

Caputo 分数阶微分方程的 广义比较原理*

刘 招, 郝晓玲

(内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021)

摘要:重点研究高阶 Caputo 分数阶微分方程的比较原理。通过利用高阶 Caputo 导数的微分性质、Caputo 分数阶微分方程最大解的存在性定理,以及含 Caputo 导数的分数阶微分方程解的单调性,最终建立了 Caputo 分数阶微分方程的广义比较原理。

关键词:Caputo 分数阶微分方程; Caputo 导数; 最大解; 广义比较原理

中图分类号:O175 **文献标志码:**A

分数阶微分方程^[1]理论,特别是基于 Caputo 型导数的模型,因其能有效描述具有记忆和遗传特性的系统,已在物理学、工程学、电化学及其他领域获得了广泛应用。与经典的整数阶模型相比,分数阶微分算子(包括导数和积分)为描述材料和过程的记忆依赖性^[2]提供了更强大的数学工具,在模拟聚合物等复杂材料的力学和电学特性方面展现出显著优势。在各种分数阶导数的定义中, Caputo 型导数^[1]因其独特的初始条件形式而具有更清晰的物理意义:其初始条件与传统整数阶微分方程保持一致,仅需指定具有直接物理解释的初始值^[3],如 $x(0), x'(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$ 。这一特点使其成为应用于数学和工程建模的重要工具^[4]。

鉴于 Caputo 分数阶微分方程在模拟实际系统时具有更强的物理合理性,研究其解的性质以及数值求解方法变得尤为重要。然而,这类方程的解析解通常只能在特殊情况下求得,这导致近年来对其存在性理论、定性性质和数值求解方法的研究兴趣日益增长。在此研究背景下,比较原理是分析微分方程解性质的关键工具^[5],它在分数阶情形下与在整数阶方程中同样重要。它不仅为 Lyapunov 稳定性分析提供了有效方法,而且在数值解理论和误差分析中起着关键作用。建立完善的 Caputo 分数阶微分方程的比较原理,对于完善分数阶微积分的理论体系以及推动分数阶模型的实际工程应用都具有重要意义^[6]。

求解 Riemann-Liouville 型分数阶微分方程的初始条件通常缺乏明确的物理意义,更常用于纯数学研究^[7]。而 Caputo 分数阶微分方程的求解则通过采用传统的物理初始条件,有效克服了上述局限。因此,建立 Caputo 分数阶微分方程的比较原理对于研究其解的性质至关重要。Lakshmikantham 等^[8]提出了 Caputo 分数阶常微分方程的一个比较结果,但该结论要求比较函数 $m(t)$ 满足局部 Hölder 连续性。然后, Lakshmikantham 等^[9]提出了另一项改进的比较结果,将假设条件放宽,仅要求比较方程的向量场函数 $g(t, u)$ 关于 u 非减。

近年来,关于分数阶比较原理的研究结果主要针对其他类型分数阶导数(通常被称为广义 Ca-

* 收稿日期:2025-10-28; 修回日期:2025-12-12

基金项目:国家自然科学基金项目(12361027)

作者简介:刘 招(2001—),男,陕西商洛人,2023 级硕士研究生。E-mail:1362816719@qq.com

通信作者:郝晓玲(1983—),女,内蒙古呼和浩特人,教授,博士。主要从事微分算子谱分析理论研究。

E-mail:xlhao1883@163.com

pato 分数阶导数)的常微分方程。2014年, Wang等^[6]通过假设向量场函数的局部 Lipschitz 连续性(解的唯一性)和比较函数的局部 Hölder 连续性, 证明了分数阶常微分方程的一个比较定理, 比较不等式中涉及了一种不同于 Caputo、Riemann-Liouville 以及文献[8]中定义的分数阶导数, 这种不同的分数阶导数被称为广义 Caputo 分数阶导数, 定义为

$$D_{t_0}^{q+} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{D^+ x(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau,$$

其中, $D^+ x(t)$ 表示 $x(t)$ 的右上 Dini 导数。显然, 该导数与标准 Caputo 分数阶导数的关系, 类似于函数的右上 Dini 导数与其一阶导数的关系。

对于涉及阶数为 $0 \leq n-1 < \alpha \leq n$ 的 Caputo 导数的分数阶微分方程的比较原理研究仍是一个未被探索的领域。本文旨在建立阶数 $0 \leq n-1 < \alpha \leq n$ 的 Caputo 分数阶微分方程的比较原理, 并研究此类方程最大解的存在性。

1 预备知识

1.1 Caputo 分数阶导数

Riemann-Liouville 分数阶积分公式^[1]推广了著名的 Cauchy 积分公式。设 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$, 记 $E = (a, b)$, 则对于任意整数 $k \in \mathbb{N}$, 基于左端点 $x = a$ 的 k 重积分算子 ${}_a I_x^k$ 可递归定义为 ${}_a I_x^k f(x) = \int_a^x {}_a I_x^{k-1} f(s) ds, k = 1, 2, \dots$, 则对于 $k \geq 1$ 有如下 Cauchy 迭代积分公式:

$${}_a I_x^k f(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-s)^{k-1} f(s) ds.$$

类似地, 有

$${}_x I_b^k f(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_x^b (s-x)^{k-1} f(s) ds.$$

定义 1^[10] 设 $f \in L^1(E)$ 且 $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$ 。若相应积分存在, 则函数 f 在左端点 $x = a$ 处的 α 阶左 Caputo 分数阶导数定义为

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) := {}_a I_x^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \quad (1)$$

类似地, 若相应积分存在, 其在右端点 $x = b$ 处的 α 阶右 Caputo 分数阶导数定义为

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) := (-1)^n ({}_x I_b^{n-\alpha} f^{(n)})(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (s-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \quad (2)$$

定义 2^[11] 设 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 且 $\{g_k\}$ 是函数序列, 其中 $g_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 则该序列

- ① 一致有界当且仅当存在 $M > 0$, 使得对于所有 k 和 $t \in [a, b]$, 有 $|g_k(t)| \leq M$;
- ② 等度连续当且仅当对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于所有 k 和 $t_1, t_2 \in [a, b], |t_1 - t_2| < \delta$, 使得 $|g_k(t_1) - g_k(t_2)| < \epsilon$ 成立;
- ③ 一致收敛当且仅当对于任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $k > N$, 对于所有 $t \in [a, b]$, 使得 $|g_k(t_1) - g_k(t_2)| < \epsilon$ 成立。

引理 1^[12] 如果 $\{g_k\}$ 是定义在 $[a, b]$ 上的一致有界且等度连续的函数序列, 则存在函数序列的一个子列在 $[a, b]$ 上一致收敛。

定义 3^[13] 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开区域, $\alpha \in (0, 1]$ 为 Hölder 指数。函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 在 Ω 上是 α -Hölder 连续的, 如果存在常数 $C > 0$, 使得对于所有 $x, y \in \Omega$, 有 $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$, 其中, 最小的常数 C 被称为 f 的 Hölder 系数, 记为 $[f]_{C^{0,\alpha}}$ 。

定义 4^[14] 对于非负整数 k 和 Hölder 指数 $\alpha \in (0, 1]$, Hölder 空间定义为 $C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega):$

$\|f\|_{C^{k,\alpha}} < \infty\}$, 其范数为 $\|f\|_{C^{k,\alpha}} = \|f\|_{C^k} + \max_{|j|=k} [D^j f]_{C^{0,\alpha}}$, 其中, C^k -范数为 $\|f\|_{C^k} = \max_{|j| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^j f(x)|$, 而 Hölder 半范数定义为

$$[f]_{C^{0,\alpha}} = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

引理 2^[14] 设 $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$, 如果 $f \in C^{n-1, \gamma}(\bar{E}), \gamma \in (0, 1]$, 则对于任意 $\alpha - n - 1 \in (0, \gamma)$, 有

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{\Gamma(n-\alpha)(x-a)^{\alpha-n+1}} + \frac{\alpha-n+1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(s)}{(x-s)^{\alpha-n+2}} ds \quad (3)$$

为方便起见, 此后令 $E = (0, T)$, 记 ${}_a D_x^\alpha$ 为 ${}_a^C D_x^\alpha$.

1.2 Caputo 分数阶微分方程的初值问题

考虑以下 Caputo 分数阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} {}_0 D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \\ x^{(k)}(0) = x_k, k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (4)$$

其中, $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ 且 $0 \leq n-1 < \alpha \leq n$. 式(4)等价于以下 Volterra 分数阶积分方程^[15]:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds.$$

引理 3 假设 $f(t, x)$ 和 $F(t, x)$ 是定义在 $G = [0, T] \times \mathbb{R}$ 上的两个连续函数, 满足不等式 $f(t, x) < F(t, x), \forall (t, x) \in G$.

假设 $x = \phi(t)$ 和 $x = \psi(t)$ 分别是以下初值问题的解:

$$\begin{cases} {}_0 D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \\ x^{(k)}(0) = x_k, k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} {}_0 D_t^\alpha x(t) = F(t, x(t)) \\ x^{(k)}(0) = x_k, k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

则对于任意的 $t \in (0, T]$, 有 $\phi(t) < \psi(t)$.

引理 4 假设 $f \in C[R_1, \mathbb{R}]$, 其中

$$R_1 = \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq T, \left| x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} \right| \leq K \right\},$$

且存在常数 $M > 0$, 使得在 R_1 上 $|f(t, x)| \leq M$, 则初值问题(4)在区间 $t \in [0, T]$ 上至少存在一个解。

定义 5^[16] 设 $y(t)$ 为初值问题(4)在区间 $t \in [0, T]$ 上的一个解, 如果对于任何其他解 $u(t)$, 对于任意的 $t \in [0, T]$ 都有 $u(t) \leq y(t)$, 则称 $y(t)$ 是初值问题(4)的一个最大解。

引理 5 假设 $f \in C[R_1, \mathbb{R}]$, 其中

$$R_1 = \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq T, \left| x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} \right| \leq K \right\},$$

且存在 $M > 0$, 使得在 R_1 上 $|f(t, x)| \leq M$, 则初值问题(4)在区间 $t \in [0, T]$ 上存在最大解。

注 引理 3、引理 4 和引理 5 来自文献[17]中的定理 1 和定理 3。

2 广义比较原理

考虑以下 Caputo 分数阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)) + \varepsilon \\ x^{(k)}(0) = x_k + \varepsilon, k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (5)$$

定理1 假设 $f \in C[R_1, \mathbb{R}]$, 其中

$$R_1 = \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq T, \left| x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} \right| \leq K \right\},$$

设 $\phi(t, \varepsilon)$ 是初值问题(5)在区间 $t \in [0, T]$ 上的一个解, 则

① 如果 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, 则 $\phi^{(k)}(t, \varepsilon_1) < \phi^{(k)}(t, \varepsilon_2)$ 对于 $k = 0, 1, \dots, n-1$ 成立;

② 存在初值问题(5)的一个解 $\gamma(t)$ 定义在 $t \in [0, T]$ 上, 使得 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi(t, \varepsilon) = \gamma(t)$ 在 $t \in [0, T]$ 上

一致成立, 且 $\gamma(t)$ 是式(4)在 $t \in [0, T]$ 上的最大解。

证明 ① 当 $k=0$ 时, 如果 $\phi(t, \varepsilon_1) < \phi(t, \varepsilon_2)$, 则考虑 $k=1$, 否则, 则一定存在 t_0 , 使得 $\phi(t_0, \varepsilon_1) = \phi(t_0, \varepsilon_2)$, 且对于所有 $t \in [0, t_0]$, 有 $\phi(t, \varepsilon_1) < \phi(t, \varepsilon_2)$, 这是因为如果不存在这样的 t_0 , 则一定存在 t_0^1 使得 $\phi(t_0^1, \varepsilon_1) = \phi(t_0^1, \varepsilon_2)$, 由于 $\phi(t, \varepsilon)$ 的连续性, 可以得到一个单调递减的序列 $\{t_0^n\}$, 因为它是单调有界数列, 则一定收敛, 令其极限为 t_0' , 若 $t_0' = 0$, 因为 $\phi(0, \varepsilon_1) = x_0 + \varepsilon_1 < x_0 + \varepsilon_2 = \phi(0, \varepsilon_2)$, 在零点处矛盾, 于是 $t_0 \neq 0$, 则令 $t_0 = t_0'$ 。

设 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, 则 $\phi^{(k)}(0, \varepsilon_1) = x_k + \varepsilon_1 < x_k + \varepsilon_2 = \phi^{(k)}(0, \varepsilon_2)$ 。假设对于某个 $t_k \in [0, T]$ 和某个 k 有 $\phi^{(k)}(t_k, \varepsilon_1) = \phi^{(k)}(t_k, \varepsilon_2)$, 且对于所有 $t \in [0, t_k]$, 有 $\phi^{(k)}(t, \varepsilon_1) < \phi^{(k)}(t, \varepsilon_2)$, 根据函数关于 t 求导公式 $\phi^{(k+1)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi^{(k)}(t+h) - \phi^{(k)}(t)}{h}$, 由于 $\phi^{(k+1)}(t)$ 是连续的, 只考虑它的左导数, 因此得到 $\phi^{(k+1)}(t_1, \varepsilon_1) > \phi^{(k+1)}(t_1, \varepsilon_2)$, 但是 $\phi^{(k+1)}(0, \varepsilon_1) = x_{k+1} + \varepsilon_1 < x_{k+1} + \varepsilon_2 = \phi^{(k+1)}(0, \varepsilon_2)$, 根据连续性, 则一定存在一个零点, 将其记为 t_{k+1} 。类似地, 将得到点列 $\{t_0, \dots, t_{n-1}\}$, 记点列的最小值为 $t' = \min\{t_0, \dots, t_{n-1}\}$, 则有 $\phi^{(k)}(t', \varepsilon_1) = \phi^{(k)}(t', \varepsilon_2)$, 且对于所有 $t \in [0, t']$, 对所有的 k 有 $\phi^{(k)}(t, \varepsilon_1) < \phi^{(k)}(t, \varepsilon_2)$ 成立, 以及有以下不等式成立:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha (\phi(t_1, \varepsilon_1) - \phi(t_1, \varepsilon_2)) &= \frac{\phi^{(n-1)}(t_1, \varepsilon_1) - \phi^{(n-1)}(t_1, \varepsilon_2) - (\phi^{(n-1)}(0, \varepsilon_1) - \phi^{(n-1)}(0, \varepsilon_2))}{\Gamma(n-\alpha)t_1^{\alpha-n+1}} \\ &\quad + \frac{\alpha-n+1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{t_1} \frac{\phi^{(n-1)}(t_1, \varepsilon_1) - \phi^{(n-1)}(t_1, \varepsilon_2) - (\phi^{(n-1)}(0, \varepsilon_1) - \phi^{(n-1)}(0, \varepsilon_2))}{(t-\tau)^{\alpha-n+2}} d\tau \\ &= \frac{-(\phi^{(n-1)}(0, \varepsilon_1) - \phi^{(n-1)}(0, \varepsilon_2))}{\Gamma(n-\alpha)t_1^{\alpha-n+1}} + \frac{\alpha-n+1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{t_1} \frac{-(\phi^{(n-1)}(0, \varepsilon_1) - \phi^{(n-1)}(0, \varepsilon_2))}{(t-\tau)^{\alpha-n+2}} d\tau \\ &> 0, \end{aligned}$$

这意味着 ${}_0D_t^\alpha \phi(t_1, \varepsilon_1) > {}_0D_t^\alpha \phi(t_1, \varepsilon_2)$ 。然而, 有

$${}_0D_t^\alpha \phi(t, \varepsilon_2) = f(t, \phi(t, \varepsilon_2)) + \varepsilon_2 = f(t, \phi(t, \varepsilon_1)) + \varepsilon_2 > f(t, \phi(t, \varepsilon_1)) + \varepsilon_1 = {}_0D_t^\alpha \phi(t, \varepsilon_1),$$

存在矛盾。因此, 对于 $k = 0, 1, \dots, n-1$, 有 $\phi^{(k)}(t, \varepsilon_1) < \phi^{(k)}(t, \varepsilon_2)$ 。

② 选择一个序列 $\{\varepsilon_m\}$ 使得 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots > \varepsilon_m > 0$ 且当 $m \rightarrow \infty$ 时 $\varepsilon_m \rightarrow 0$ 。设 $\phi_m(t) = \phi(t, \varepsilon_m)$ 是以下方程的解:

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)) + \varepsilon_m \\ x^{(k)}(0) = x_k + \varepsilon_m, k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

可以得到

$$\phi_m(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_k + \varepsilon_m)t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s, \phi_m(s)) + \varepsilon_m] ds,$$

存在常数 N_1 使以下不等式成立:

$$\begin{aligned}
|\phi_m(t)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_k + \varepsilon_m)t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s, \phi_m(s)) + \varepsilon_m] ds \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_k + \varepsilon_m)t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_k + \varepsilon_m)t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{2Mt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right| \\
&\leq N_1.
\end{aligned}$$

对于 $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, 有

$$\begin{aligned}
\phi_m(t_1) - \phi_m(t_2) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_k + \varepsilon_m)(t_1^k - t_2^k)}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} [f(s, \phi_m(s)) + \varepsilon_m] ds \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} [f(s, \phi_m(s)) + \varepsilon_m] ds,
\end{aligned}$$

则存在 $N_2 (N_2 > 0)$ 和 ε , 使得 $|\phi_m(t_1) - \phi_m(t_2)| \leq N_2[(t_2 - t_1) + (t_2^\alpha - t_1^\alpha) + 2(t_2 - t_1)^\alpha] < \varepsilon$, 因此, 序列 $\{\phi_m(t)\}$ 由在区间 $0 \leq t \leq T$ 上等度连续且一致有界的函数组成。由 Ascoli-Arzelà 定理^[11], 序列 $\{\phi_m(t)\}$ 有一个一致收敛的子序列 $\{\phi_{m_k}(t)\}$, 记为 $\gamma(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{m_k}(t)$ 。现在, 证明 $\gamma(t)$ 是式(4)的解。因为

$$\phi_{m_k}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_k + \varepsilon_m)t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s, \phi_{m_k}(s)) + \varepsilon_{m_k}] ds,$$

当 $m \rightarrow \infty$ 时 $\varepsilon_{m_k} \rightarrow 0$, 且 $f(x, t)$ 连续, 所以

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s, \gamma(s))] ds,$$

设 $\phi(t)$ 是式(5)的一个解, 则 $\phi(t)$ 也是当 $\varepsilon = 0$ 时式(4)的一个解。因此, 通过上述讨论, 有 $\phi(t) < \phi(t, \varepsilon)$ 。令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 得到 $\phi(t) < \gamma(t)$, 所以 $\gamma(t)$ 是最大解。

定理 2 假设 $f \in C[R_1, \mathbb{R}]$, 其中

$$R_1 = \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq T, \left| x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{\Gamma(k+1)} \right| \leq K \right\}.$$

设 $\gamma(t)$ 是式(4)在 $t \in [0, T]$ 上的最大解, 且 $m^{(k)}(0) \leq x_k$, 对于 $k = 0, 1, \dots, n-1$, 如果 ${}_0D_t^\alpha m(t) \leq g(t, m(t))$ 对于所有 $t \in [0, T]$ 成立, 则对于任意 t , 有 $m^{(n-1)}(t) \leq \gamma^{(n-1)}(t)$ 。

证明 给定 $\varepsilon > 0$, 考虑以下带初值的修正比较微分方程

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha x = f(t, x) + \varepsilon \\ u^{(k)}(0) = x_k + \varepsilon \end{cases} \quad (6)$$

设 $u(t, \varepsilon)$ 是式(6)的一个解, 证明对于所有 $t \in [0, T]$, 有 $m^{(n-1)}(t) < u^{(n-1)}(t, \varepsilon)$ 。假设存在 $t_1 \in (0, T]$ 使得 $m^{(n-1)}(t_1) = u^{(n-1)}(t_1, \varepsilon)$, 且对于所有 $t \in [0, t_1]$, 有 $m^{(n-1)}(t) < u^{(n-1)}(t, \varepsilon)$ 。由引理 2 的式(3), 有

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^\alpha (m(t_1) - u(t_1, \varepsilon)) &= \frac{m^{(n-1)}(t_1) - u^{(n-1)}(t_1, \varepsilon) - (m^{(n-1)}(0) - u^{(n-1)}(0, \varepsilon))}{\Gamma(n-\alpha)t_1^{\alpha-n+1}} \\
&\quad + \frac{\alpha - n + 1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{t_1} \frac{m^{(n-1)}(t_1) - u^{(n-1)}(t_1, \varepsilon) - (m^{(n-1)}(\tau) - u^{(n-1)}(\tau, \varepsilon))}{(t-\tau)^{\alpha-n+2}} d\tau \\
&= \frac{-(m^{(n-1)}(0) - u^{(n-1)}(0, \varepsilon))}{\Gamma(n-\alpha)t_1^{\alpha-n+1}} + \frac{\alpha - n + 1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{t_1} \frac{-(m^{(n-1)}(\tau) - u^{(n-1)}(\tau, \varepsilon))}{(t-\tau)^{\alpha-n+2}} d\tau \\
&> 0,
\end{aligned}$$

这意味着 ${}_0D_t^\alpha m(t_1) > {}_0D_t^\alpha u(t_1, \varepsilon) = f(t, u(t, \varepsilon)) + \varepsilon = f(t, m(t_1)) + \varepsilon > f(t, m(t))$, 存在矛盾。因此, 对于所有 $t \in [0, T]$, 有 $m^{(n-1)}(t) < u^{(n-1)}(t, \varepsilon)$, 由定理 1, 令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 可得 $m^{(n-1)}(t) \leq \gamma^{(n-1)}(t)$ 。

参考文献:

- [1] Podlubny I. Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications[M]. Amsterdam: Elsevier, 1999.
- [2] Diethelm K, Ford N J. Analysis of fractional differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 265(2): 229-248.
- [3] Benson D A. The fractional advection-dispersion equation: Development and application[D]. Reno: University of Nevada, 1998.
- [4] Song L, Xu S Y, Yang J Y. Dynamical models of happiness with fractional order[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(3): 616-628.
- [5] Agarwal R, O'Regan D, Hristova S. Stability of Caputo fractional differential equations by Lyapunov functions[J]. Applications of Mathematics, 2015, 60(6): 653-676.
- [6] Wang Z L, Yang D S, Ma T D, et al. Stability analysis for nonlinear fractional-order systems based on comparison principle[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 75(1): 387-402.
- [7] 周乐, 郝晓玲. 一类 Hilfer 分数阶微分方程的平方可积解[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2024, 55(3): 225-231.
- [8] Lakshmikantham V, Vatsala A S. Theory of fractional differential inequalities and applications[J]. Communications in Applied Analysis, 2007, 11(3/4): 395-402.
- [9] Lakshmikantham V, Vatsala A S. Basic theory of fractional differential equations[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 69(8): 2677-2682.
- [10] De Oliveira E C, Machado J A T. A review of definitions for fractional derivatives and integral[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, 2014(1): 238459.
- [11] Riesz F, Sz-Nagy B. Functional analysis[M]. Mineola: Dover Publications, 1990.
- [12] Yosida K. Functional analysis[M]. Berlin: Springer, 2012.
- [13] Evans L C. Partial differential equations[M]. 2nd ed. Providence: American Mathematical Society, 2022.
- [14] Elloe P W, Mashlay T. Initial value problems for Caputo fractional differential equations[J]. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2018, 9(2): 178-195.
- [15] Burton T A. Volterra integral and differential equations[M]. Amsterdam: Elsevier, 2005.
- [16] Wu C. Comparison principles for systems of Caputo fractional order ordinary differential equations[J]. Chaos, Solitons, and Fractals, 2023, 171: 113437.
- [17] Lu Z Q, Zhu Y G. Comparison principles for fractional differential equations with the Caputo derivatives[J]. Advances in Difference Equations, 2018, 2018(1): 237.

(责任编辑 李 宏)

A General Comparison Principle for Caputo Fractional Differential Equations

LIU Zhao, HAO Xiaoling

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

Abstract: The comparison principle for higher-order Caputo fractional differential equations is mainly investigated. By leveraging the differential properties of higher-order Caputo derivatives, the existence theorem for the maximal solution of Caputo-type fractional differential equations, and the monotonicity of solutions to fractional differential equations involving Caputo derivatives, a generalized comparison principle for Caputo fractional differential equations is ultimately established.

Key words: Caputo fractional differential equation; Caputo derivative; maximal solution; general comparison principle