doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023548

Gorenstein 强 FP-内射模

方慧江，杨 刚
（兰州交通大学 数理学院，兰州 730070）

摘要： 首先，借助内射模的零调复形和 Hom 函子的理论，引入 Gorenstein 强 FP-内射模的概念. 其次，利用马蹄引理和构造拉回图的方法，研究 Gorenstein 强 FP-内射模的同调性质，证明 Gorenstein 强 FP-内射模类 $\mathcal{GSFI}$ 是内射可解类，关于直积及直和项封闭，并且如果任意 R-模的 Gorenstein 强 FP-内射维数有限，则 $({}^{\perp}\mathcal{GSFI},\mathcal{GSFI})$ 构成完全遗传的余挠对.

关键词： 强 FP-内射模；Gorenstein 强 FP-内射模；余挠对
中图分类号： O154.2 **文献标志码：** A **文章编号：** 1671-5489(2024)05-1079-06

Gorenstein Strongly FP-Injective Modules

FANG Huijiang, YANG Gang
(*School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: Firstly, we introduce the notion of Gorenstein strongly FP-injective modules by means of acyclic complexes of injective modules and the theory of Hom functors. Secondly, we study homological properties of Gorenstein strongly FP-injective modules by using the Horseshoe Lemma and the method of constructing pull-back diagrams, and prove that the class $\mathcal{GSFI}$ of Gorenstein strongly FP-injective modules is injectively resolving, with respect to closed under arbitrary direct products and direct summands, and if the Gorenstein strongly FP-injective dimension is finite for every R-module, then $({}^{\perp}\mathcal{GSFI}, \mathcal{GSFI})$ forms a complete hereditary cotorsion pair.

Keywords: strongly FP-injective module; Gorenstein strongly FP-injective module; cotorsion pair

1 引言及预备知识

Auslander 等[1]研究 Noether 环上的有限生成模时，引入了 G-维数为 0 的模，并由此给出了 Gorenstein 局部环的等价刻画. Enochs 等[2]推广了文献[1]的理论，在任意环上引入了 Gorenstein 投射、Gorenstein 内射和 Gorenstein 平坦模的概念，并研究了上述 3 种 Gorenstein 同调模的一些性质. Holm[3]改进了文献[2]的结果，在一般结合环上研究了模的 3 种 Gorenstein 同调维数. 基于对 Gorenstein 内射模的研究，Mao 等[4]定义了 Gorenstein FP-内射模，并研究了凝聚环上的 Gorenstein FP-内射模的同调性质. Selvaraj 等[5]定义了 Gorenstein n-平坦模和 Gorenstein n-FP-内射模，并研究了它们的关系. Li 等[6]基于 FP-内射模的研究，引入并刻画了强 FP-内射模. Xing 等[7]研究了 Gorenstein FP_∞-内射模的同调性质. 受上述研究成果的启发，本文对 Gorenstein FP-内射模进行推广，研究 Gorenstein 强 FP-内射模及其相关性质. 本文所有的环 R 均指有单位元的非零结合环，所有的

收稿日期： 2023-12-26.

第一作者简介： 方慧江(2000—)，女，汉族，硕士研究生，从事环的同调理论的研究，E-mail：fhuijiang@163.com. **通信作者简介：** 杨 刚(1980—)，男，汉族，博士，教授，从事环的同调理论的研究，E-mail：yanggang@mail.lzjtu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金(批准号：12161049).

R-模均指左R-模.

令$\mathscr{A}$是由R-模构成的类. 记

$$\mathscr{A}^{\perp}=\{B\mid \text{对任意}A\in\mathscr{A}\text{有 }\mathrm{Ext}_R^1(A,B)=0\};$$

$$^{\perp}\mathscr{A}=\{B\mid \text{对任意}A\in\mathscr{A}\text{有 }\mathrm{Ext}_R^1(B,A)=0\}.$$

如果$\mathscr{A}^{\perp}=\mathscr{B}$且$^{\perp}\mathscr{B}=\mathscr{A}$, 则称$R$-模的类构成的对$(\mathscr{A},\mathscr{B})$是余挠对. 如果对任意正合序列$0\to X'\to X\to X''\to 0$(其中$X',X\in\mathscr{A}$), 有$X''\in\mathscr{A}$, 则称余挠对$(\mathscr{A},\mathscr{B})$是遗传的. 如果$A\in\mathscr{A}$且$C\in{}^{\perp}\mathscr{A}$, 则称$R$-模的正合列$0\to X\to A\to C\to 0$是$X$的特殊的$\mathscr{A}$-预包络. 如果任意$R$-模都有特殊的$\mathscr{B}$-预包络, 则称余挠对$(\mathscr{A},\mathscr{B})$是完全的.

定义 1[6] 设M是R-模, 如果对任意的有限表示R-模P及任意的$i\geqslant 1$, 都有$\mathrm{Ext}_R^i(P,M)=0$, 则称R-模M是强FP-内射模.

下面用$\mathscr{SFI}$表示强FP-内射模构成的类.

定义 2[8] 设n是非负整数, 用$\text{SFP-id}_R(M)$表示M的强FP-内射维数. 如果存在正合列

$$0\to M\to G^0\to G^1\to\cdots\to G^n\to 0, \tag{1}$$

其中每个G^i是强FP-内射模, 则称R-模M的强FP-内射维数小于等于n, 记作$\text{SFP-id}_R(M)\leqslant n$. 如果上述有限序列不存在, 则称$\text{SFP-id}_R(M)=\infty$. 特别地, 若$n$是满足上述条件的最小整数, 则记$\text{SFP-id}_R(M)=n$.

2 Gorenstein 强 FP-内射模

定义 3 设M是R-模, 如果存在内射R-模的正合列

$$\mathbf{E}=:\cdots\to E_2\xrightarrow{d_2}E_1\xrightarrow{d_1}E_0\xrightarrow{d_0}E_{-1}\to\cdots \tag{2}$$

使得$M\cong\mathrm{Im}(E_0\to E_{-1})$, 并且对任意的强FP-内射模$E$, 函子$\mathrm{Hom}_R(E,-)$作用上述序列后仍正合, 则称$R$-模$M$是Gorenstein 强FP-内射模.

下面用$\mathscr{GSFI}$表示Gorenstein 强FP-内射模构成的类.

注 1 由Gorenstein 强FP-内射模的定义易见:

1) 内射模⇒Gorenstein FP-内射模⇒Gorenstein 强FP-内射模⇒Gorenstein 内射模;

2) 若正合序列(2)中, 满足对任意的强FP-内射模H, 用函子$\mathrm{Hom}_R(H,-)$作用$\mathbf{E}$后仍正合, 则对任意的$i\in\mathbb{Z}$, 有$\mathrm{Ker}\,d_i=\mathrm{Im}\,d_{i+1}$都是Gorenstein 强FP-内射模.

定义 4 设n是非负整数, 用$\text{G-SFP-id}_R(M)$表示M的Gorenstein 强FP-内射维数. 如果存在正合列(1), 其中G^i是Gorenstein 强FP-内射模, $i=0,1,2,\cdots,n$, 则称R-模M的Gorenstein 强FP-内射维数小于等于n, 记作$\text{G-SFP-id}_R(M)\leqslant n$. 如果上述有限序列不存在, 则称$\text{G-SFP-id}_R(M)=\infty$. 特别地, 若$n$是满足上述条件的最小整数, 则记$\text{G-SFP-id}_R(M)=n$.

引理 1 设M是Gorenstein 强FP-内射R-模, N是R-模. 若$\text{SFP-id}_R(N)<\infty$, 则对任意的$i\geqslant 1$, 有$\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$.

证明: 设$\text{SFP-id}_R(N)=n$. 若$n=0$, 则N是强FP-内射模, 显然有$\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$, $\forall\, i\geqslant 1$. 若$n>0$, 则由定义2知, 存在正合列$0\to N\to N^0\to N^1\to\cdots\to N^n\to 0$, 其中$N^i$是强FP-内射模. 取$C^m=\mathrm{Ker}(N^m\to N^{m+1})$, $m=0,1,2,\cdots,n-1$. 由维数转移得

$$\mathrm{Ext}_R^i(N,M)\cong\mathrm{Ext}_R^{i+1}(C^1,M)\cong\cdots\cong\mathrm{Ext}_R^{i+n}(N^n,M),$$

由于N^n是强FP-内射模, 所以对于Gorenstein 强FP-内射模M以及任意的$i\geqslant 1$, 有$\mathrm{Ext}_R^{i+n}(N^n,M)=0$. 于是$\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$, $\forall\, i\geqslant 1$.

引理 2 对任意的R-模M, 下列叙述等价:

1) M是Gorenstein 强FP-内射模;

2) 存在短正合列

$$0\to C\to E\to M\to 0, \tag{3}$$

使得 E 是内射模，C 是 Gorenstein 强 FP-内射模；

3) 存在正合序列

$$\cdots \to E_2 \to E_1 \to E_0 \to M \to 0, \tag{4}$$

对任意的 $i\geqslant 0$，E_i 是内射模，使得对任意的 $N\in \mathscr{FFI}$，函子 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$作用上述序列后仍正合，且 $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(N,M)=0$.

证明：1)⇒2)显然.

2)⇒3). 考虑短正合列(3). 由定义 3 知，对任意的 $N\in \mathscr{FFI}$及任意的 $i\geqslant 1$，均有 $\mathrm{Ext}_R^i(N,C)=0$. 于是函子 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$作用短正合列(3)后仍正合，且有正合序列

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_R^i(N,E) \to \mathrm{Ext}_R^i(N,M) \to \mathrm{Ext}_R^{i+1}(N,C) \to \cdots,$$

故 $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$. 而 C 是 Gorenstein 强 FP-内射模，由定义 3 可知，存在正合列

$$\mathbf{E}_1 =: \cdots \to E_2 \to E_1 \to C \to 0,$$

使得 $\mathrm{Hom}_R(N,\mathbf{E}_1)$正合，其中每个 E_i 是内射模. 于是函子 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$作用序列(4)后仍正合，结论得证.

3)⇒1). 考虑 M 的内射分解

$$\mathbf{E}_2 =: 0 \to M \to E_{-1} \to E_{-2} \to E_{-3} \to \cdots.$$

对任意的 $N\in \mathscr{FFI}$及任意的 $i\geqslant 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$，所以 $\mathrm{Hom}_R(N,\mathbf{E}_2)$正合.

因此函子 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$作用序列(2)后仍正合，且 $M\cong \mathrm{Im}(E_0\to E_1)$，从而 M 是 Gorenstein 强 FP-内射模.

定理 1　设 $0\to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C\to 0$ 是 R-模的短正合列.

1) 若 A,C 是 Gorenstein 强 FP-内射模，则 B 也是 Gorenstein 强 FP-内射模；

2) 若 A,B 是 Gorenstein 强 FP-内射模，则 C 也是 Gorenstein 强 FP-内射模.

证明：1) 因为 A,C 是 Gorenstein 强 FP-内射模，所以由引理 2 知存在下列两个短正合列：

$$0 \to A_1 \to E_0 \xrightarrow{\alpha} A \to 0,$$

$$0 \to C_1 \to U_0 \xrightarrow{\gamma} C \to 0,$$

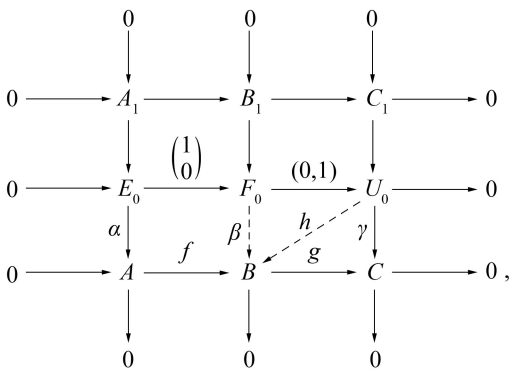
其中 E_0,U_0 是内射模，A_1,C_1 是 Gorenstein 强 FP-内射模. 令 $F_0=E_0\oplus U_0$，则 $F_0\in \mathscr{I}$，其中 $\mathscr{I}$是内射模类. 由定义 3 知 $\mathrm{Ext}_R^1(U_0,A)=0$，即有正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(U_0,A) \to \mathrm{Hom}_R(U_0,B) \to \mathrm{Hom}_R(U_0,C) \to 0.$$

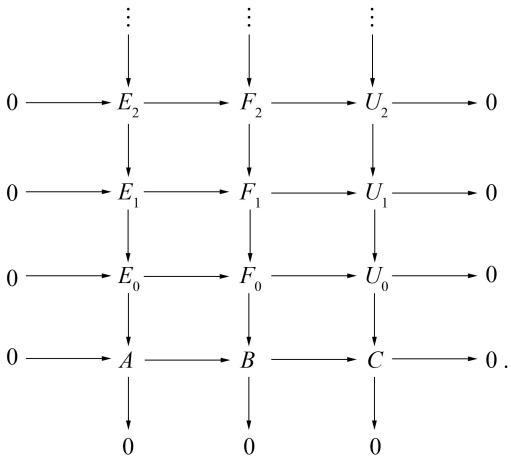
从而存在态射 $h: U_0\to B$，使得 $gh=\gamma$. 定义态射

$$\beta: F_0 \to B \text{ via} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\alpha(x)+h(y),$$

其中 $x\in E_0$，$y\in U_0$，则有 $f\alpha=\beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，且 $g\beta=\gamma(0,1)$. 进而可得如下行和列均正合的交换图：



其中 $B_1=\mathrm{Ker}(\beta)$. 在正合列 $0\to A_1\to B_1\to C_1\to 0$ 中，A_1 和 C_1 是 Gorenstein 强 FP-内射模，于是重复以上步骤，可得如下行和列均正合的交换图：

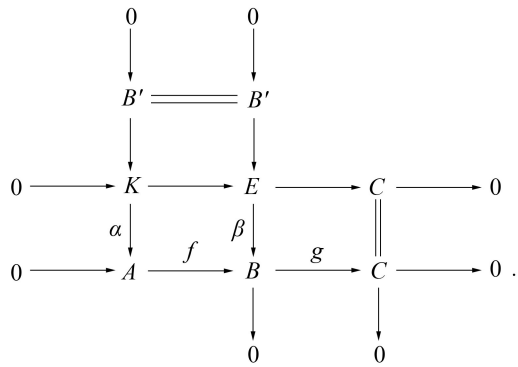


对任意的 $m\geqslant 0$，都有 $F_m=E_m\oplus U_m$，其中 $F_m,E_m,U_m\in\mathscr{I}$. 因此，$B$ 有左内射分解

$$\mathbf{F}=:\cdots\to F_2\to F_1\to F_0\to B\to 0,$$

对任意的强 FP-内射模 N，易证 $\mathrm{Hom}_R(N,\mathbf{F})$ 正合. 另一方面，易得 $\mathrm{Ext}^i_R(N,B)=0$，$\forall i\geqslant 1$. 由引理 2 可得 B 是 Gorenstein 强 FP-内射模.

2) 假设 A,B 是 Gorenstein 强 FP-内射模. 由引理 2 知，存在正合列 $0\to B'\to E\xrightarrow{\beta}B\to 0$，其中 E 是内射的，B' 是 Gorenstein 强 FP-内射的. 考虑 β：$E\to B$ 和 f：$A\to B$ 的拉回图：



由 1)知，K 是 Gorenstein 强 FP-内射的. 进而由引理 2 知，K 有左内射分解

$$\cdots\to U_2\to U_1\to U_0\to K\to 0,$$

使得对任意的强 FP-内射模 N，函子 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ 作用上述序列后仍正合. 因此 R-模 C 也有左内射分解：

$$\mathbf{U}=:\cdots\to U_2\to U_1\to U_0\to E\to C\to 0,$$

其中 $K\cong\mathrm{Im}(U_0\to E)$. 由定义 3 知，对任意的强 FP-内射模 N，都有 $\mathrm{Ext}^1_R(N,K)=0$. 因此函子 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ 作用到短正合列 $0\to K\to E\to C\to 0$ 后仍正合，从而 $\mathrm{Hom}_R(N,\mathbf{U})$ 正合. 又因为函子 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ 作用到短正合列 $0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ 可得正合序列

$$\cdots\to\mathrm{Ext}^1_R(N,B)\to\mathrm{Ext}^1_R(N,C)\to\mathrm{Ext}^2_R(N,A)\to\cdots,$$

且由定义 3 易得对任意 $i\geqslant 1$，$\mathrm{Ext}^i_R(N,C)=0$. 从而根据引理 2 知，R-模 C 是 Gorenstein 强 FP-内射的.

命题 1 Gorenstein 强 FP-内射模的类 $\mathscr{GSFFI}$ 关于直积和直和项封闭.

证明：利用定义 3、定理 1 及文献[3]中命题 1.4 类似可证.

引理 3 令 $\text{G-SFP-id}_R(M)=n$，则存在短正合列

$$0\to M\to I\to F\to 0,$$

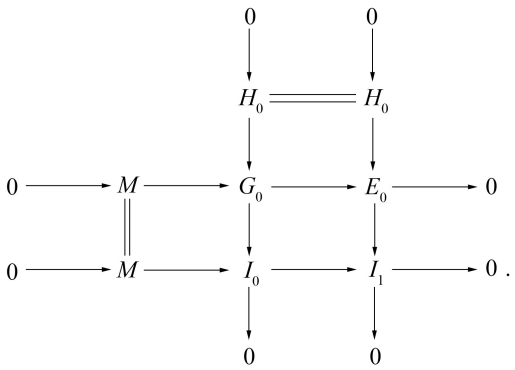
$$0\to I'\to F'\to M\to 0,$$

其中 $I\in\mathscr{GSFFI}$，$\mathrm{id}_R(F)\leqslant n-1$，$I'\in\mathscr{GSFFI}$，$\mathrm{id}_R(F')\leqslant n$.

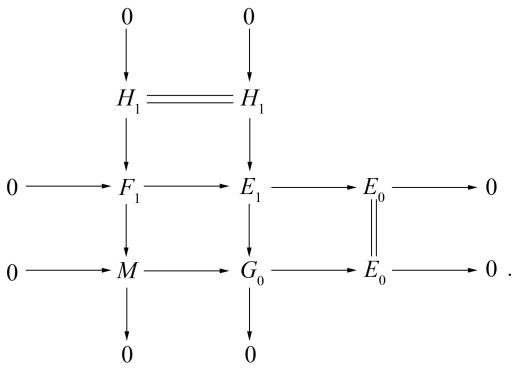
证明：若 $n=0$，则 M 是 Gorenstein 强 FP-内射模，结论显然. 若 $n\geqslant 1$，对 n 进行归纳，当 $n=1$ 时，存在正合列

$$0\to M\to I_0\xrightarrow{d_0} I_1\to 0,$$

其中 $I_0, I_1\in \mathcal{GSFI}$. 从而存在正合列 $0\to H_0\to E_0\to I_1\to 0$，其中 $E_0\in\mathcal{I}$，$H_0\in\mathcal{GSFI}$. 考虑下列拉回图：



由中间列正合及定理 1 可知，$G_0\in\mathcal{GSFI}$. 于是有正合列 $0\to H_1\to E_1\to G_0\to 0$，其中 $E_1\in\mathcal{I}$，$H_1\in\mathcal{GSFI}$. 考虑下列拉回图：



因此可得正合列 $0\to H_1\to F_1\to M\to 0$，且由中间行正合知 $\mathrm{id}_R(F_1)\leqslant 1$. 结论得证.

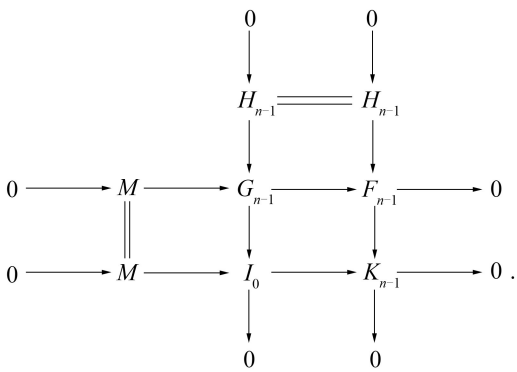
假设 $n>1$，并且结论对 $n-1$ 成立，下证结论对 n 成立. 考虑正合序列

$$0\to M\to I_0\xrightarrow{d_0} I_1\xrightarrow{d_1}\cdots\xrightarrow{d_{n-1}} I_n\to 0,$$

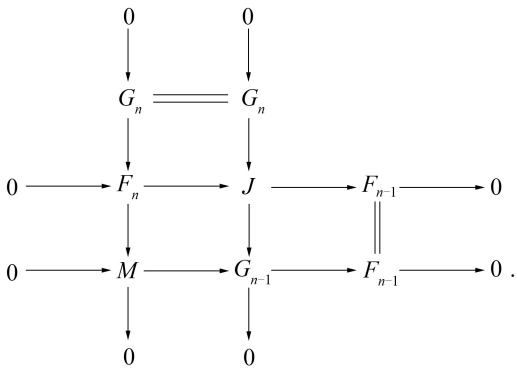
其中对任意的 $i\geqslant 0$，有 $I_i\in\mathcal{GSFI}$. 令 $K_{n-1}=\mathrm{Im}\, d_0$，可得 $\text{G-SFP-id}_R(K_{n-1})=n-1$. 由归纳法知，存在正合列

$$0\to H_{n-1}\to F_{n-1}\to K_{n-1}\to 0,$$

其中 $\mathrm{id}_R(F_{n-1})\leqslant n-1$，且 $H_{n-1}\in\mathcal{GSFI}$. 考虑下列拉回图：



因此，有正合列 $0\to M\to G_{n-1}\to F_{n-1}\to 0$ 和 $0\to G_n\to J\to G_{n-1}\to 0$，其中 $G_{n-1}\in\mathcal{GSFI}$，$\mathrm{id}_R(F_{n-1})\leqslant n-1$，$J\in\mathcal{I}$，且 $G_n\in\mathcal{GSFI}$. 考虑下列拉回图：



因为 $J\in\mathscr{I}$ 且 $\mathrm{id}_R(F_{n-1})\leqslant n-1$，故由中间行正合知 $\mathrm{id}_R(F_n)\leqslant n$. 即有短正合列 $0\to M\to G_{n-1}\to F_{n-1}\to 0$ 和 $0\to G_n\to F_n\to M\to 0$，其中 $G_{n-1}\in\mathscr{GSFFI}$，$\mathrm{id}_R(F_{n-1})\leqslant n-1$，$G_n\in\mathscr{GSFFI}$，$\mathrm{id}_R(F_n)\leqslant n$. 结论得证.

推论 1 令 $0\to M\to I_0\to I_1\to 0$ 是 R-模的短正合列，其中 I_0 和 I_1 是 Gorenstein 强 FP-内射模，且 $\mathrm{Ext}^1_R(I,M)=0$，$\forall\, I\in\mathscr{I}$，则 M 是 Gorenstein 强 FP-内射模.

证明：显然 $\text{G-SFP-id}_R(M)\leqslant 1$，由引理 3 知，存在短正合列

$$0\to M\to G\to I\to 0, \tag{5}$$

其中 $G\in\mathscr{GSFFI}$，$I\in\mathscr{I}$. 而 $\mathrm{Ext}^1_R(I,M)=0$，所以短正合列(5)可裂. 因此由命题 1 知 M 是 Gorenstein 强 FP-内射模.

推论 2 任意 Gorenstein 强 FP-内射维数有限的 R-模都有一个特殊的 Gorenstein 强 FP-内射预包络.

证明：令 M 是 Gorenstein 强 FP-内射维数有限的 R-模，则由引理 3 知，存在正合列

$$0\to M\to I\to F\to 0, \tag{6}$$

其中 $I\in\mathscr{GSFFI}$，且 $\mathrm{id}_R(F)\leqslant \text{G-SFP-id}_R(M)-1$. 从而 $\text{SFP-id}_R(F)<\infty$. 如果 $G'\in\mathscr{GSFFI}$，则由引理 1 知 $\mathrm{Ext}^1_R(F,G')=0$. 于是 $M\to I$ 是特殊的 Gorenstein 强 FP-内射预包络.

定理 2 若任意 R-模的 Gorenstein 强 FP-内射维数有限，则$({}^{\perp}\mathscr{GSFFI},\mathscr{GSFFI})$是完全遗传的余挠对.

证明：先证明$({}^{\perp}\mathscr{GSFFI},\mathscr{GSFFI})$是余挠对. 显然 $\mathscr{GSFFI}\subseteq({}^{\perp}\mathscr{GSFFI})^{\perp}$. 下证$({}^{\perp}\mathscr{GSFFI})^{\perp}\subseteq\mathscr{GSFFI}$. 设 $M\in({}^{\perp}\mathscr{GSFFI})^{\perp}$，由推论 2 知，存在正合列(6)，使得 $I\in\mathscr{GSFFI}$，$F\in{}^{\perp}\mathscr{GSFFI}$，所以 $\mathrm{Ext}^1_R(F,M)=0$，即上述序列可裂，从而 M 是 I 的直和项. 由命题 1 知，$M\in\mathscr{GSFFI}$. 于是$({}^{\perp}\mathscr{GSFFI})^{\perp}=\mathscr{GSFFI}$，故$({}^{\perp}\mathscr{GSFFI},\mathscr{GSFFI})$是余挠对. 进而由推论 2 及定理 1 可知，$({}^{\perp}\mathscr{GSFFI},\mathscr{GSFFI})$是完全遗传的余挠对.

参 考 文 献

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable Module Theory [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1969: 1-146.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220(4): 611-633.

[3] HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189(1/2/3): 167-193.

[4] MAO L X, DING N Q. Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules [J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2008, 7(4): 491-506.

[5] SELVARAJ C, UDHAYAKUMAR R, UMAMAHESWARAN A. Gorenstein n-Flat Modules and Their Covers [J]. Asian-European Journal of Mathematics, 2014, 7(3): 1450051-1-1450051-13.

[6] LI W Q, GUAN J C, OUYANG B Y. Strongly FP-Injective Modules [J]. Communications in Algebra, 2017, 45(9): 3816-3824.

[7] XING S Q, LUO X Q, HU K. Gorenstein FP_∞-Injective Modules and w-Noetherian Rings [J]. Algebra Colloquium, 2022, 29(4): 687-712.

[8] CHEN M Z, KIM H, WANG F G, et al. Some Characterizations of Coherent Rings in Terms of Strongly FP-Injective Modules [J]. Communications in Algebra, 2020, 48(7): 2857-2871.

(责任编辑：赵立芹)