doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023299

Frobenius 扩张下的 $\mathrm{PGF}_{\mathcal{FI}_n}$-模与 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模

樊甲梅, 白 洁, 赵仁育
(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 设 $R\subset S$ 是环的 Frobenius 扩张, M 是一个 S-模. 证明如果 $R\subset S$ 是可分 Frobenius 扩张, 则 ${}_SM$ 是投射余可解的 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模(Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模)当且仅当 ${}_RM$ 是投射余可解的 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模(Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模).

关键词: Frobenius 扩张; 可分 Frobenius 扩张; 投射余可解的 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模; Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)03-0515-06

$\mathrm{PGF}_{\mathcal{FI}_n}$-Modules and Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-Flat Modules under Frobenius Extensions

FAN Jiamei, BAI Jie, ZHAO Renyu
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: Let $R\subset S$ be a Frobenius extension of rings and M be an S-module. We prove that if $R\subset S$ is a separable Frobenius extension, then ${}_SM$ is a projectively coresolved Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-flat module (Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-flat module) if and only if ${}_RM$ is a projectively coresolved Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-flat module (Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-flat module).

Keywords: Frobenius extension; separable Frobenius extension; projectively coresolved Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-flat module; Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-flat module

近年来, 环的 Frobenius 扩张下的 Gorenstein 同调性质研究得到广泛关注[1-7]. 设 $R\subset S$ 是环的 Frobenius 扩张, Ren[1] 和 Zhao[2] 证明了 S-模 M 是 Gorenstein 投射(内射)的当且仅当 M 作为 R-模是 Gorenstein 投射(内射)的; Hu 等[3] 证明了 S-模 M 是 Gorenstein 平坦的当且仅当 M 作为 R-模是 Gorenstein 平坦的.

Bravo 等[8] 利用有限 n-表现模定义了 FP_n-内射模和 FP_n-平坦模, 之后, 与这两类模相关的相对同调代数理论得到广泛关注. 作为投射余可解的 Gorenstein 平坦模(Gorenstein 平坦模)的推广, Estrada 等[9] 用 FP_n-内射模代替内射模, 引入并研究了投射余可解的 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模(Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模). 受上述研究工作的启发, 本文讨论投射余可解的 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模和 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模在环的 Frobenius 扩张下的保持性.

收稿日期: 2023-07-18. **网络首发日期:** 2024-03-08.

第一作者简介: 樊甲梅(1997—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事环的同调理论的研究, E-mail: 2015293016@qq.com. **通信作者简介:** 赵仁育(1977—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事环的同调理论的研究, E-mail: zhaory@nwnu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11861055; 12061061).

网络首发地址: https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240305.1451.001.

1 预备知识

本文中 R 和 S 均是有单位元的结合环，R-模或 S-模均指左 R-模或左 S-模，右 R-模或右 S-模记为 R^{op}-模或 S^{op}-模. 用 $\mathrm{Mod}(R)$($\mathrm{Mod}(S)$)表示 R-模(S-模)范畴，${}_RM$ 表示 M 是 R-模，M_R 表示 M 是 R^{op}-模，${}_SM_R$ 表示 M 是(S,R)-双模. 用 $\mathscr{P}(R)$，$\mathscr{I}(R)$和 $\mathscr{F}(R)$分别表示投射 R-模、内射 R-模和平坦 R-模的类.

首先介绍 Frobenius 扩张的相关知识. 用 $R\subset S$ 表示环扩张 l：$R\hookrightarrow S$. 自然双模 ${}_RS_R$ 定义为 $rsr'=l(r)\cdot s\cdot l(r')$，其中 $r,r'\in R$，$s\in S$. 类似地，有 ${}_RS$，${}_RS_S$ 和 ${}_SS_R$ 等.

定义 1[10] 如果下列等价条件之一成立，则称环扩张 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张：

1) 函子 ${}_SS_R\otimes_R$-和 $\mathrm{Hom}_R({}_RS_S,-)$自然等价；

2) 函子 $-\otimes_R{}_RS_S$ 和 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}({}_SS_R,-)$自然等价；

3) ${}_RS$ 是有限生成投射模，且 ${}_SS_R\cong({}_RS_S)^*:=\mathrm{Hom}_R({}_RS_S,R)$；

4) S_R 是有限生成投射模，且 ${}_RS_S\cong({}_SS_R)^*:=\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}({}_SS_R,R)$；

5) 存在一个(R,R)-同态 τ：$S\to R$ 和 S 中元素 x_i,y_i，使得对任意 $s\in S$，有

$$\sum_i x_i\tau(y_is)=s,\qquad \sum_i\tau(sx_i)y_i=s.$$

定义 2[11] 设 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张，如果(S,S)-双模同态 φ：$S\otimes_RS\to S$，$s\otimes_Rs'\mapsto ss'$是可裂满的，则称 $R\subset S$ 是可分 Frobenius 扩张.

设 M 是 S-模，则存在满的 S-模同态 π：$S\otimes_RM\to M$，$s\otimes_Rm\mapsto sm$，并且 π 作为 R-同态是可裂的，但一般地，π 作为 S-同态未必是可裂的.

引理 1[11] 设 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张，则 $R\subset S$ 是可分 Frobenius 扩张当且仅当对任意 S-模 M，S-模同态 π：$S\otimes_RM\to M$ 是可裂满同态.

下面给出 Frobenius 扩张的一些实例.

例 1 1) 对任意的有限群 G，$\mathbb{Z}G$ 是 $\mathbb{Z}$ 的可分 Frobenius 扩张[11]；

2) 商环 $R[x]/(x^2)$是环 R 的 Frobenius 扩张[11]；

3) 设 n 是一个正整数，则环 R 上的 n 阶全矩阵代数 $M_n(R)$是 R 上的 n 阶中心对称矩阵代数 $S_n(R)$的一个可分 Frobenius 扩张[12]；

4) 设 R 是一个交换代数，S 是 R 上的一个 Azumaya 代数，则 S 是 R 的可分 Frobenius 扩张[10]；

5) 若 $R\subset S$ 是优越扩张，则 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张；特别地，当 R 是交换环时，$R\subset S$ 是可分 Frobenius 扩张. 文献[13]给出了优越扩张及优越扩张的实例.

定义 3[8] 设 n 是非负整数或∞.

1) 如果存在正合列

$$F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to M\to 0,$$

则称 R^{op}-模 M 是有限 n-表示的，其中 F_i 是有限生成自由(或投射)R^{op}-模，$i=0,1,2,\cdots,n$.

2) 如果对任意有限 n-表示 R^{op}-模 M，$\mathrm{Ext}^1_{R^{\mathrm{op}}}(M,E)=0$，则称 R^{op}-模 E 是 FP_n-内射的.

下面将 FP_n-内射 R^{op}-模的类记为 $\mathscr{FI}_n(R^{\mathrm{op}})$. 当 $n=0$ 时，FP_0-内射 R^{op}-模即为内射 R^{op}-模；当 $n=1$ 时，FP_1-内射 R^{op}-模即为 FP-内射 R^{op}-模；当 $n=\infty$时，FP_∞-内射 R^{op}-模即为弱内射 R^{op}-模[14]或绝对 clean 模[15]. 显然，

$$\mathscr{FI}_0(R^{\mathrm{op}})\subseteq\mathscr{FI}_1(R^{\mathrm{op}})\subseteq\cdots\subseteq\mathscr{FI}_\infty(R^{\mathrm{op}}).$$

引理 2 设 R,S 是环，N 是(R,S)-双模. 如果 ${}_RN$ 是平坦的，N_S 是有限生成投射的，则对任意的有限 n-表示 R^{op}-模 M，$M\otimes_RN$ 是有限 n-表示 S^{op}-模.

证明：设 $F\cong R^m$ 是有限生成自由 R^{op}-模，则

$$F\otimes_RN_S\cong R^m\otimes_RN_S\cong(R\otimes_RN_S)^{(m)}\cong N_S{}^{(m)}.$$

于是由 N_S 是有限生成投射模知，$F\otimes_RN_S$ 是有限生成投射 S^{op}-模. 进而由 ${}_RN$ 平坦及有限 n-表示模的

定义可得 $M\otimes_R N$ 是有限 n-表示 S^{op}-模.

引理 3　设 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张.

1) 如果 M_S 是有限 n-表示的，则 M_R 是有限 n-表示的；

2) 如果 M_R 是有限 n-表示的，则 $M\otimes_R S$ 是有限 n-表示的 S^{op}-模.

证明：因为 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张，所以 ${}_RS$ 和 S_R 都是有限生成投射模. 故由引理 2 知结论成立.

引理 4　设 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张，E 是 S^{op}-模. 考虑下列陈述：

1) E_R 是 FP_n-内射的；

2) E_S 是 FP_n-内射的；

3) $E\otimes_R S$ 是 FP_n-内射 S^{op}-模.

则 2)⇒1)⇔3). 如果 E_S 是 $E\otimes_R S_S$ 的直和项，则 2)⇔1)⇔3).

证明：2)⇒1). 设 E_S 是 FP_n-内射的，N 是有限 n-表示 R^{op}-模，则由引理 3 知 $N\otimes_R S$ 是有限 n-表示 S^{op}-模，故 $\mathrm{Ext}^1_{S^{\mathrm{op}}}(N\otimes_R S,E)=0$. 由于

$$\mathrm{Ext}^1_{R^{\mathrm{op}}}(N,E)\cong \mathrm{Ext}^1_{R^{\mathrm{op}}}(N,\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}({}_RS_S,E))\cong \mathrm{Ext}^1_{S^{\mathrm{op}}}(N\otimes_R S,E),$$

所以 $\mathrm{Ext}^1_{R^{\mathrm{op}}}(N,E)=0$. 因此 E_R 是 FP_n-内射的.

1)⇒3). 设 N 是有限 n-表示 S^{op}-模，则由引理 3 知 N_R 是有限 n-表示的，故 $\mathrm{Ext}^1_{R^{\mathrm{op}}}(N,E)=0$. 于是由同构

$$\mathrm{Ext}^1_{S^{\mathrm{op}}}(N,E\otimes_R S)\cong \mathrm{Ext}^1_{S^{\mathrm{op}}}(N,\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}({}_SS_R,E))\cong \mathrm{Ext}^1_{R^{\mathrm{op}}}(N\otimes_S S,E)\cong \mathrm{Ext}^1_{R^{\mathrm{op}}}(N,E)$$

得 $\mathrm{Ext}^1_{S^{\mathrm{op}}}(N,E\otimes_R S)=0$. 因此 $E\otimes_R S$ 是 FP_n-内射 S^{op}-模.

3)⇒1). 因为 E_R 是 $E\otimes_R S_R$ 的直和项，并且由 2)⇒1)知 $E\otimes_R S$ 作为 R^{op}-模是 FP_n-内射的. 所以 E 是 FP_n-内射 R^{op}-模.

当 E_S 是 $E\otimes_R S_S$ 的直和项时，3)⇒2)显然成立. 从而 1)⇔2)⇔3). 证毕.

2　Frobenius 扩张下的 $\mathrm{PGF}_{\mathcal{FI}_n}$-模

下面讨论环的 Frobenius 扩张下的投射余可解的 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模，其中 n 是非负整数或∞.

定义 4[9,16]　如果存在 $\mathcal{FI}_n(R^{\mathrm{op}})\otimes_R -$-正合的投射 R-模的正合序列

$$\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(P_0\to P^0)$，则称 R-模 M 是投射余可解的 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模，简称为 $\mathrm{PGF}_{\mathcal{FI}_n}$-模.

下面将 $\mathrm{PGF}_{\mathcal{FI}_n}R$-模的类记为 $\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_n}(R)$.

例 2　1) $\mathrm{PGF}_{\mathcal{FI}_0}$ R-模即为文献[17]中的 PGF R-模，且由文献[18]中引理 5.3 知，$\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_1}(R)=\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_0}(R)$. 将 PGF R-模的类记为 $\mathcal{PGF}(R)$.

2) 当 $n>1$ 时，由文献[16]中定理 3.6 知，$\mathrm{PGF}_{\mathcal{FI}_n}$ R-模即为文献[16]中的 Gorenstein FP_n-投射 R-模. 特别地，$\mathrm{PGF}_{\mathcal{FI}_\infty}$ R-模即为 Gorenstein AC-投射模[15]. 将 Gorenstein AC-投射 R-模的类记为 $\mathcal{GP}_{ac}(R)$.

3) 由于 $\mathcal{FI}_0(R^{\mathrm{op}})\subseteq\mathcal{FI}_1(R^{\mathrm{op}})\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{FI}_\infty(R^{\mathrm{op}})$，所以由其定义和 1)知

$$\mathcal{GP}_{ac}(R)=\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_\infty}(R)\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_2}(R)\subseteq\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_1}(R)=\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_0}(R)=\mathcal{PGF}(R).$$

下面讨论环的 Frobenius 扩张下的 $\mathrm{PGF}_{\mathcal{FI}_n}$-模. 由文献[9]中定理 2.10 和文献[19]中命题 1.4 可知下列引理成立.

引理 5　$\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_n}(R)$关于扩张和直和项封闭.

命题 1　设 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张，M 是 S-模. 若 $M\in\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_n}(S)$，则 $M\in\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_n}(R)$.

证明：设 $M\in\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_n}(S)$，则存在 $\mathcal{FI}_n(S^{\mathrm{op}})\otimes_S -$-正合的正合序列 $\mathbb{P}$：$\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Im}(P_0\to P^0)$，其中 $P_i,P^i\in\mathcal{P}(S)$，$i\geqslant 0$. 于是有 R-模的正合序列

$${}_RS\otimes_S\mathbb{P}:\ \cdots\to {}_RS\otimes_S P_1\to {}_RS\otimes_S P_0\to {}_RS\otimes_S P^0\to {}_RS\otimes_S P^1\to\cdots,$$

使得${}_RM\cong\mathrm{Im}({}_RS\otimes_SP_0\to{}_RS\otimes_SP^0)$，其中${}_RS\otimes_SP_i,{}_RS\otimes_SP^i\in\mathscr{P}(R)$，$i\geqslant0$.

设$E\in\mathscr{FI}_n(R^{\mathrm{op}})$，则由引理4知，$E\otimes_RS_S$是$FP_n$-内射$S^{\mathrm{op}}$-模. 故$(E\otimes_RS)\otimes_S\mathbb{P}$正合. 从而由

$$E\otimes_R({}_RS\otimes_S\mathbb{P})\cong(E\otimes_RS)\otimes_S\mathbb{P}$$

知$E\otimes_R({}_RS\otimes_S\mathbb{P})$正合. 因此$M\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$. 证毕.

命题2 设$R\subset S$是Frobenius扩张，M是R-模，则$M\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$当且仅当$S\otimes_RM\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(S)$.

证明：必要性. 设$M\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$，则存在$\mathscr{FI}_n(R)^{\mathrm{op}}\otimes_R$--正合的正合序列$\mathbb{P}$：$\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得$M\cong\mathrm{Im}(P_0\to P^0)$，其中$P_i,P^i\in\mathscr{P}(R)$. 于是有投射$S$-模的正合序列

$$S\otimes_R\mathbb{P}:\cdots\to S\otimes_RP_1\to S\otimes_RP_0\to S\otimes_RP^0\to S\otimes_RP^1\to\cdots,$$

使得$S\otimes_RM\cong\mathrm{Im}(S\otimes_RP_0\to S\otimes_RP^0)$. 设$E\in\mathscr{FI}_n(S^{\mathrm{op}})$，则由引理4知$E\otimes_SS_R\in\mathscr{FI}_n(R^{\mathrm{op}})$，故$E\otimes_S(S\otimes_R\mathbb{P})\cong(E\otimes_SS)\otimes_R\mathbb{P}$正合. 因此$S\otimes_RM\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(S)$.

充分性. 设$S\otimes_RM\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(S)$，则由命题1知${}_R(S\otimes_RM)\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$. 而${}_RM$是${}_R(S\otimes_RM)$的直和项，所以由引理5知$M\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$. 证毕.

引理6 设$R\subset S$是Frobenius扩张，M是S-模，$E\in\mathscr{FI}_n(S^{\mathrm{op}})$. 如果$M\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$，并且$E_S$是$\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}({}_SS_R,E_R)$的直和项，则对任意$i\geqslant1$，$\mathrm{Tor}_i^S(E,M)=0$.

证明：因为$E\in\mathscr{FI}_n(S^{\mathrm{op}})$，所以由引理4知$E\in\mathscr{FI}_n(R^{\mathrm{op}})$. 由于$M\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$，所以$\mathrm{Tor}_i^R(E,M)=0$. 从而由

$$\mathrm{Tor}_i^S(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}({}_SS_R,E),M)\cong\mathrm{Tor}_i^S(E\otimes_RS,M)\cong\mathrm{Tor}_i^R(E,{}_RS\otimes_SM)\cong\mathrm{Tor}_i^R(E,M)$$

得$\mathrm{Tor}_i^S(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}({}_SS_R,E),M)=0$. 因此，由$E_S$是$\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}({}_SS_R,E_R)$的直和项知，$\mathrm{Tor}_i^S(E,M)=0$.

定理1 设$R\subset S$是Frobenius扩张，M是S-模. 如果对任意的$E\in\mathscr{FI}_n(S^{\mathrm{op}})$，$E_S$是$\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}({}_SS_R,E)$的直和项，则$M\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(S)$当且仅当$M\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$. 特别地，如果$R\subset S$是可分Frobenius扩张，则$M\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(S)$当且仅当$M\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$.

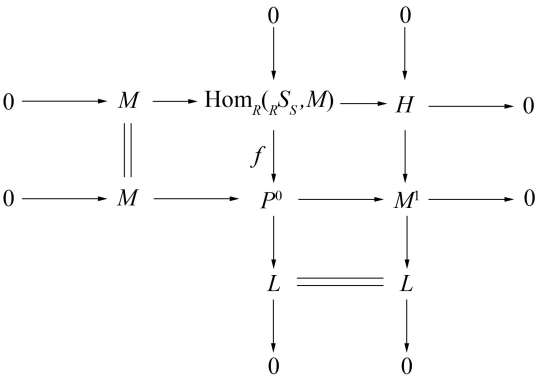
证明：由命题1知只需证明充分性. 由引理6知，对任意的$E\in\mathscr{FI}_n(S^{\mathrm{op}})$，都有$\mathrm{Tor}_i^S(E,M)=0$，$i\geqslant1$. 下证存在$\mathscr{FI}_n(S^{\mathrm{op}})\otimes_S$--正合的正合序列$0\to M\to P^0\to P^1\to\cdots$，其中$P^i\in\mathscr{P}(S)(i\geqslant0)$即可. 因为$M\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$，所以由命题2知

$$\mathrm{Hom}_R({}_RS_S,M)\cong S\otimes_RM\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(S),$$

故存在正合序列$0\to\mathrm{Hom}_R({}_RS_S,M)\to P^0\to L\to0$，其中$P^0\in\mathscr{P}(S)$，$L\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(S)$. 对${}_SM$，有$S$-模的正合序列

$$0\to M\xrightarrow{\ i\ }\mathrm{Hom}_R({}_RS_S,M)\to H\to0,$$

其中$i(m)(s)=sm$，$m\in M$，$s\in S$，$H=\mathrm{Coker}(i)$. 于是有如下S-模的推出图：



注意到i作为R-同态是可裂的，所以由引理5和命题1知，$H\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$. 由命题1知$L\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$，再由引理5知$M^1\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$. 由引理6知，对任意的$E\in\mathscr{FI}_n(S^{\mathrm{op}})$，$\mathrm{Tor}_1^S(E,M^1)=0$. 于是有$\mathscr{FI}_n(S^{\mathrm{op}})\otimes_S$--正合的正合序列$0\to M\to P^0\to M^1\to0$，其中$P^0\in\mathscr{P}(S)$，$M^1\in\mathscr{PGF}_{\mathscr{FI}_n}(R)$. 重复上述过程可得$\mathscr{FI}_n(S^{\mathrm{op}})\otimes_S$--正合的正合序列$0\to M\to P^0\to P^1\to\cdots$，其中$P^i\in\mathscr{P}(S)$. 综上，

$M\in\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_n}(S)$.

当 $R\subset S$ 是可分 Frobenius 扩张时，由引理 1 知，对任意的 $E\in\mathcal{FI}_n(S^{op})$，$E_S$ 都是 $\mathrm{Hom}_{R^{op}}({}_SS_R,E)$ 的直和项. 因此，当 $R\subset S$ 是可分 Frobenius 扩张时，$M\in\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_n}(S)$当且仅当 $M\in\mathcal{PGF}_{\mathcal{FI}_n}(R)$. 证毕.

文献[4]证明了：如果在 R-模的正合序列 $0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$ 中，若 $M_1,M_2\in\mathcal{PGF}(R)$，并且对任意的 $E\in\mathcal{I}(R^{op})$，都有 $\mathrm{Tor}_i^R(E,M_3)=0$，则 $M_3\in\mathcal{PGF}(R)$成立，从而对任意的 S-模 M，$M\in\mathcal{PGF}(R)$ 当且仅当 $M\in\mathcal{PGF}(S)$. 注意到当 $n=0$ 时，$\mathcal{FI}_0(S^{op})=\mathcal{I}(S^{op})$，所以对任意的 $E\in\mathcal{FI}_0(S^{op})$，$S^{op}$-模的序列

$$0\to E_S\xrightarrow{\ i\ }\mathrm{Hom}_{R^{op}}({}_SS_R,E_R)\to\mathrm{Coker}\ i\to 0$$

总是可裂的，即 E_S 是 $\mathrm{Hom}_{R^{op}}({}_SS_R,E_R)$的直和项. 从而由命题 2、定理 1 和例 2 可得如下推论.

推论 1　设 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张，M 是 S-模，则下列结论等价：

1) $M\in\mathcal{PGF}(R)$；

2) $M\in\mathcal{PGF}(S)$；

3) $S\otimes_RM\in\mathcal{PGF}(S)$.

由例 2 中 2)和定理 1 可得如下推论.

推论 2[4]　设 $R\subset S$ 是可分 Frobenius 扩张，M 是 S-模，则 $M\in\mathcal{GP}_{ac}(S)$当且仅当 $M\in\mathcal{GP}_{ac}(R)$.

3　Frobenius 扩张下的 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦模

定义 5[9]　设 n 是非负整数或∞，如果存在 $\mathcal{FI}_n(R^{op})\otimes_R$--正合的平坦 R-模的正合序列

$$\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(F_0\to F^0)$，则称 R-模 M 是 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦的.

下面将 Gorenstein $\mathcal{FI}_n$-平坦 R-模的类记为 $\mathcal{GF}_{\mathcal{FI}_n}(R)$.

例 3　1) Gorenstein $\mathcal{FI}_0$-平坦 R-模即为 Gorenstein 平坦 R-模[19]，并且由文献[18]中引理 5.3 知，Gorenstein $\mathcal{FI}_1$-平坦 R-模也是 Gorenstein 平坦 R-模. 将 Gorenstein 平坦 R-模的类记为 $\mathcal{GF}(R)$.

2) Gorenstein $\mathcal{FI}_\infty$-平坦模即为文献[20]中的 Gorenstein AC-平坦模. 将 Gorenstein AC-平坦模的类记为 $\mathcal{GF}_{ac}(R)$.

3) 由于 $\mathcal{FI}_0(R^{op})\subseteq\mathcal{FI}_1(R^{op})\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{FI}_\infty(R^{op})$，所以

$$\mathcal{GF}_{ac}(R)=\mathcal{GF}_{\mathcal{FI}_\infty}(R)\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{GF}_{\mathcal{FI}_2}(R)\subseteq\mathcal{GF}_{\mathcal{FI}_1}(R)=\mathcal{GF}_{\mathcal{FI}_0}(R)=\mathcal{GF}(R).$$

由文献[9]中例 2.21 可知下列引理成立.

引理 7　$\mathcal{GF}_{\mathcal{FI}_n}(R)$关于扩张与直和项封闭.

类似于命题 1、命题 2 和定理 1 可证明下列结论.

定理 2　设 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张，M 是 S-模，考虑下列陈述：

1) $M\in\mathcal{GF}_{\mathcal{FI}_n}(R)$；

2) $M\in\mathcal{GF}_{\mathcal{FI}_n}(S)$；

3) $S\otimes_RM\in\mathcal{GF}_{\mathcal{FI}_n}(S)$.

则有 2)⇒1)⇔3). 进一步，如果对任意的 $E\in\mathcal{FI}_n(S^{op})$，$E_S$ 是 $\mathrm{Hom}_{R^{op}}({}_SS_R,E)$的直和项，则 1)⇔2)⇔3)成立. 特别地，如果 $R\subset S$ 是可分 Frobenius 扩张，则 1)⇔2)⇔3).

由定理 2 可得下列推论.

推论 3[3]　设 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张，M 是 S-模，则下列结论等价：

1) $M\in\mathcal{GF}(R)$；

2) $M\in\mathcal{GF}(S)$；

3) $S\otimes_RM\in\mathcal{GF}(S)$.

推论 4　设 $R\subset S$ 是 Frobenius 扩张，M 是 S-模，考虑下列陈述：

1) $M\in\mathcal{GF}_{ac}(R)$；

2) $M\in\mathcal{GF}_{ac}(S)$；

3) $S\otimes_R M\in\mathcal{GF}_{ac}(S)$.

则有2)⇒1)⇔3). 进一步,如果对任意的弱内射S^{op}-模E,都有E_S是$\mathrm{Hom}_{R^{op}}({}_SS_R,E_R)$的直和项,则1)⇔2)⇔3)成立. 特别地,当$R\subset S$是可分Frobenius扩张时,1)⇔2)⇔3)成立.

参 考 文 献

[1] REN W. Gorenstein Projective and Injective Dimensions over Frobenius Extensions [J]. Communications in Algebra, 2018, 46(12): 5348-5354.

[2] ZHAO Z B. Gorenstein Homological Invariant Properties under Frobenius Extensions [J]. Science China: Mathematics, 2019, 62(12): 2487-2496.

[3] HU J S, LI H H, GENG Y X, et al. Frobenius Functors and Gorenstein Flat Dimensions [J]. Communications in Algebra, 2020, 48(3): 1257-1265.

[4] KONG F D, WU D J. Gorenstein Modules under Frobenius Extensions [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2020, 57(6): 1567-1579.

[5] WANG Z P, YANG P F, ZHANG R J. Ding Injective Modules over Frobenius Extensions [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2021, 58(1): 217-224.

[6] FU D X, XU X W, ZHAO Z B. Generalized Tilting Modules and Frobenius Extensions [J]. Electronic Research Archive, 2022, 30(9): 3337-3350.

[7] ZHAO Z B. G_C-Projectivity and Injectivity under Frobenius Extensions [J]. Communications in Algebra, 2022, 50(12): 5155-5170.

[8] BRAVO D, PÉREZ M A. Finiteness Conditions and Cotorsion Pairs [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2017, 221(6): 1249-1267.

[9] ESTRADA S, IACOB A, PÉREZ M A. Model Structures and Relative Gorenstein Flat Modules and Chain Complexes [J]. Contemporary Mathematics, 2020, 751: 135-175.

[10] KADISON L. New Examples of Frobenius Extensions [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999: 3-4.

[11] REN W. Gorenstein Projective Modules and Frobenius Extensions [J]. Science China: Mathematics, 2018, 61(7): 1175-1186.

[12] XI C C, YIN S J. Cellularity of Centrosymmetric Matrix Algebras and Frobenius Extensions [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2020, 590: 317-329.

[13] HUANG Z Y, SUN J X. Invariant Properties of Represenations under Excellent Extensions [J]. Journal of Algebra, 2012, 358: 87-101.

[14] GAO Z H, WANG F G. Weak Injective and Weak Flat Modules [J]. Communications in Algebra, 2015, 43(9): 3857-3868.

[15] BRAVO D, GILLESPIE J, HOVEY M. The Stable Module Category of a General Ring [EB/OL]. (2014-05-22) [2023-04-16]. https://arxiv.org/pdf/1405.5768.pdf.

[16] IACOB A. Generalized Gorenstein Modules [J]. Algebra Colloquium, 2022, 29(4): 651-662.

[17] ŠAROCH J, ŠTOVÍČEK J. Singular Compactness and Definability for Σ-Cotorsion and Gorenstein Modules [J]. Selecta Mathematica, 2020, 26(2): 23-63.

[18] ESTRADA S, GILLESPIE J. The Projective Stable Category of a Coherent Scheme [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A, 2019, 149(1): 15-43.

[19] HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189(1/2/3): 167-193.

[20] BRAVO D, ESTRADA S, IACOB A. FP_n-Injective, FP_n-Flat Covers and Preenvelopes, and Gorenstein AC-Flat Covers [J]. Algebra Colloquium, 2018, 25(2): 319-334.

(责任编辑:赵立芹)