山西大学学报(自然科学版)49(5):839—848,2026
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

DOI:10.13451/j.sxu.ns.2026004

基于行为改变的离散SEIS网络传染病模型分析

王芳[1],刘茂省[2*]
(1.山西工学院 通识教育学院,山西 朔州 036000;
2.北京建筑大学 理学院,北京 102616)

摘 要:本文通过建立描述状态变化过程的概率转移树,提出了一个考虑易感者和潜伏者佩戴口罩行为变化的离散的易感者-潜伏者-感染者-易感者(Susceptible-exposed-infected-susceptible,SEIS)网络传染病模型。基于微观马尔可夫链的方法,求解了依赖于佩戴口罩者的密度及网络拓扑结构的传播阈值的表达式。通过数值模拟研究发现最终潜伏者和感染者密度的大小关系主要依赖于潜伏期的长短。还发现当潜伏者具有强传染性时,较长的潜伏期将导致更大的最终染病规模,而当潜伏者没有传染性时,结果是截然相反的。最后研究了口罩的有效性和需求率对传染病传播的影响。结果表明,在控制传染病的过程中,必须重视潜伏期长且具有强传染性的疾病,同时动员更多的公民佩戴口罩且尽量选择防护性强的口罩。

关键词:网络传染病;传播阈值;潜伏者;口罩;染病规模
中图分类号:O175 **文献标志码**:A **文章编号**:0253-2395(2026)05-0839-10

Analysis of a Discrete SEIS Network Infectious Disease Model Based on Behavioral Change

Wang Fang[1], Liu Maoxing[2*]
(1. *College of General Education, Shanxi College of Technology, Shuozhou* 036000*, China;*
2. *School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing* 102616*, China*)

Abstract: We propose a discrete susceptible-exposed-infected-susceptible (SEIS) network infectious disease model considering the change of mask-wearing behavior of susceptible and exposed individuals by establishing probability transition trees that describe the process of state changes. Based on the microscopic Markov chain method, the expression of the propagation threshold that depends on the density of mask-wearers and the network topology is solved. Through numerical simulations, it is found that the size relationship between the density of exposed and infected individuals is mainly dependent on the length of incubation period. It is also found that when the exposed individuals are highly contagious, the longer incubation period will lead to a larger scale of final infection, while the result is completely opposite when the exposed individuals are not contagious. Finally, the impact of the effectiveness and demand rate of masks on the spread of infectious diseases is studied. The results show that in the process of controlling infectious diseases, it is necessary to pay attention to diseases with long incubation period and strong infectivity, and at the same time encourage more citizens to wear masks and choose masks with strong protection as much as possible.

Keywords: network infectious disease; propagation threshold; exposed individuals; mask; scale of infection

收稿日期:2025-10-20;**修回日期**:2026-02-02
基金项目:国家自然科学基金(12571522;12271519);北京建筑大学高层次人才引进资助计划(GDRC20220802)
作者简介:王芳(1988—),女,山西临汾人,博士,讲师,研究方向为网络传染病的建模与分析。E-mail:wangfang880129@126.com
* **通信作者**:刘茂省(Liu Maoxing),E-mail:liumaoxing@126.com
引文格式:王芳,刘茂省.基于行为改变的离散SEIS网络传染病模型分析[J].山西大学学报(自然科学版),2026,49(5):839-848. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2026004.

0 引言

当呼吸道类传染病发生时,佩戴口罩可以延缓疾病的传播。佩戴口罩的易感者可以降低其被感染的概率,而染病者选择佩戴口罩可以有效减少病毒的传播,降低了传染病的传染率。Worby 等[1]基于数学模型研究发现口罩的使用可以减少总的感染者及死亡人数,还可以延迟疾病高峰时刻的到来。Tracht 等[2]量化了佩戴口罩对流感传播的影响,发现如果口罩佩戴得当,可以有效降低疾病的大流行。基于一个连续的易感者-潜伏者-无症状感染者-有症状感染者-恢复者(Susceptible-exposed-asymptomatic-infectious-recovered, SEAIR)模型,Cui 等[3]定量地给出了佩戴 N95 口罩对基本再生数和染病规模的减小尺度。基于由不同年龄结构组成的数学模型,Tracht 等[4]研究发现口罩可以显著减少流感病例的数量及因疫情造成的经济损失。Damette 等[5]考察了口罩使用对感染病例的动态影响,发现随着佩戴口罩者比例的增加,染病者数量将减少。

关于佩戴口罩行为对传染病传播的影响研究成果中更多的是基于连续数学模型而开展的,然而在传染病实际传播的过程中获得的有关数据往往是离散的,故基于离散传染病模型的研究更具有现实意义,而且基于离散时间模型的个体行为改变与传染病传播的共演化动态仍未被充分揭示,所以本论文通过概率转移树进而构建了一个融合佩戴口罩的行为变化过程的离散的易感者-潜伏者-感染者-易感者(Susceptible-exposed-infected-susceptible, SEIS)网络传染病模型。这种通过概率转移树构建离散动力学方程的方法,在传染病建模中较为常见,相关研究文献举例如下。基于意识扩散过程与传染病传播过程(SIS[6]、SIR[7]模型)耦合的双层网络,采用微观马尔可夫链的方法研究发现传播阈值与网络的拓扑结构及意识过程相关。基于信息层与传染病传播层耦合的离散模型,研究了大众媒体影响下的意识扩散对传染病传播的影响[8-9]。Wang 等[10]基于双层网络模型研究发现加快正面信息传播,加大大众媒体的宣传力度,可以有效抑制疫情的传播。通过一个带有单纯形的双层网络模型,Sun 等[11]揭示了资源的扩散可以显著改变传染病的传播阈值,而且增加 2-单纯形上的资源扩散可以降低感染个体的密度,从而遏制疾病的暴发。Zhang 等[12]研究发现在信息传播层引入单纯形或两层之间的部分映射关系可以抑制疫情的传播。Huo 等[13]提出了一个三层网络中耦合信息传播、疫苗接种行为决策及传染病传播的模型,研究表明降低疫苗接种成本和提高疫苗效力是控制疫情的更有效策略。常星花等[14]将个体防护行为的转变纳入 SIS 传染病模型的分析框架中,揭示了疾病的传播与感染形势信息之间的复杂交互关系。

由于一些传染病如新冠,会出现无症状或症状出现延迟的个体(即潜伏者)[15],而且潜伏者也具有传染性,所以是不可忽视的[16-17],这也是本文构建带有潜伏者的模型的原因。然而,对带有潜伏者的离散网络模型的研究较少,如 Zhu 等[18]构建了一个基于三层网络框架的离散 SEIS 传染病模型,探讨了信息驱动的资源分配、潜伏者及不同的网络结构等因素对传染病传播的影响。宋玉蓉等[19]构建了考虑时变遗忘概率的信息传播耦合 SEIR 病毒传播的模型,探讨了遗忘概率、感染衰减因子等因素对疾病传播的影响。Zhou 等[20]从考虑个体流动性的角度,提出了一个双层网络框架下的信息扩散和传染病传播的离散 SEIR 耦合模型,研究发现促进社交网络中的信息扩散可以有效降低传染病的传播规模,而个体流动性在促进或延缓疾病传播方面的作用取决于传染病网络的分布。

简而言之,基于概率转移树而建立的网络传染病模型分析已有一些成果,但少有利用该方法研究佩戴口罩的行为变化对疾病传播的影响,而且对带有潜伏者的离散网络模型的分析也较少,这也正是本文的研究动机。本文在理论层面上给出了传播阈值的解析表达式,通过一系列数值模拟研究了潜伏者的潜伏期长短及其传染性对稳态下潜伏者、感染者、染病者密度的影响,还探讨了口罩的有效性、需求率对传染病传播过程的影响,旨在探讨潜伏者及佩戴口罩行为对传染病传播的影响,进而为疾病防控策略的制定提供一定的理论支持。具体内

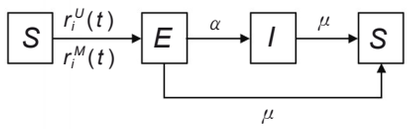
容安排如下:首先介绍带有潜伏者的离散网络模型的构建及理论分析;其次进行数值模拟;最后给出全文内容总结和讨论。

1 离散网络模型的构建及分析

1.1 模型的建立

本文提出一个离散的SEIS网络传染病模型,其中易感者(S)、潜伏者(E)(无明显症状,但也具有传染性)、感染者(I)。易感者接触潜伏者或感染者均可能被感染,且一旦被感染首先成为潜伏者,然后才进入感染者仓室。潜伏者和感染者均可以恢复为易感者,即恢复后仍然有被再次感染的概率。传染病在由个体接触构成的网络中蔓延,具体的传播流程如图1所示。网络中的不同节点分别表示不同的个体,节点总数为N。矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{N\times N}$表示网络的邻接矩阵,对角线元素为$a_{ii}=0$,当个体$i$与个体$j$之间存在连边时,$a_{ij}=1$,否则$a_{ij}=0$。将人群根据佩戴口罩与否分为两大类,即戴口罩者($M$)和未戴口罩者($U$),并且假设感染者被要求必须佩戴口罩,所以网络中的节点可能出现以下五种状态:未戴口罩的易感者(US),戴口罩的易感者(MS),未戴口罩的潜伏者(UE),戴口罩的潜伏者(ME)和感染者(MI)。

令$P_i^{US}(t),P_i^{MS}(t),P_i^{UE}(t),P_i^{ME}(t),P_i^{MI}(t)$分别表示节点$i$在$t$时刻处于状态$US,MS,UE,ME,MI$的概率。单位时间内一个未戴口罩的易感者被一个未戴口罩的感染者或潜伏者感染的概率分别为$\beta,\eta\beta$。当$\eta=1$时,表示潜伏者与感染者的传染性是相同的。因此,未戴口罩的易感个体i至少被一个染病邻居感染的概率为:



注:α表示潜伏者到感染者的转化率;μ表示个体单位时间内的恢复率。

图1 疾病传播的流程图

Fig. 1 The flowchart of disease transmission

$$r_i^U(t)=1-\prod_j\left\{1-a_{ij}\beta\left[\eta P_j^{UE}(t)+\xi\eta P_j^{ME}(t)+\xi P_j^{MI}(t)\right]\right\}, \tag{1}$$

其中ξ值的大小可以衡量口罩的有效性。由于口罩的保护性效果,如果染病者佩戴口罩,可以降低其传染性,戴口罩的易感者可以降低其被感染的概率,假设单位时间内可以降低$1-\xi$($0\leqslant\xi\leqslant1$)的传染性或易感性,则戴口罩的易感个体i被感染的概率为:

$$r_i^M(t)=\xi r_i^U(t)。 \tag{2}$$

如果$\xi=0$,意味着戴口罩的易感者被感染的概率为0,此时口罩对易感者起到了绝对防护的效果;而当$\xi=1$时,戴口罩与否不会改变易感者被感染的概率,此时口罩没有任何防护效果。

假设网络中的每个个体在单位时间内的状态变化仅限于一种感染状态和是否佩戴口罩行为的改变,具体的状态变化情况如图2所示,其中第一行呈现的是个体在上一时刻可能出现的状态,第三行展示了个体经历传染病的传播及行为调整后下一时刻可能的全部状态。

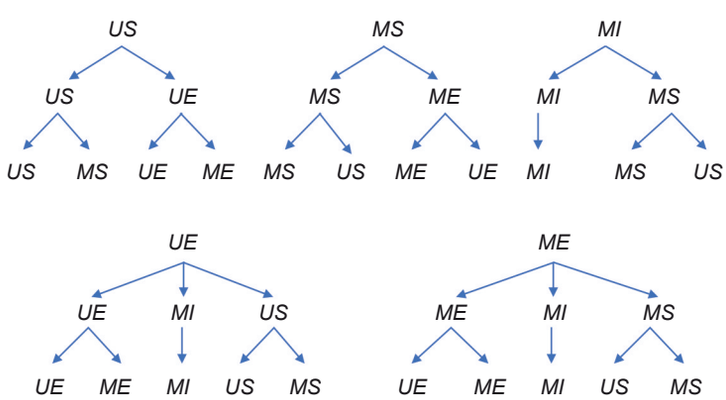


图2 五种可能状态的概率转移树

Fig. 2 The probability transmission trees for five possible states

因此,利用微观马尔可夫链的方法,可以建立各状态的转移方程即SEIS模型如(3)所示,方程的具体构建步骤为:基于概率转移树图2,首先统计图中第三行出现的每一种可能状态的所有情况,其次针对每种状态计算从上一时刻到下一时刻该状态的转移概率,最后将所有情况的概率相加即可得到该状态的离散时间方程。

$$\begin{cases} P_i^{US}(t+1)=P_i^{US}(t)(1-r_i^U(t))(1-\varphi)+ \\ \quad P_i^{MS}(t)(1-r_i^M(t))q+P_i^{UE}(t)\mu(1-\varphi)+ \\ \quad P_i^{ME}(t)\mu q+P_i^{MI}(t)\mu q, \\ P_i^{MS}(t+1)=P_i^{US}(t)(1-r_i^U(t))\varphi+ \\ \quad P_i^{MS}(t)(1-r_i^M(t))(1-q)+P_i^{UE}(t)\mu\varphi+ \\ \quad P_i^{ME}(t)\mu(1-q)+P_i^{MI}(t)\mu(1-q), \\ P_i^{UE}(t+1)=P_i^{US}(t)r_i^U(t)(1-\varphi)+ \\ \quad P_i^{MS}(t)r_i^M(t)q+P_i^{UE}(t)(1-\alpha-\mu)(1-\varphi)+ \\ \quad P_i^{ME}(t)(1-\alpha-\mu)q, \\ P_i^{ME}(t+1)=P_i^{US}(t)r_i^U(t)\varphi+P_i^{MS}(t)r_i^M(t)\cdot \\ \quad (1-q)+P_i^{UE}(t)(1-\alpha-\mu)\varphi+ \\ \quad P_i^{ME}(t)(1-\alpha-\mu)(1-q), \\ P_i^{MI}(t+1)=P_i^{UE}(t)\alpha+P_i^{ME}(t)\alpha+P_i^{MI}(t)(1-\mu), \end{cases} \tag{3}$$

其中q是从佩戴口罩状态到未戴口罩的行为的转移率,φ是从未戴口罩行为到佩戴口罩状态的转移率(即口罩的需求率),参数α表示潜伏者到感染者的转化率,故$\frac{1}{\alpha}$刻画的是潜伏期的长短,较小的α意味着越长的潜伏期,假设不同个体在单位时间内的恢复率是相同的,记为μ。

定义易感者、潜伏者、感染者、戴口罩者及总的染病者的密度分别为:

$$\rho^S(t)=\rho^{MS}(t)+\rho^{US}(t)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[P_i^{MS}(t)+P_i^{US}(t)\right]}{N},$$

$$\rho^E(t)=\rho^{ME}(t)+\rho^{UE}(t)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[P_i^{ME}(t)+P_i^{UE}(t)\right]}{N},$$

$$\rho^I(t)=\rho^{MI}(t)=\frac{\sum_{i=1}^{N}P_i^{MI}(t)}{N},$$

$$\rho^M(t)=\rho^{MS}(t)+\rho^{ME}(t)+\rho^{MI}(t)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[P_i^{MS}(t)+P_i^{ME}(t)+P_i^{MI}(t)\right]}{N},$$

$$\rho(t)=\rho^I(t)+\rho^E(t)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[P_i^{MI}(t)+P_i^{ME}(t)+P_i^{UE}(t)\right]}{N}。 \tag{4}$$

令$\rho^S,\rho^E,\rho^I,\rho^M,\rho$分别表示系统(3)稳态下的易感者、潜伏者、感染者、佩戴口罩者及总的染病者的密度。

1.2 传播阈值分析

在传染病学中,传播阈值是判断一种疾病是否会大规模传播或逐渐消亡的关键指标,该阈值决定了疾病传播的临界条件。采用Wang等[21]在相关研究中的方法,可以推导出系统(3)的传播阈值的具体表达式。

定理1 系统(3)的传播阈值为$\beta_c=\frac{(\alpha+\mu)(q+\varphi)}{(q+\varphi\xi)h\Lambda_{\max}(\boldsymbol{A})}$。即当$\beta<\beta_c$时,传染病最终将灭绝,而如果$\beta>\beta_c$,传染病将持续存在,其中$\Lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$表示邻接矩阵$\boldsymbol{A}$的最大特征值。

证明 当系统(3)趋于稳态时,个体处于各状态的概率与时间无关,即

$$P_i^{US}(t+1)=P_i^{US}(t)=P_i^{US},$$
$$P_i^{MS}(t+1)=P_i^{MS}(t)=P_i^{MS},$$
$$P_i^{MI}(t+1)=P_i^{MI}(t)=P_i^{MI},$$
$$P_i^{UE}(t+1)=P_i^{UE}(t)=P_i^{UE},$$
$$P_i^{ME}(t+1)=P_i^{ME}(t)=P_i^{ME}。$$

在研究的模型(3)中,易感者一旦被感染首先成为潜伏者,所以选择ρ^E为关键参数来推导传播阈值β_c的表达式。在阈值β_c附近处,假设$P_i^E=P_i^{UE}+P_i^{ME}=\theta_i\ll 1$,进而$P_i^{UE},P_i^{ME},P_i^{MI}$也非常小,几乎趋于0。所以基于这些假设条件,方程(3)可近似表示为:

$$\begin{cases} P_i^{US}=P_i^{US}(1-\varphi)+P_i^{MS}q, \\ P_i^{MS}=P_i^{US}\varphi+P_i^{MS}(1-q), \\ P_i^E=P_i^{ME}+P_i^{UE}= \\ \quad P_i^{US}r_i^U+P_i^{MS}r_i^M+P_i^{UE}(1-\alpha-\mu)+ \\ \quad P_i^{ME}(1-\alpha-\mu)=P_i^{US}r_i^U+P_i^{MS}r_i^M+ \\ \quad P_i^E(1-\alpha-\mu), \\ P_i^{MI}=\frac{\alpha}{\mu}P_i^E。 \end{cases} \tag{5}$$

同时,方程(1)也可近似为

$$r_i^U \approx \sum_j a_{ij}\beta(\eta P_j^{UE} + \xi\eta P_j^{ME} + \xi P_j^{MI})。 \quad (6)$$

由方程(5)的前两个方程可以得到$qP_i^{MS} = \varphi P_i^{US}$,而且当$P_i^{UE} = P_i^{ME} = P_i^{MI} = 0$时,$P_i^{MS} + P_i^{US} = 1$,由此容易计算得到

$$P_i^{MS} = \frac{\varphi}{q+\varphi}, P_i^{US} = \frac{q}{q+\varphi}。 \quad (7)$$

同时,基于佩戴口罩者的密度,可以将P_i^{UE}, P_i^{ME}分别近似表示为$P_i^{UE} \approx (1-\rho^M)P_i^E, P_i^{ME} \approx \rho^M P_i^E$。将其代入(6)式得:

$$r_i^U \approx \sum_j a_{ij}\beta\left[\eta(1-\rho^M)P_j^E + \xi\eta\rho^M P_j^E + \frac{\xi\alpha}{\mu}P_j^E\right]。 \quad (8)$$

最后,将(7)式和(8)式代入(5)式的第三个方程中,得到

$$(\alpha+\mu)\theta_i = \frac{q+\varphi\xi}{q+\varphi}r_i^U = \frac{(q+\varphi\xi)\beta}{q+\varphi}\sum_j a_{ij}\left[\eta(1-\rho^M) + \xi\eta\rho^M + \frac{\xi\alpha}{\mu}\right]\theta_j。 \quad (9)$$

令$\eta(1-\rho^M) + \xi\eta\rho^M + \frac{\xi\alpha}{\mu} = h$,则

$$\left[\sum_j a_{ij} - \frac{(\alpha+\mu)(q+\varphi)}{(q+\varphi\xi)\beta h}\delta_{ij}\right]\theta_j = 0, \quad (10)$$

其中δ_{ij}是单位矩阵的元素,即当$i=j$时,$\delta_{ij}=1$,否则$\delta_{ij}=0$。根据方程(10)可以通过求解邻接矩阵$\boldsymbol{A}$的最大特征值,进而推导出传播阈值的表达式为

$$\beta_c = \frac{(\alpha+\mu)(q+\varphi)}{(q+\varphi\xi)h\Lambda_{\max}(\boldsymbol{A})}, \quad (11)$$

其中$\Lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$是邻接矩阵$\boldsymbol{A}$的最大特征值。

注 传播阈值β_c与佩戴口罩者的密度及网络的拓扑结构有关。

2 数值模拟

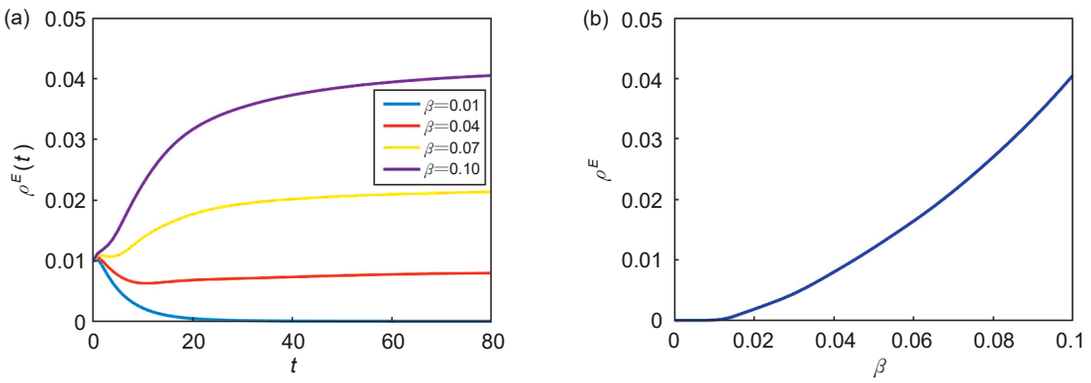
本文的数值模拟是利用MATLAB软件,基于无标度网络上运行的,网络的节点数为1 000。该网络的构建过程如下:初始阶段,网络中仅包含5个节点,随后每一步都会引入一个新的节点,并按照优先连接规则与已有节点建立连接。具体来说,新节点倾向于与度较大的节点相连,从而在网络的演化过程中,度大的节点将形成更多的连边。这种机制使得网络的邻接矩阵得以逐步确定,并最终呈现出无标度网络的典型特征,即节点的度分布符合幂律分布,少数节点拥有大量连接,而大部分节点仅有少量连接。基于网络的生成过程,邻接矩阵$\boldsymbol{A}$随之被确定。此外,数值模拟的结果均是通过迭代系统(3)得到的,不仅证明了理论分析结果的准确性,而且研究了潜伏者的潜伏期长短及其传染性和口罩有效性、需求率等对疾病传播的影响。

从图3(a)中可以观察到尽管初始条件相同,但不同曲线的演化趋势存在显著差异,其中一条曲线逐渐趋向于0,而其他曲线则趋于不同的稳态值。这表明即使初始条件一致,疾病传播过程中传染率的差异可以导致最终潜伏者密度的变化,即随着β的增大,最终潜伏者的密度也随之增大,该现象强调了传染率在疾病传播中的关键作用。因此,降低个体的传染率至关重要,可以通过佩戴口罩、接种疫苗和自我隔离等措施来实现,这些措施有助于更有效地控制疾病的传播。图3(b)呈现的是ρ^E随β变化的情况,显然当其他参数给定时,ρ^E是β的单调递增函数,而且揭示了传播阈值β_c的存在性,当$\beta<\beta_c$时,传染病最终灭绝,而当$\beta>\beta_c$时,疾病将演变为地方病,这与定理1的理论分析结果是一致的,进一步强调了在疾病传播初期采取有效干预措施的重要性。

从图4可以发现,在α,η取值不同的情况下,即当潜伏者的潜伏期长短及其传染性发生变化时,稳态下的最终潜伏者和感染者的密度大小关系是不同的。具体如下:比较图4的(a)和(b)图,当潜伏期不变时,始终是$\rho^E>\rho^I$,不同的是随着潜伏者传染性的增强,ρ^E与ρ^I的值都相对变大了;当$\alpha=0.1,\eta=0.8$时,从图4(c)可以看出$\rho^E=\rho^I$。进一步随着α的增大,即潜伏期的缩短时,图4(d)的结果变为$\rho^I>\rho^E$。由此,可以得出最终潜伏者和感染者密度的大小关系主要依赖于潜伏期的长短。

其原因可以解释为:当潜伏期较长时,即使潜伏者具有较强的传染性,由于潜伏者到感染者的转化率较低,同时潜伏者也可以恢复成易感者,故导致网络中出现较少的感染者;而当潜伏期变短时,一旦被感染后的潜伏者很快就可以转化为感染者,这将导致感染者的大量积

累,所以出现了$\rho^I>\rho^E$的现象。该结果表明,在控制传染病的过程中,不仅应该关注感染者,还不能忽视可能诱发疾病暴发的潜伏者,尤其是潜伏期长的传染病。

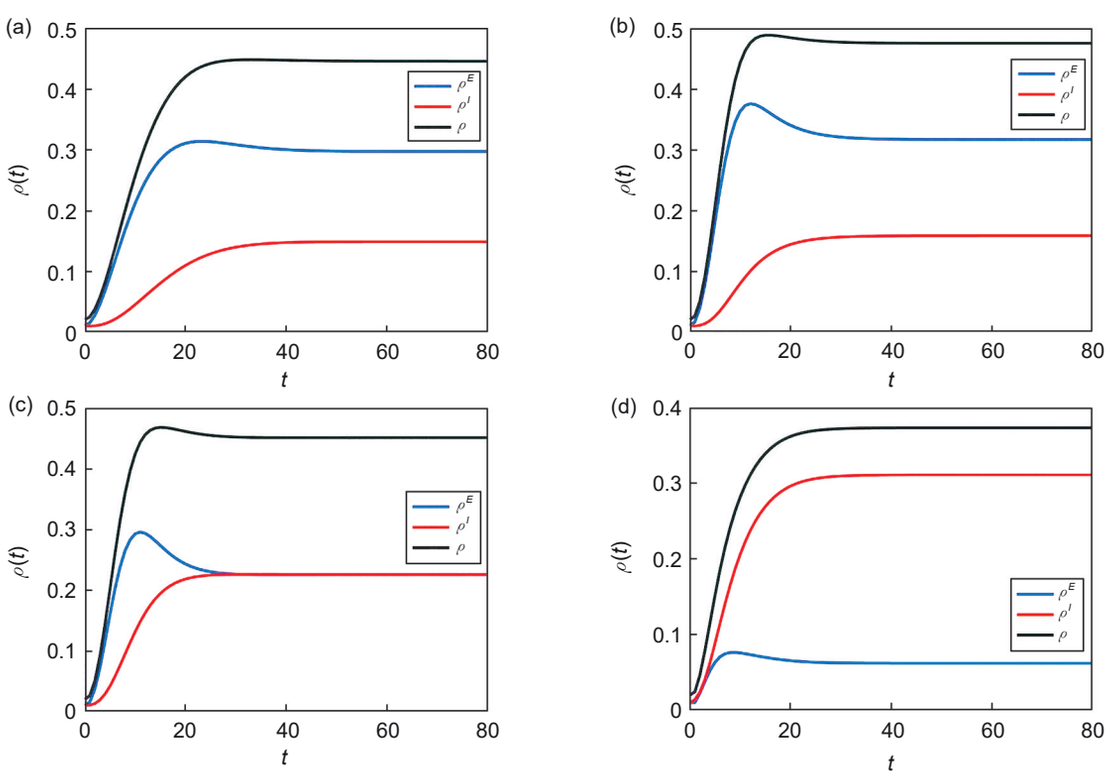


注:参数取值为$q=0.6$, $\varphi=0.4$, $\alpha=0.05$, $\xi=0.1$, $\mu=0.1$, $\eta=0.4$,初值为$\rho^{ME}(0)=\rho^{MI}(0)=0.01$, $\rho^{US}(0)=0.98$。

Note: The parameter values are $q=0.6$, $\varphi=0.4$, $\alpha=0.05$, $\xi=0.1$, $\mu=0.1$, $\eta=0.4$. The initial value is $\rho^{ME}(0)=\rho^{MI}(0)=0.01$, $\rho^{US}(0)=0.98$.

图3 不同β值对应的$\rho^E(t)$的时间序列图(a)和ρ^E与β的关系图(b)

Fig. 3 The fraction of the infected population $\rho^E(t)$ versus time corresponding to different β (a) and the relationship between ρ^E and β (b)



注:(a) $\alpha=0.05$, $\eta=0.4$;(b) $\alpha=0.05$, $\eta=0.8$; (c) $\alpha=0.1$, $\eta=0.8$;(d) $\alpha=0.5$, $\eta=0.8$。传染率均是$\beta=0.5$,其余参数及初值与图3相同。

Note: (a) $\alpha=0.05$, $\eta=0.4$; (b) $\alpha=0.05$, $\eta=0.8$; (c) $\alpha=0.1$, $\eta=0.8$; (d) $\alpha=0.5$, $\eta=0.8$. The infection rate is all $\beta=0.5$, the remaining parameters and initial values are the same as those in Fig. 3.

图4 不同α, η取值情况下ρ^E, ρ^I, ρ的时间序列图

Fig. 4 The time series diagram of ρ^E, ρ^I, ρ with different values of α and η

从图5的结果中发现随着β的增大,网络中最终染病规模ρ也在不断增大,这种上升的趋势表明要想控制传染病的蔓延,必须尽可能减少传染率。比较图5(a)和图5(b)的结果说明,潜伏者的潜伏期长短及其传染性对传染病的传播具有双重影响。具体表述如下:当$\eta=0$时,即潜伏者没有传染性时,随着α的减小,即潜伏期的增大,最终染病规模ρ在不断地减小,然而当$\eta=1$时,即潜伏者具有强传染性时,较长的潜伏期可以导致网络中出现更多的染病者,显然这两种结果是截然相反的。

图5(c)反映了参数η和α对最终染病规模ρ的共同影响,从中可以清晰地观察到,当η取值较小时,ρ随着α的增大而增大,然而,当参数η的取值较大时,随着α的增大,最终染病规模ρ却呈现下降的趋势。该变化关系表明,η和α对最终染病规模ρ的影响并非简单的线性关系,这也再次反映出双重效应的存在性。图5(d)的结果更直观地反映了$\eta=0,1$时的ρ关于参数α的单调性。该现象的出现可以解释为:当潜伏期较长时,没有传染能力的潜伏者既不会轻易转化为感染者,也不会传染给其他易感个体,但是具有强传染性的潜伏者会在较长的潜伏期内传染给更多的易感个体,从而导致网络中出现更多的染病者。该双重效应的出现警示我们要重视潜伏期长且传染性强的传染病。

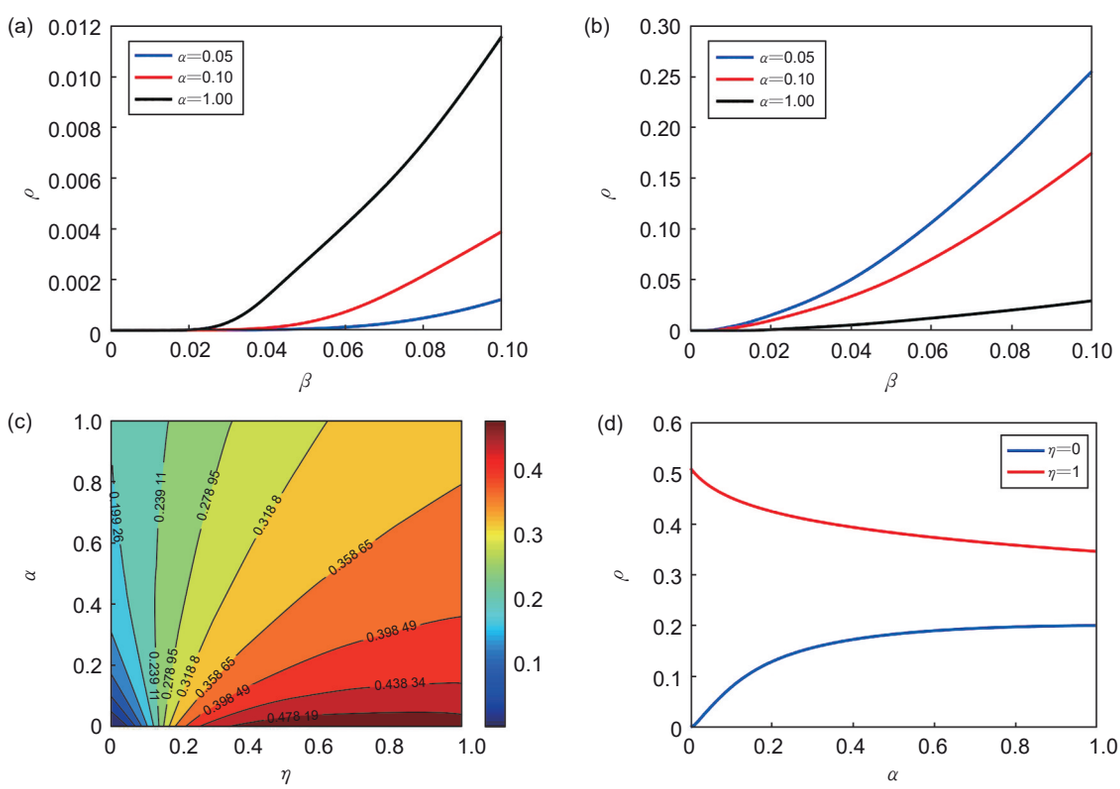


图5 ρ与不同参数的关系图

(a) 不同α值对应的ρ与β的关系图,其中$\eta=0$; (b) 不同α值对应的ρ与β的关系图,其中$\eta=1$; (c) η和α对ρ的联合影响图,$\beta=0.5$;(d) 不同η值对应的ρ与α的关系图,$\beta=0.5$。其余参数取值及初值与图3是相同的。

Fig. 5 The relationship diagram between ρ and different parameters

(a) The relationship diagram of ρ and β corresponding to different values of α, $\eta=0$; (b) The relationship diagram of ρ and β corresponding to different values of α, $\eta=1$; (c) The joint influence diagram of η and α on ρ, $\beta=0.5$; (d) The relationship diagram of ρ and α corresponding to different values of η, $\beta=0.5$. The remaining parameters and initial values are the same as those in Fig. 3.

图6反映的是初值均为$\rho(0)=0.02$的条件下染病者密度随时间变化的情况。观察图6(a)的结果是参数ξ的不同取值下,曲线逐渐趋向于各自特定的稳态值,并且ξ值越大对应的ρ值也越大,这一现象表明口罩的防护效果越差,最终染病者的密度将越大。图6(b)

是不同参数φ对应的染病者密度的时间序列图,其结果反映出较大的φ值对应的ρ较小,该现象可以解释为:较大的从未戴口罩状态到佩戴口罩行为的转移率,即当更多人选择佩戴口罩时,可以导致网络中戴口罩者密度的增大,由于口罩的保护性效果,一定程度上可以遏制疾病传播的速度,降低个体被感染的风险,同时,从社会层面来看,有助于减小染病者的密度,故而对传染病的防控产生积极影响。

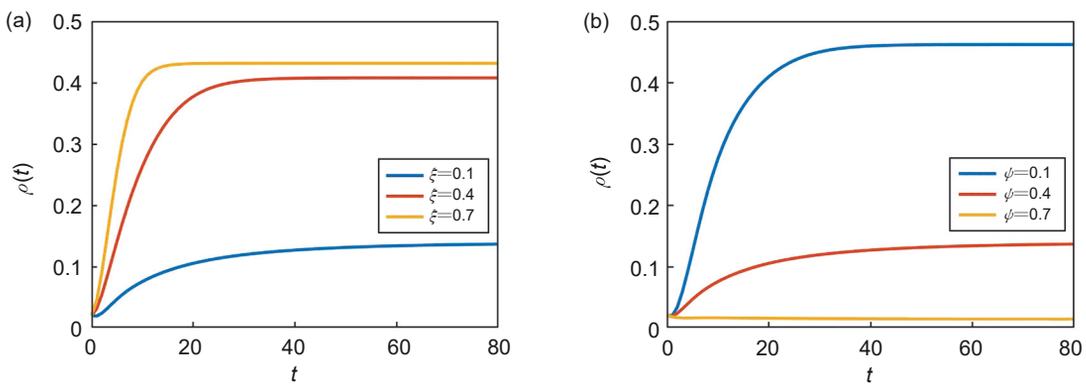


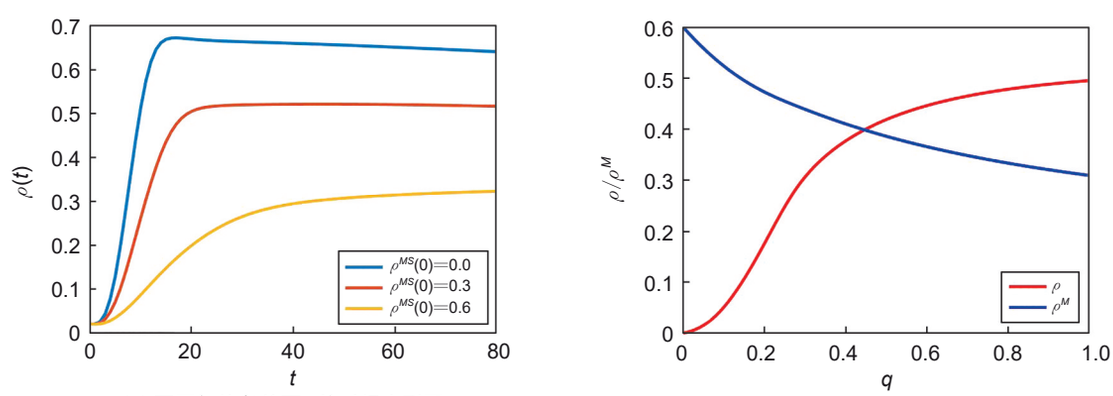
图6 不同参数对应的ρ的时间序列图

(a) 不同ξ值对应的ρ的时间序列图; (b) 不同φ值对应的ρ的时间序列图。参数$\beta=0.2$,其余参数的取值与图4(d)相同。

Fig. 6 The time series diagram of ρ with different values

(a) The time series diagram of ρ with different values of ξ; (b) The time series diagram of ρ with different values of φ. $\beta=0.2$, the other parameters remain consistent with those presented in Fig. 4(d).

观察图7(a),可以发现当佩戴口罩的易感者的初值较大时,对应的ρ值越小,尤其是初值为$\rho^{MS}(0)=0$,即在疫情初期易感者均未佩戴口罩时,对应的ρ值最大,该现象反映出更多的易感者选择佩戴口罩的行为有利于传染病的控制,可以遏制疫情的大规模暴发。图7(b)的结果说明随着参数q的增大,ρ也在不断增大,而ρ^M却在逐渐减小,这表明较大的从佩戴口罩状态到未戴口罩行为的转移率将导致网络中戴口罩者密度的减小,使得疾病更容易传播,从而出现更多的染病者,这对传染病的控制是极为不利的。



(a) 不同初值条件下ρ的时间序列图　　(b) ρ及ρ^M与参数q的关系图

图7 佩戴口罩的行为改变对传染病传播的影响

Fig. 7 The impact of behavioral change in mask wearing on the spread of infectious diseases

图6和图7反映的现象符合我们的认知规律,也给疾病的防控提出警示:在面对COVID-19、流感等呼吸道传染病高发的背景下,科学佩戴口罩已成为阻断病毒传播的重要手段。通过媒体宣传,倡导更多公众佩戴口罩,并在整个疫情期间保持佩戴口罩的行为状态不变,而且在条件允许的情况下可以选择更高防护等级的口罩,不仅有助于个人健康,也能为社会防

疫贡献重要力量。

3 结论

本文采用微观马尔可夫链的方法,构建了融合佩戴口罩个体行为的离散时间SEIS网络传染病模型,给出了模型的传播阈值表达式,发现该阈值不仅与佩戴口罩者的密度有关,还受到网络拓扑结构的显著影响。利用数值模拟证明了传播阈值的存在性,验证了理论分析的正确性;而且研究发现当潜伏期较长时,稳态下潜伏者的密度大于感染者的密度,然而随着潜伏期的缩短,最终潜伏者的密度将小于感染者的密度;还发现当潜伏者具有强传染性时,较长的潜伏期将导致更大的最终染病规模,而当潜伏者没有传染性时,将出现相反的结果;最后研究表明口罩的防护效果越好抑或更多的人选择佩戴口罩均有利于传染病的控制。本文的研究结果给传染病防控政策的制定提供了具体的参考意见。此外,本论文在研究内容上仍有提升空间,未来将考虑博弈论、高阶网络理论结合实际调查数据应用于该领域的研究。

参考文献:

[1] Worby C J, Chang H H. Face Mask Use in the General Population and Optimal Resource Allocation During the COVID-19 Pandemic[J]. *Nat Commun*, 2020, **11**(1): 4049. DOI:10.1038/s41467-020-17922-x.

[2] Tracht S M, Del Valle S Y, Hyman J M. Mathematical Modeling of the Effectiveness of Facemasks in Reducing the Spread of Novel Influenza a (H1N1)[J]. *PLoS One*, 2010, **5**(2): e9018. DOI:10.1371/journal.pone.0009018.

[3] Cui J A, Zhang Y N, Feng Z L, *et al*. Influence of Asymptomatic Infections for the Effectiveness of Facemasks during Pandemic Influenza[J]. *Math Biosci Eng*, 2019, **16**(5): 3936−3946. DOI:10.3934/mbe.2019194.

[4] Tracht S M, Del Valle S Y, Edwards B K. Economic Analysis of the Use of Facemasks During Pandemic (H1N1) 2009[J]. *J Theor Biol*, 2012, **300**: 161−172. DOI: 10.1016/j.jtbi.2012.01.032.

[5] Damette O, Huynh T L D. Face Mask Is an Efficient Tool to Fight the Covid-19 Pandemic and Some Factors Increase the Probability of Its Adoption[J]. *Sci Rep*, 2023, **13**(1): 9218. DOI:10.1038/s41598-023-34776-7.

[6] Granell C, GóMez S, Arenas A. Dynamical Interplay between Awareness and Epidemic Spreading in Multiplex Networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, **111**(12): 128701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.128701.

[7] Zheng C Y, Xia C Y, Guo Q T, *et al*. Interplay Between SIR-based Disease Spreading and Awareness Diffusion on Multiplex Networks[J]. *J Parallel Distrib Comput*, 2018, **115**: 20−28. DOI:10.1016/j.jpdc.2018.01.001.

[8] Granell C, GóMez S, Arenas A. Competing Spreading Processes on Multiplex Networks: Awareness and Epidemics [J]. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 2014, **90**(1): 012808. DOI:10.1103/PhysRevE.90.012808.

[9] Xia C Y, Wang Z S, Zheng C Y, *et al*. A New Coupled Disease-awareness Spreading Model with Mass Media on Multiplex Networks[J]. *Inf Sci*, 2019, **471**: 185−200. DOI:10.1016/j.ins.2018.08.050.

[10] Wang Z S, Xia C Y. Co-evolution Spreading of Multiple Information and Epidemics on Two-layered Networks under the Influence of Mass Media[J]. *Nonlinear Dyn*, 2020, **102**(4): 3039−3052. DOI: 10.1007/s11071-020-06021-7.

[11] Sun Q Y, Wang Z S, Zhao D W, *et al*. Diffusion of Resources and Their Impact on Epidemic Spreading in Multilayer Networks with Simplicial Complexes[J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2022, **164**: 112734. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112734.

[12] Zhang S F, Zhao D W, Xia C Y, *et al*. Impact of Simplicial Complexes on Epidemic Spreading in Partially Mapping Activity-driven Multiplex Networks[J]. *Chaos*, 2023, **33**(6): 063128. DOI:10.1063/5.0151881.

[13] Huo L A, Yin L Y. Influence of Negative Information Dissemination and Vaccination Behavioral Decision-making on Epidemic Spreading in a Three-layer Network[J]. *Chin Phys B*, 2025, **34**(6): 068902. DOI: 10.1088/1674-1056/adc402.

[14] 常星花, 曾镕, 王建荣. 基于社会关系和个人行为的传染病建模与分析[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2025, **48**(5): 888−899. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2025040.
Chang X H, Zeng R, Wang J R. Modeling and Analysis of Infectious Diseases Based on Social Relationships and Personal Behavior[J]. *J Shanxi Univ Nat Sci Ed*, 2025, **48**(5): 888−899. DOI:10.13451/j.sxu.ns.2025040.

[15] Gao Z R, Xu Y H, Sun C, *et al*. A Systematic Review of Asymptomatic Infections with COVID-19[J]. *J Microbiol Immunol Infect*, 2021, **54**(1): 12−16. DOI:10.1016/j.jmii.2020.05.001.

[16] Yanes-lane M, Winters N, Fregonese F, *et al*. Proportion of Asymptomatic Infection among COVID-19 Positive Persons and Their Transmission Potential: a Systematic Review and Meta-analysis[J]. *PLoS One*, 2020, **15**(11):

e0241536. DOI:10.1371/journal.pone.0241536.

[17] Wang X C, Wang S F, Lan Y H, *et al*. The Impact of Asymptomatic Individuals on the Strength of Public Health Interventions to Prevent the Second Outbreak of COVID-19[J]. *Nonlinear Dyn*, 2020, **101**(3): 2003−2012. DOI:10.1007/s11071-020-05736-x.

[18] Zhu X Z, Liu Y X, Wang X C, *et al*. The Effect of Information-driven Resource Allocation on the Propagation of Epidemic with Incubation Period[J]. *Nonlinear Dyn*, 2022, **110**(3): 2913−2929. DOI: 10.1007/s11071-022-07709-8.

[19] 宋玉蓉, 鲍裕霖, 李汝琦. 意识扩散和SEIR病毒的双层网络传播模型[J]. 系统仿真学报, 2022, **34**(11): 2437−2447. DOI:10.16182/j.issn1004731x.joss.21-0734.

Song Y R, Bao Y L, Li R Q. A Two-layer Network Propagation Model of Awareness Diffusion and SEIR Epidemic[J]. *J Syst Simul*, 2022, **34**(11): 2437−2447. DOI:10.16182/j.issn1004731x.joss.21-0734.

[20] Zhou H, Ma Y H, Chen H Z, *et al*. The Dynamic Coupling Mechanism of Information and Epidemic Propagations Considering Individual Mobility in Two-layer Network Framework[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2024, **130**: 107764. DOI:10.1016/j.cnsns.2023.107764.

[21] Wang H, Ma C, Chen H S, *et al*. Effects of Asymptomatic Infection and Self-initiated Awareness on the Coupled Disease-awareness Dynamics in Multiplex Networks[J]. *Appl Math Comput*, 2021, **400**(C): 126084. DOI:10.1016/j.amc.2021.126084.