到0.5，即中等脆弱程度，通常情况下，中等脆弱程度就需要停止生产并对系统设备进行全面检修，以防意外事故的发生。

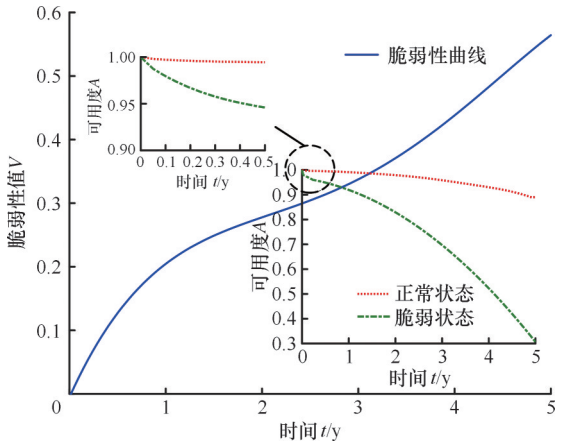


图3 基于可用度的主轴承孔加工系统脆弱性演化曲线

Fig.3 Availability-based vulnerability evolution curves of main bearing bore machining system

3.2.2 基于输出期望平均值的脆弱性动态演化

同理，主轴承孔加工系统正常状态下的性能输出期望平均值$\bar{G}_{D_s}(t)$为

$$\bar{G}_{D_s}(t)=\sum_{d_s=1}^{12}g_{d_s}p_{d_s}^{D_s}(t)=120p_1^{D_s}(t)+110p_2^{D_s}(t)+$$
$$100p_3^{D_s}(t)+90p_4^{D_s}(t)+80p_5^{D_s}(t)+70p_6^{D_s}(t)+60p_7^{D_s}(t)+$$
$$50p_8^{D_s}(t)+40p_9^{D_s}(t)+30p_{10}^{D_s}(t)+20p_{12}^{D_s}(t)+0\times p_{11}^{D_s}(t)$$

系统在内外扰动后处于脆弱状态时的性能输出期望值$\bar{G}_{D_{s'}}(t)$为

$$\bar{G}_{D_{s'}}(t)=110p_2'(t)+100p_3'(t)+90p_4'(t)+$$
$$80p_5'(t)+70p_6'(t)+60p_7'(t)+50p_8'(t)+40p_9'(t)+$$
$$30p_{10}'(t)+20p_{12}'(t)+0\times p_{11}'(t)$$

其中，$p_{d_s}'(t)$为系统脆弱状态下各状态的概率。则基于输出期望值性能指标变化的主轴承孔制造系统脆弱性动态演化规律为

$$V_{D_s}^{G}[S,F]=1-\sum_{d_s=2}^{12}g_{d_s}p_{d_s}'(t)/\sum_{d_s=1}^{12}g_{d_s}p_{d_s}^{D_s}(t)$$

图4所示为该主轴承孔加工系统的脆弱性演化曲线，小方框为系统的输出期望变化曲线。可以看出，系统脆弱性在$t\in[0,1.45]$和$t\in[3.25,5]$两个阶段，脆弱性上升速度较快，在中间区段$t\in[1.45,3.25]$的脆弱性变化相对较为平缓。同时，由小方框中的系统输出期望变化曲线可知，如

果不考虑维护情况，系统的输出量随着时间的推移逐渐下降，但降幅很小，是一个比较平缓的逐步下降过程。而当系统受到故意干扰或破坏时，系统的输出期望下降明显。两者对比可发现，不同状态下输出期望值的变化能反映系统脆弱性的动态演化。

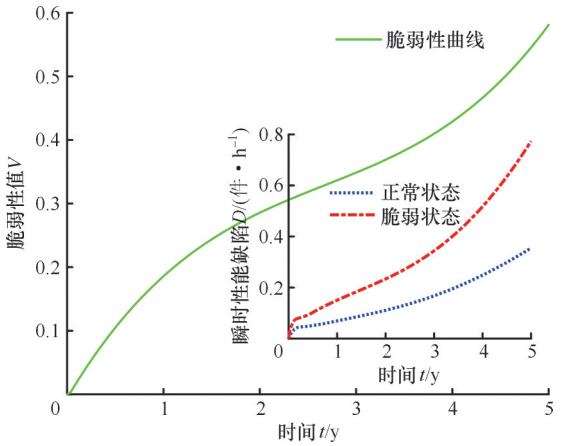


图4　基于性能输出期望平均值变化的脆弱性演化曲线

Fig.4　Vulnerability evolution curves based on the variation of the expected average performance output

3.2.3　基于性能缺陷变化的脆弱性动态演化

同理，基于主轴承孔加工系统的L_Z变换，系统正常状态下的性能缺陷为

$$D_{120}^{D_s}(t)=\sum_{d_s=1}^{12}p_{d_s}^{D_s}(t)\,max\{\omega-g_{d_s},0\}=10p_2^{D_s}(t)+20p_3^{D_s}(t)+30p_4^{D_s}(t)+40p_5^{D_s}(t)+50p_6^{D_s}(t)+60p_7^{D_s}(t)+70p_8^{D_s}(t)+80p_9^{D_s}(t)+90p_{10}^{D_s}(t)+100p_{11}^{D_s}(t)+120p_{12}^{D_s}(t)$$

脆弱状态的性能缺陷值为各种状态下的期望值，即

$$\bar{D}_{\omega}^{D_s}(t)=\sum_{d_s=1}^{12}p_{d_s}^{D_s}(t)D_{\omega=g_{d_s}}^{D_s}=\frac{1}{12}10p_2^{D_s}(t)+\frac{2}{12}20p_3^{D_s}(t)+\frac{3}{12}30p_4^{D_s}(t)+\frac{4}{12}40p_5^{D_s}(t)+\frac{5}{12}50p_6^{D_s}(t)+\frac{6}{12}60p_7^{D_s}(t)+\frac{7}{12}70p_8^{D_s}(t)+\frac{8}{12}80p_9^{D_s}(t)+\frac{9}{12}90p_{10}^{D_s}(t)+\frac{10}{12}100p_{11}^{D_s}(t)+\frac{11}{12}120p_{12}^{D_s}(t)$$

代入前述脆弱性计算公式(17)，得到基于性能缺陷的系统脆弱性：

$$V_{D_s}^{D}[S,F]=1-\frac{\bar{\omega}-\bar{D}_{\omega}^{D_s}(t)}{\omega_0-D_{120}^{D_s}(t)}$$

图5所示为基于瞬时性能缺陷变化指标的主轴承孔加工系统的脆弱性动态演化曲线。可以看出，在开始阶段的系统脆弱性上升较快，然后进入一个缓慢上升期，t=3.55以后上升速度再次加快，系统的动态脆弱性演化趋势随着时间的推移而不断加大。这主要是因为在开始阶段，系统磨合不够，性能稳定性没有达到最佳状态，由此脆弱性上升幅度大，而在后期阶段，因为设备老化、陈旧，导致系统性能稳定性下降，脆弱性上升。此外，从小框中系统瞬时性能缺陷$D_{\omega}^{D_s}(t)$变化曲线也可以看出，两种状态下的$D_{\omega}^{D_s}(t)$均随着时间的推移逐渐上升，正常状态下时上升比较平缓、幅度较小，脆弱状态下的$D_{\omega}^{D_s}(t)$上升明显，系统偏离正常运行的可能性变大，与脆弱性逐渐上升的动态演化情况相符。

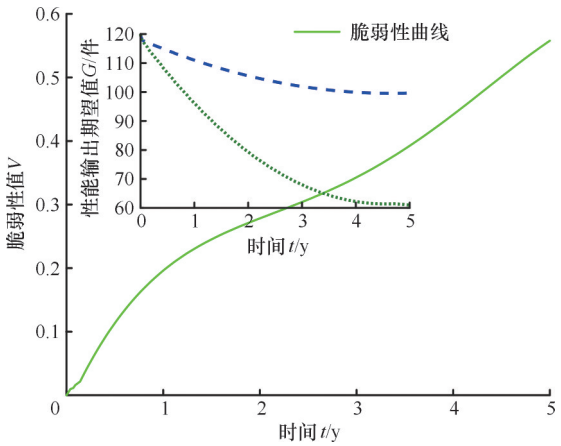


图5　基于瞬时性能缺陷变化的脆弱性演化曲线

Fig.5　Vulnerability evolution curves based on the variation of instantaneous performance defects

4　结论与讨论

本文提出一种基于性能指标变化的多状态系统动态脆弱性评估方法，建立了多状态系统状态转移方程，为实现脆弱性的动态演化建立系统动态变化模式下的L_Z变换函数，构建了基于性能指标动态变化的评估模型分析脆弱性动态演化规律，运用该方法对主轴承孔制造系统进行了脆弱性仿真分析，验证了在脆弱性量化评估中利用系统性能指标变化进行动态演化分析的可行性，以及考虑多种性能指标变化的合理性，通过与现有方法进行对比，验证了所提脆弱性评估方法的有效性和优势，为多状态系统脆弱性的精细化评价与系统健康维护与管理提供了有效的方法支撑。

相比脆弱性的传统静态评估方法，动态演化分析法可以解决多状态系统性能参数变化的情况，这是本文方法的优势所在。传统静态脆弱性分析方法与本文动态演化分析法的优缺点对比如表2所示。动态演化法受到脆弱性评价指标的影响较大，在实际应用中，多状态系统的“正常/故障”边界模糊，可靠性指标的获取和计算都较为困难，例如可用度计算时的状态界定、时间统计，性能输出的量化、性能数据获取等都较为困难，多状态系统的性能与可用度是“组件-子系统-系统”的

耦合结果，多状态系统的性能输出是也有可能是多维、非数值化的，难以统一转化为可计算的指标，以上难点限制了该方法的工程应用推广。此外，本文仅考虑了部分动态可靠性指标，没有考虑系统的生产率、设备利用率等性能指标，这些指标在系统扰动下的变化趋势也值得深入研究。

表2 与传统静态分析方法的对比

Tab.2 Comparison with traditional static analysis methods

	状态熵法	复杂网络法	通用生成函数法	动态演化法
基本原理	基于信息熵原理计算系统各种状态下的脆性熵，以度量系统脆弱性	通过建立系统的复杂网络模型，然后利用复杂网络的性能变化度量系统脆弱性	根据系统的结构特征和UGF原理得到系统通用生成函数，基于脆性熵建立脆弱性评价模型	求解系统的L_Z变换函数，以可靠性指标为评价因子建立脆弱性评价模型
优缺点	原理简单，操作方便，但计算量大，遇到系统状态较多产生状态组合爆炸时该方法无效	结构脆弱性计算容易，但功能脆弱性计算时节点的业务统计容易产生偏差，结果误差较大，且复杂网络模型构造困难	计算量相对状态熵方法小，求解效率较高，可以解决系统状态组合爆炸问题。但系统的通用生成函数求解较困难，且脆弱性的计算误差较大	可以解决系统性能参数实时变化情况下的系统脆弱性问题，但系统的性能评价指标会影响脆弱性评价结果的精度
适用场合	适用于系统状态数不多且状态已知的情况	适用于节点业务易于统计、系统复杂网络模型容易构建的情况	只适用于状态已知的系统，对性能参数变化的系统无法求解	适用于可靠性指标易于计算的各种场合

脆弱性是系统的固有属性，其形成与系统结构、内外干扰等因素有关，本文虽然以可靠性的相关指标得到了多状态系统脆弱性动态演化曲线，但对其单元之间可能存在的故障传播与连锁效应等缺乏深入分析，因此，如何衡量设备、单元和子系统间的脆弱性关联，掌握它们之间的脆弱性传递规律也是后续研究中急需解决的问题。脆弱性的传递规律研究可采用基于性能评价进程代数形式化语言知识对多状态系统脆弱性的扩散过程进行描述和分析，建立脆弱性扩散的相关语义表达方式、设计相关的语义规则等，对多状态系统的单元内节点故障传播，单元间风险传播，单元间状态迁移等脆弱性扩散现象建立不同的扩散模型，分析其传播速度、传播规则与传播路径等。设计脆弱性峰值指数、脆弱性稳态指数等评价指标，对系统的脆弱性扩散机理进行仿真分析。

参考文献：

[1] HU Gengshuo, PAN Xing, JIAO Jian. Resilience Modeling and Evaluation of Multi-state System with Common Bus Performance Sharing under Dynamic Reconfiguration [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2025, 260 (C): 111040

[2] JIA Heping, LU He, PENG Rui, et al. Dynamic Reliability Evaluation of Multi-performance Sharing and Multi-state Systems with Interdependence[J]. Computers & Industrial Engineering, 2025, 202: 110965.

[3] 王鹏，于永利，李星新，等. 多状态系统测试建模与测试点选取方法[J]. 哈尔滨工业大学学报，2022，54(6)：54-62.
WANG Peng, YU Yongli, LI Xingxin, et al. Multi-state System Test Modeling and Test Point Selection Method [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2022, 54 (6): 54-62.

[4] CHEN Mengyuan, LIU Jilan, ZHANG Ning, et al. Vulnerability Analysis Method Based on Network and Copula Entropy[J]. Entropy, 2024, 26(3): 192.

[5] GAO Guibing, YUE Wenhui, OU Wenchu, et al. Vulnerability Evaluation Method Applied to Manufacturing Systems[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2018, 180: 255-265.

[6] CARDINALE I. Vulnerability, Resilience and "Systemic Interest": a Connectivity Approach[J]. Networks and Spatial Economics, 2022, 22(3): 691-707.

[7] CAPOCCHI A. Vulnerability and the Corporate Immune System: an Integrated and Systemic Approach to Risk Management [M]. Cham: Springer International Publishing, 2023.

[8] 张旺勋，李群，王维平，等. 复杂系统脆弱性综合分析方法[J]. 国防科技大学学报，2016，38(2)：150-155.
ZHANG Wangxun, LI Qun, WANG Weiping, et al. Comprehensive Analysis Method for Vulnerability of Complex Systems[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2016, 38(2): 150-155.

[9] DENG Yongliang, LI Qiming, LU Ying, et al. Topology Vulnerability Analysis and Measure of Urban Metro Network: the Case of Nanjing[J]. Journal of Networks, 2013, 8(6): 1350-1356..

[10] 李欣格. 5G工业信息物理系统脆弱性分析方法研究[D]. 武汉：华中科技大学，2023.
LI Xinge. On the Research of Vulnerability Analysis for 5G Industrial Cyber Physical Systems [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2023.

[11] 高贵兵，岳文辉，王峰. 考虑性能参数变化的混流制造系统脆弱性评估方法[J]. 机械工程学报，2019，55(18)：215-224.
GAO Guibing, YUE Wenhui, WANG Feng. Vulnerability Assessment Method for Mixed-flow Manufacturing System with Time-varying Performance Parameters[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(18): 215-224.

[12] MAO Congguang, CANAVERO F G, CUI Zhitong, et al. System-level Vulnerability Assessment for EME: from Fault Tree Analysis to Bayesian Networks: Part II: Illustration to Microcontroller System[J]. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 2016, 58(1): 188-196.

[13] ZIO E, FERRARIO E. A Framework for the System-of-systems Analysis of the Risk for a Safety-critical Plant Exposed to External Events[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2013, 114(C): 114-125.

[14] WANG Shuliang, HONG Liu, OUYANG Min, et al. Vulnerability Analysis of Interdependent Infrastructure Systems under Edge Attack Strategies [J]. Safety Science, 2013, 51(1): 328-337

（下转第2917页）.