

二自由度串联柔性臂复合抗干扰控制

韩光信¹, 刘瑶瑶¹, 史玉松¹, 胡云峰²

(1. 吉林化工大学 电气与控制工程学院, 吉林省 吉林市 132022; 2. 吉林大学 通信工程学院, 长春 130012)

摘要: 针对二自由度柔性机械臂在实际应用中内部参数摄动和外界扰动影响柔性机械臂的轨迹跟踪精度提高和连杆抖振抑制, 提出了一种基于奇异摄动理论的复合控制策略。首先, 根据假设模态法和 Hamilton 原理建立了二自由度串联柔性机械臂的动力学模型, 进而基于奇异摄动理论将其分解为慢速子系统和快速子系统。然后, 针对慢速子系统, 基于反馈线性化技术设计了增量非线性动态逆控制策略, 用于机械臂的轨迹跟踪控制; 对于快速子系统, 通过误差符号的积分和非线性反馈设计误差符号鲁棒积分控制策略, 用于机械臂连杆抖振抑制; 利用李雅普诺夫稳定性理论证明了闭环系统的稳定性。仿真结果表明, 本文所提出的复合控制策略在轨迹跟踪控制和抗干扰性能方面具有明显的优势。

关键词: 控制工程; 二自由度串联柔性机械臂; 奇异摄动; 增量非线性动态逆; 误差符号鲁棒积分; 抗干扰控制

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5497(2026)08-2229-11

DOI: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb.20250018

Composite control of disturbance-rejection for two-degree-of-freedom serial flexible manipulator

HAN Guang-xin¹, LIU Yao-yao¹, SHI Yu-song¹, HU Yun-feng²

(1. College of Electrical and Control Engineering, Jilin University of Chemical Technology, Jilin 132022, China;

2. College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130012, China)

Abstract: To address the challenges of internal parameter perturbations and external disturbances in improving trajectory tracking accuracy and suppressing link vibrations for the two-degree-of-freedom serial flexible manipulator in practical implementations, a singular perturbation theory-based composite control strategy is proposed. Firstly, the dynamic model of the two-degree-of-freedom serial flexible manipulator was established using the assumed modes method and Hamilton's principle. Subsequently, based on singular perturbation theory, the system was decomposed into slow and fast subsystems. Then, for the slow subsystem, an incremental nonlinear dynamic inversion control strategy was designed using feedback linearization techniques, aimed at trajectory tracking control of the manipulator. For the fast subsystem, an error sign robust integral control strategy was developed through the integration of error signs and nonlinear feedback, intended for suppressing link chattering of the manipulator. The stability of the closed-loop

收稿日期: 2025-01-02.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(61703177); 吉林省科技厅发展计划项目(YDZJ202401615ZYTS).

作者简介: 韩光信(1971-), 男, 教授, 博士. 研究方向: 预测控制, 机器人运动控制, 约束系统控制.

E-mail: hangeorge517@163.com

system was proven using Lyapunov stability theory. Simulation results demonstrate that the proposed composite control strategy exhibits significant advantages in trajectory tracking control and disturbance rejection performance.

Key words: control engineering; two-degree-of-freedom serial flexible manipulator; singular perturbation; incremental nonlinear dynamic inversion; robust integral of the sign of the error; control of disturbance-rejection

0 引言

机械臂在各行各业中发挥着越来越重要的作用,其不仅能帮助提升生产效率、降低成本、增强安全性,还能减少人为错误,完成人类难以执行的任务^[1]。近年来,柔性机械臂凭借其轻量化、高柔性、快速响应与低能耗等显著优势,在航空航天、工业制造等多个领域获得了广泛的应用前景^[2]。但也正因为柔性机械臂的结构轻量化特性,使其在动力学层面呈现出更为复杂的动态,包括非线性特性、欠驱动状态以及系统的耦合效应,这一问题推动了对柔性机械臂建模的研究^[3]。

近几年,基于奇异摄动(Singular perturbation, SP)理论的柔性机械臂建模方法受到学术界广泛关注,该方法将柔性机械臂系统动力学分解为慢速与快速子系统两个独立部分^[4]。在此基础上,针对两个子系统分别设计控制算法,以实现柔性机械臂轨迹跟踪及连杆抖振的有效控制。基于此,国内外研究者围绕柔性机械臂的奇异摄动分解模型,开发了多种组合控制算法。例如,Lochan等^[5]针对双连杆柔性机械臂,构建了结合非线性扰动观测器的滑模与反步法控制方案,通过调整负载重量检验方案的鲁棒性能;Zhu等^[6]针对单连杆柔性机械臂,提出了双时间尺度自适应鲁棒控制算法,旨在精准解决其尖端轨迹跟踪与振动问题,并通过实验验证了所提策略的有效性;顾振宇等^[7]考虑到单连杆柔性机械臂的模型参数不确定性,设计了自适应滑模与 H_∞ 鲁棒组合控制器,通过仿真实验验证了其方法的优越性能;钱伟等^[8]则针对柔性机械臂系统的不确定性与外部时变扰动,提出了在线数据记录与扰动观测器相结合的复合学习控制策略,并经仿真实验验证了其有效性。尽管目前对于柔性机械臂的轨迹跟踪和连杆抑振控制取得了一定进展,但针对柔性机械臂内部参数摄动和外界干扰问题仍需进一步研究。

本文考虑双连杆柔性机械臂在实际应用中柔性连杆刚度发生变化,以及外界环境对两个柔性连杆的误触干扰,影响柔性机械臂的轨迹跟踪精度提高和连杆抖振抑制,设计了一种复合控制策略。首先,建立二自由度柔性机械臂的动力学模型,并基于奇异摄动理论将模型分解为慢速和快速子系统。然后,针对慢速子系统设计增量非线性动态逆(Incremental nonlinear dynamic inversion, INDI)算法用于控制柔性机械臂的轨迹跟踪;对于快速子系统,设计误差符号鲁棒积分控制(Robust integral of the sign of the error, RISE)用于抑制连杆的抖振。仿真实验表明:本文提出的INDI和RISE组合控制策略在轨迹跟踪和抑制扰动方面有明显的优势。

1 柔性机械臂动力学模型、奇异摄动分解及正逆运动学求解

1.1 动力学模型

本文研究对象为加拿大QUANSER公司开发的二自由度串联柔性机械臂系统,如图1所示,该设备是一种模仿人类手臂结构的装置,主要由1个基座、2个电机和2个柔性连杆组成。第1根柔性连杆由第1个(肩部)电机驱动,该电机通过支撑结构刚性地固定在基座上。第2根柔性连杆由第2个(肘部)电机驱动,该电机位于第1根柔

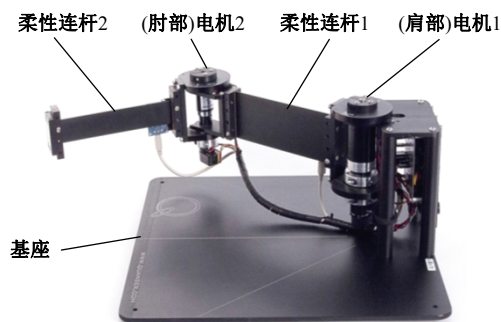


图1 Quanser公司生产的二自由度串联柔性机械臂图片
Fig. 1 Picture of a two-degree-of-freedom serial flexible manipulator by Quanser company

性连杆的末端。整个系统在水平面上运行。从控制的角度来看,该系统具有 2 个输入 4 个输出,即 2 个电机输入驱动;输出为 2 个电机伺服角和 2 个连杆偏转角。

相较于刚性机械臂,柔性臂展现出更为复杂的运动特性、强耦合性以及非线性等特点,使得建立精确的数学模型变得更加困难。目前,学术界普遍认可将柔性机械臂视为 Euler-Bernoulli 梁^[9],其原理如图 2 所示。

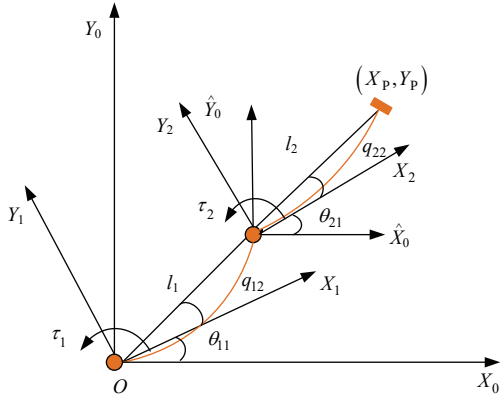


图 2 二自由度串联柔性机械臂 Euler-Bernoulli 梁模型

Fig. 2 Euler-Bernoulli beam model of the two-degree-of-freedom flexible manipulator

在图 2 的基础上,根据假设模态法和 Hamilton 原理,二自由度串联柔性机械臂系统的 Lagrange 方程为^[10]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau - B_m \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -B_n \dot{q} \end{cases} \quad (1)$$

式中: $L = T - V$, 其中 $T = [T_1 \ T_2]^T$ 为系统总动能; $V = [V_1 \ V_2]^T$ 为系统总势能; $B_m = [B_{11} \ B_{21}]^T$, $B_n = [B_{12} \ B_{22}]^T$ 为阻尼向量; $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]^T$ 为力矩向量; $\theta = [\theta_{11} \ \theta_{21}]^T$ 为伺服角; $q = [q_{21} \ q_{22}]^T$ 为偏转角。

经过推导,可得二自由度串联柔性机械臂系统的动力学方程为^[10]:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $U = [U_1 \ U_2]^T$ 为系统控制输入, $M =$

$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ 为 4×4 正定对称惯量矩阵; $\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$ 为包含哥式力和离心力的 4×4 矩阵; $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$ 为 4×4 的刚度矩阵。其中 $M_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $D_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $i, j = 1, 2$ 均为各自矩阵相应的块矩阵。

根据柔性机械臂的动力学特性,矩阵 M 作为正定对称矩阵,其逆矩阵也存在。记 M 的逆矩阵为:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

系统的惯量矩阵 M 具有特殊结构,虽然其中包含若干 0 元素,但其顺序主子式的特征值均大于 0。具体来说, M_{11} 和 M_{22} 可逆,并且计算结果显示 $M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{21}$ 也可逆^[10]。由式(2)可得:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4)$$

1.2 奇异摄动分解

柔性机械臂装置作为一种高度复杂的系统,其独有特征在于刚性运动与柔性振动之间显著的非线性耦合关系。传统控制理论和方法在针对轨迹跟踪及抖振抑制的分析综合过程中,往往难以达成理想效果。而奇异摄动理论则提供了一种独特的解决路径,其通过将柔性机械臂装置的运动模态巧妙地划分为慢速子系统与快速子系统,进而针对两个子系统分别进行控制器设计,从而实现对轨迹跟踪及连杆抖振的有效控制。

根据奇异摄动理论,在式(2)中引入摄动参数 $\lambda = k^{-1/2}$, 其中 k 为机械臂刚度矩阵 K 的最小值,从而定义新变量为 $\mu = q/\lambda^2$, $K_\lambda = \lambda^2 K$ ^[11], 根据式(4),该柔性机械臂奇异摄动模型可表示为:

$$\ddot{\theta} = -N_{11} (D_{11} \dot{\theta} + D_{12} \lambda^2 \dot{\mu} - U) - N_{12} (D_{21} \dot{\theta} + D_{22} \lambda^2 \dot{\mu} + K_\lambda \mu) \quad (5)$$

$$\lambda^2 \ddot{\mu} = -N_{21} (D_{11} \dot{\theta} + D_{12} \lambda^2 \dot{\mu} - U) - N_{22} (D_{21} \dot{\theta} + D_{22} \lambda^2 \dot{\mu} + K_\lambda \mu) \quad (6)$$

由于小参数 λ 的介入,使得快变量出现边界层现象,根据奇异摄动分解理论,可得到刚性慢变子系统和振动快变子系统^[11]。

为获取慢速子系统,令 $\lambda=0$,由式(6)可得:

$$\mu_s = K_\lambda^{-1} N_{22}^{-1} N_{21} (U_s - D_{11} \dot{\theta}) - K_\lambda^{-1} D_{21} \dot{\theta} \quad (7)$$

式中:含有下标S的变量表示慢变量。

将式(7)代入式(5)可得慢速子系统为:

$$\ddot{\theta} = -(N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{21}) D_{11} \dot{\theta} + (N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{21}) U_s \quad (8)$$

令 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, 则慢速子系统状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = F_s(x) + G_s(x) U_s \end{cases} \quad (9)$$

其中, $F_s(x) = -(N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{21}) D_{11} \dot{\theta}$,

$G_s(x) = N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{21}$ 。

为实现快速子系统特性,定义快时标变量 $T = t/\lambda$,在该时标下,慢变量变化率可视为0,即:

$$\frac{d\theta}{dT} = 0, \frac{d^2\theta}{dT^2} = 0, \frac{d\mu_s}{dT} = 0, \frac{d^2\mu_s}{dT^2} = 0 \quad (10)$$

定义快状态变量为 $\mu_f = \mu - \mu_s$,考虑系统存在扰动,则快速子系统可表示为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mu_f}{dT^2} = & -N_{22} K_\lambda \mu_f - (N_{22} D_{22} + N_{21} D_{12}) \lambda \frac{d\mu_f}{dT} + \\ & N_{21} U_f + \Delta_f(d) \end{aligned} \quad (11)$$

式中: $\Delta_f(d)$ 为未知扰动。

令 $A_f = N_{22} K_\lambda$, $B_f = (N_{22} D_{22} + N_{21} D_{12}) \lambda$, $C_f = N_{21}$,如此式(11)可改写为:

$$\frac{d^2\mu_f}{dT^2} = -A_f \mu_f - B_f \frac{d\mu_f}{dT} + C_f U_f + \Delta_f(d) \quad (12)$$

式中:下标含有f的变量表示快变量。

综上所述,式(9)为柔性机械臂刚性部分的慢速子系统,式(12)为柔性机械臂柔性部分的快速子系统。柔性机械臂总的控制输入为 $U = U_s + U_f$,其中 U_s 为慢速子系统的控制输入,用于实现轨迹跟踪; U_f 为快速子系统的控制输入,用于抑制连杆抖振, U_s 和 U_f 可分别独立设计。

1.3 正、逆运动学求解

在机器人学中,机械臂正、逆运动学是两个重要概念,目的是用来描述机械臂运动关系,主要用于计算机臂末端执行器相对于基座的位置和姿态,正、逆解的计算精度决定了路径规划和位置控制研究的可靠性,能够为研究机械臂动力学相关问题提供便利^[12,13]。如图1所示,将柔性机械臂末端关节视为机械臂的输出末端位置(X_p, Y_p),所有转动轴都在(X_0-O-Y_0)平面上,则柔性机械臂末端位置为:

$$\begin{cases} X_p = l_1 \cos(\theta_{11}) + l_2 \cos(\theta_{21}) \\ Y_p = l_1 \sin(\theta_{11}) + l_2 \sin(\theta_{21}) \end{cases} \quad (13)$$

式中: l_1, l_2 为连杆长度。

由式(13)可得运动学逆解为:

$$\begin{cases} \theta_{11} = \arctan\left(\frac{Y_p}{X_p}\right) \pm \arccos\left(\frac{X_p^2 + Y_p^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}}\right) \\ \theta_{21} = \arctan\left(\frac{Y_p - l_1 \sin(\theta_{11})}{X_p - l_1 \cos(\theta_{11})}\right) \end{cases} \quad (14)$$

2 控制器设计

本文的研究目的聚焦于存在内部参数摄动和环境干扰条件下,依然确保柔性机械臂系统具备较好的轨迹跟踪与连杆抖振抑制效果。为实现该目标,针对柔性机械臂的慢速子系统,设计了增量非线性动态逆控制方案,通过控制柔性机械臂的关节角度,达成期望末端位置的轨迹跟踪;同时,针对快速子系统,设计了误差符号鲁棒积分控制方案,以有效抑制连杆抖振。总的控制方案如图3所示。

2.1 慢速子系统控制器设计

增量非线性动态逆控制(INDI),作为一种基于反馈线性化的高效控制方法,在处理复杂非线性系统方面展现了广泛的应用前景,尤其在航空航天、机器人以及自动驾驶等前沿领域中得到了深入的应用。该方法核心理念在于通过将非线性系统在局部范围内进行简明的线性化处理,以此为基础计算出控制输入的增量,进而逐步引导系统状态向预期的目标状态逼近,从而达成提升系统稳定性与控制精度的双重目的。INDI方法的另一显著优势在于其不苛求精确的系统建模,对模型中的不确定因素具有与生俱来的鲁棒性,这使得它在面对实际工程中的诸多不确定性与变数时,仍能保持稳定的控制表现^[14]。

假设有如下MIMO非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) + G(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (15)$$

式中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $y \in \mathbb{R}^m$ 为系统输出向量; $u \in \mathbb{R}^m$ 为系统控制输入向量; $F(x)$ 为系统模型矩阵; $G(x)$ 为控制输入矩阵,若 $G(x)$ 可逆,则可设计INDI控制律使该MIMO系统稳定。

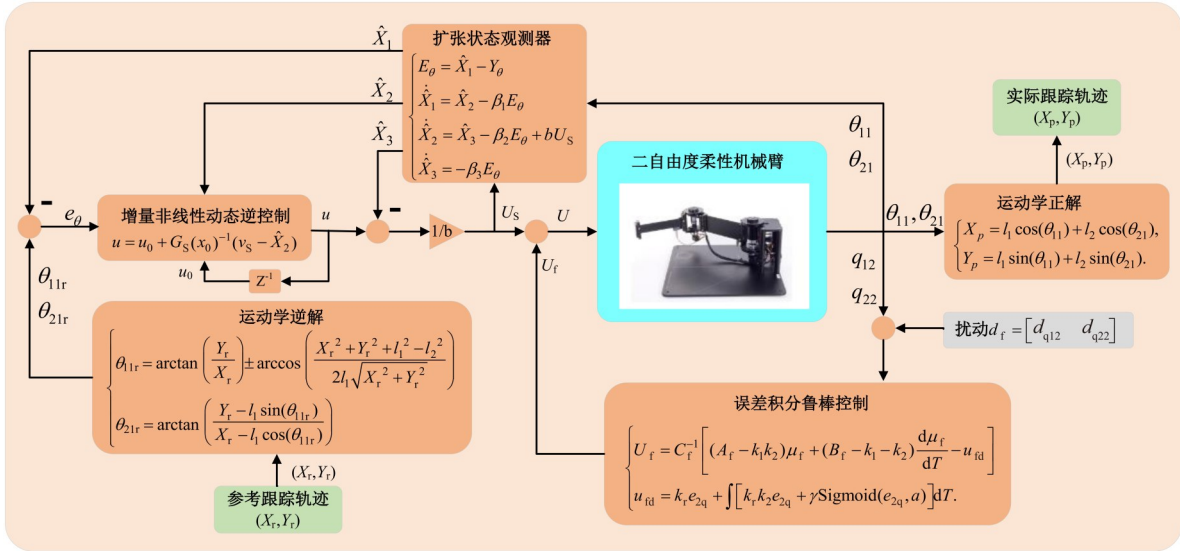


图 3 柔性机械臂 INDI and RISE 复合控制结构图

Fig. 3 Block diagram of composite control structure using INDI and RISE for flexible manipulators

设 $h(x)=x$, 则:

$$\dot{y} = \dot{x} = F(x) + G(x)u \quad (16)$$

在某一采样时间 t 内, 将式(16)泰勒级数一阶展开为^[15]:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \left(\frac{\partial(F(x) + G(x)u)}{\partial x} \right) \Big|_{(x_0, u_0)} (x - x_0) + \left(\frac{\partial(F(x) + G(x)u)}{\partial u} \right) \Big|_{(x_0, u_0)} (u - u_0) + \Delta(O) \quad (17)$$

式中: $\Delta(O)$ 为高阶无穷小量; x, u 为当前时刻系统状态和控制输入; x_0, u_0 分别为前一时刻系统状态和控制输入; $x - x_0, u - u_0$ 分别为系统在采样时间 t 内的状态增量和控制输入增量。

当采样时间足够小 ($t \rightarrow 0$) 时, $x \rightarrow x_0$, 且 $\lim_{t \rightarrow 0} u \neq u_0$, 忽略高阶项, 有:

$$\dot{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \dot{x}_0 + G(x_0) \lim_{t \rightarrow 0} (u - u_0) + \frac{\partial}{\partial x} [F(x) + G(x)u] \Big|_{x_0, u_0} \lim_{t \rightarrow 0} (x - x_0) = \dot{x}_0 + G(x_0)(u - u_0) \quad (18)$$

由此可得, INDI 控制律为:

$$u = u_0 + G^{-1}(x_0)(v - \dot{x}_0) \quad (19)$$

式中: v 为伪逆控制律, 不包含模型信息 $F(x)$ 项, 降低了被控对象模型不准确的影响。

由式(19)可得慢速子系统(9)的控制律为:

$$u = u_0 + G_s^{-1}(x_0)(v_s - \dot{x}_0) \quad (20)$$

定理 1 若设计伪逆控制律为 $v_s = \dot{x}_r + K_p e_\theta$,

其中误差 $e_\theta = x_r - x$, 期望角度 $x_r = [\theta_{1r} \ \theta_{21r}]^T$, $K_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为比例系数矩阵, 且 K_p 为正定矩阵, 则可实现系统稳定的跟踪控制。

证明: 定义如下 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} e_\theta^2 \quad (21)$$

对式(21)求导可得:

$$\dot{V}(e_\theta) = e_\theta \dot{e}_\theta = (x_r - x)(\dot{x}_r - \dot{x}) = (x_r - x) \cdot [\dot{x}_r - \dot{x}_0 - G_s(x_0)(u - u_0)] \quad (22)$$

将式(20)代入上式(22)可得:

$$\dot{V}(e_\theta) = (x_r - x)(\dot{x}_r - v_s) = (x_r - x) [\dot{x}_r - (\dot{x}_r + K_p e_\theta)] = -K_p (x_r - x)^2 \leq 0 \quad (23)$$

由此可得, 控制系统是稳定的。

由于控制器中需要获取该柔性机械臂的关节角度微分信号, 直接测量会含有较大噪声, 当前众多研究中广泛采用滤波器^[16]或者跟踪微分器^[17]来处理获得系统微分信号。本文通过扩张状态观测器对柔性机械臂的状态进行估计, 避免引入不必要的噪声信号。扩张状态观测器设计为^[18]:

$$\begin{cases} E_\theta = \hat{X}_1 - Y_\theta \\ \dot{\hat{X}}_1 = \hat{X}_2 - \beta_1 E_\theta \\ \dot{\hat{X}}_2 = \hat{X}_3 - \beta_2 E_\theta + b U_s \\ \dot{\hat{X}}_3 = -\beta_3 E_\theta \end{cases} \quad (24)$$

式中: $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3$ 分别为输出 $Y_\theta = [\theta_{11} \ \theta_{21}]^T$ 的估计量、 $\dot{Y}_\theta = [\dot{\theta}_{11} \ \dot{\theta}_{21}]^T$ 的估计量以及总扰动估计量; $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为观测器的误差反馈增益矩

阵; $b \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为输入增益矩阵。

综上所述,慢速子系统控制器为:

$$U_s = \frac{1}{b} \left[u_0 + G_s^{-1}(x_0) (v_s - \hat{X}_2) - \hat{X}_3 \right] \quad (25)$$

2.2 快速子系统控制器设计

误差符号鲁棒积分控制(RISE)作为一种非线性控制策略,能有效缓解扰动对系统性能的影响,增强系统在不确定环境中的稳定性和鲁棒性^[19]。

对于系统(12),在控制器设计前,提出如下假设: $\Delta_f(d)$ 及其一阶、二阶可导且有界,即:

$$|\Delta_f(d)| \leq \xi, |\dot{\Delta}_f(d)| \leq \xi_{D1}, |\ddot{\Delta}_f(d)| \leq \xi_{D2} \quad (26)$$

式中: ξ, ξ_{D1}, ξ_{D2} 为已知正数。

该控制器设计的目的为抑制连杆抖振,因此期望柔性机械臂的抖振偏转角度为0,根据系统(12),定义系统误差为:

$$\begin{cases} e_{1q} = \mu_f - 0 = \mu_f, e_{2q} = \dot{e}_{1q} + k_1 e_{1q} = \frac{d\mu_f}{dT} + k_1 \mu_f \\ r = \dot{e}_{2q} + k_2 e_{2q} = \frac{d^2 \mu_f}{dT^2} + k_1 \frac{d\mu_f}{dT} + k_2 \left(\frac{d\mu_f}{dT} + k_1 \mu_f \right) \end{cases} \quad (27)$$

式中: $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为正的待设计参数。

若能构建一个鲁棒控制器,使得高阶误差信号(如辅助误差函数 r)逐渐趋近于0,系统实际的跟踪误差 e_{1q} 和 e_{2q} 也会趋近于0^[20]。根据系统(12)和式(27),控制器设计为:

$$\begin{cases} U_f = C_f^{-1} \left[(A_f - k_1 k_2) \mu_f + \right. \\ \quad \left. (B_f - k_1 - k_2) \frac{d\mu_f}{dT} - u_{fd} \right] \\ u_{fd} = k_r e_{2q} + \int [k_r k_2 e_{2q} + \gamma \text{sign}(e_{2q})] dT \end{cases} \quad (28)$$

式中: u_{fd} 为鲁棒控制项; $\gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为待设计鲁棒控制增益; $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数,即当 $\zeta > 0$ 时, $\text{sign}(\zeta) = 1$;当 $\zeta = 0$ 时, $\text{sign}(\zeta) = 0$;当 $\zeta < 0$ 时, $\text{sign}(\zeta) = -1$ 。

为进一步降低抖振,将符号函数 $\text{sign}(\cdot)$ 替换为神经网络中的激活函数 $\text{Sigmoid}(\cdot)$,并将其增大二倍并向下平移一个单位后可得 $\text{Sigmoid}(x, a)$,表达式为:

$$\text{Sigmoid}(x, a) = \frac{2}{1 + \exp(-ax)} - 1 \quad (29)$$

式中:正数 a 用于控制该函数的变化率以及调节

该函数的近似线性区间宽度,函数图像如图4所示,可知,当 a 足够大时,有 $\text{Sigmoid}(x, a) \rightarrow \text{sign}(x)$ 。

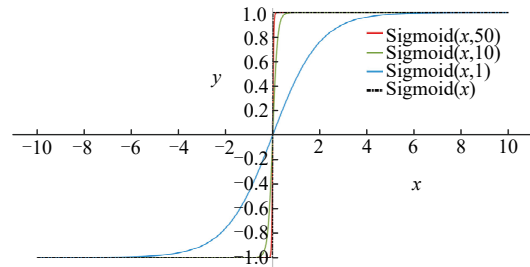


图4 $\text{sign}(x)$ 与 $\text{Sigmoid}(x, a)$ 函数曲线图

Fig. 4 Graph of the $\text{sign}(x)$ and $\text{sSigmoid}(x, a)$ functions

接下来对设计的控制器(28)进行稳定性分析。将系统(12)代入式(27)可得:

$$\begin{aligned} r = & -A_f \mu_f - B_f \frac{d\mu_f}{dT} + C_f U_f + \Delta_f(d) + \\ & k_1 \frac{d\mu_f}{dT} + k_2 \left(\frac{d\mu_f}{dT} + k_1 \mu_f \right) \end{aligned} \quad (30)$$

将控制器(28)代入式(30)可得:

$$\begin{aligned} r = & -A_f \mu_f - B_f \frac{d\mu_f}{dT} + \Delta_f(d) + k_1 \frac{d\mu_f}{dT} + k_2 \left(\frac{d\mu_f}{dT} + k_1 \mu_f \right) + \\ & C_f \left\{ C_f^{-1} \left[(A_f - k_1 k_2) \mu_f - u_{fd} + (B_f - k_1 - k_2) \frac{d\mu_f}{dT} \right] \right\} = \\ & \Delta_f(d) - k_r e_{2q} - \int [k_r k_2 e_{2q} + \gamma \text{Sigmoid}(e_{2q}, a)] dT \end{aligned} \quad (31)$$

由式(31)可知,鲁棒控制项 u_{fd} 的目的是为了镇定扰动。对式(31)微分可得:

$$\dot{r} = \dot{\Delta}_f(d) - k_r \dot{e}_{2q} - k_r k_2 e_{2q} - \gamma \text{Sigmoid}(e_{2q}, a) \quad (32)$$

令扰动项 $D_{fd} = \dot{\Delta}_f(d)$, $\dot{D}_{fd} = \ddot{\Delta}_f(d)$,由前面假设可知:

$$\begin{cases} D_{fd} \leq \xi_{D1} \\ \dot{D}_{fd} \leq \xi_{D2} \end{cases} \quad (33)$$

式(32)可写为:

$$\dot{r} = D_{fd} - k_r r - \gamma \text{Sigmoid}(e_{2q}, a) \quad (34)$$

引理1^[20] 定义辅助函数 $L(T)$ 为:

$$L(T) = r [D_{fd} - \gamma \text{Sigmoid}(e_{2q}, a)] \quad (35)$$

如果鲁棒控制增益满足:

$$\gamma > \xi_{D1} + \frac{\xi_{D2}}{k_2} \quad (36)$$

则辅助函数 $P(T)$ 为:

$$P(T) = \gamma |e_{2q}(0)| - D_{fd}(0)e_{2q}(0) - \int_{t=0}^T L(t)dt \quad (37)$$

式中: $e_{2q}(0)$ 为误差 e_{2q} 的初始值; $D_{fd}(0)$ 为扰动项 D_{fd} 的初始值; $L(t)$ 为 $T=t$ 时辅助函数 $L(T)$ 的值。辅助函数 $P(T)$ 的微分为:

$$\dot{P}(T) = -r[D_{fd} - \gamma \text{Sigmoid}(e_{2q}, a)] \quad (38)$$

定理2 对于系统(12),若控制器(28)的鲁棒控制增益满足式(36),且反馈增益足够大,保证矩阵 Λ 的正定性,矩阵 Λ 为:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} k_1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & k_2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & k_r \end{bmatrix} \quad (39)$$

则闭环系统中的信号均可保持有界性,同时控制器(28)能够实现稳定的渐近控制效果,即当 $T \rightarrow \infty$ 时, $e_{1q} \rightarrow 0$, $e_{2q} \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ 。

证明 定义如下 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2}(e_{1q}^2 + e_{2q}^2 + r^2) + P(T) \quad (40)$$

对式(40)求导,并结合式(27)、(34)和(38)

可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_{1q}\dot{e}_{1q} + e_{2q}\dot{e}_{2q} + r\dot{r} + \dot{P}(T) = e_{1q}(e_{2q} - k_1 e_{1q}) + \\ &e_{2q}(r - k_2 e_{2q}) + r(D_{fd} - k_r r - \gamma \text{Sigmoid}(e_{2q}, a)) - \\ &r(D_{fd} - \gamma \text{Sigmoid}(e_{2q}, a)) = -k_1 e_{1q}^2 - k_2 e_{2q}^2 - \\ &k_r r^2 + e_{1q}e_{2q} + e_{2q}r \end{aligned} \quad (41)$$

结合定义的矩阵 Λ ,式(41)可改写为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -k_1 e_{1q}^2 - k_2 e_{2q}^2 - k_r r^2 + e_{1q}e_{2q} + e_{2q}r \leq \\ &-\eta^T \Lambda \eta \leq -\lambda_{\min}(\Lambda)(e_{1q}^2 + e_{2q}^2 + r^2) \triangleq W_q \end{aligned} \quad (42)$$

式中: $\eta = [e_{1q} \ e_{2q} \ r]^T$, $\lambda_{\min}(\Lambda)$ 为矩阵 Λ 的最小特征值。由式(34)、(38)和(40)可知, $V \in L_\infty$ 且 $W_q \in L_2$,则跟踪误差是有界的,因此, W_q 连续可导且有界,根据 Barbalat 定理^[21]可知,当 $T \rightarrow \infty$, $e_{1q} \rightarrow 0$, $e_{2q} \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$,该控制器系统是稳定的。

至此,柔性机械臂的慢速和快速子系统控制器设计完毕,系统总控制输入为 $U = U_s + U_{i0}$ 。

3 仿真结果与分析

考虑实际应用中柔性机械臂长期运行和受不确定环境影响,导致机械臂的连杆刚度发生变化,以及操作人员或周围物体对柔性连杆产生误触影响。在 MATLAB/Simulink 仿真环境下,首先进行了伺服角速度跟踪仿真实验;然后分别进行了

内部参数摄动测试和外部扰动验证。设计的控制器相关参数为:慢速子系统: $K_p = \text{diag}[1500, 5000]$; $\beta_1 = \text{diag}[100, 100]$; $\beta_2 = \text{diag}[600, 5000]$; $\beta_2 = \text{diag}[500, 1500]$; $b = \text{diag}[140.47, 288.12]$ 。

快速子系统: $k_1 = \text{diag}[10.1, 10.1]$; $k_2 = \text{diag}[10.1, 10.1]$; $k_r = \text{diag}[1.1, 1.1]$; $\gamma = \text{diag}[1.1, 1.1]$; $a = 100$ 。

3.1 伺服角速度跟踪实验

设定初始速度为 $\theta_{11,21} = 0 \text{ rad/s}$,期望速度为 $d\theta_{11,21}/dt = 0.1 \frac{(\exp(t/4) - \exp(-t/4))}{(\exp(t/4) + \exp(-t/4))}$ 。图5为

柔性臂伺服角速度 $d\theta_{11}/dt$ 、 $d\theta_{21}/dt$ 跟踪曲线;图6为柔性臂伺服角速度跟踪误差曲线。

从图5的伺服角速度跟踪仿真曲线可以看出,本文所提控制方案有较高的响应速度;从图6的伺服角速度跟踪误差曲线可以看出,本文所提控制方案和文献[22]中控制方案相比速度跟踪误差更小。

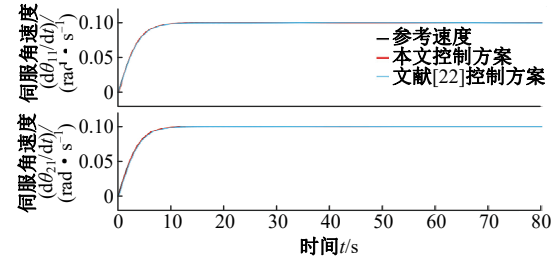


图5 伺服角速度 $d\theta_{11}/dt$ 、 $d\theta_{21}/dt$ 跟踪曲线

Fig. 5 Angular velocity tracking curves of servo angles $d\theta_{11}/dt$ and $d\theta_{21}/dt$

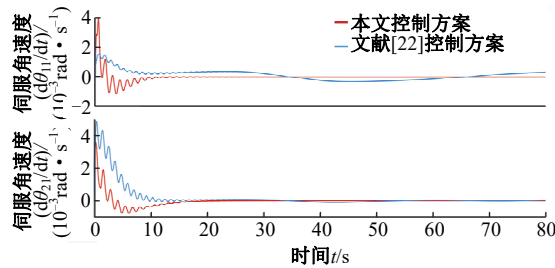


图6 速度跟踪误差 de_1/dt 、 de_2/dt 曲线

Fig. 6 Curves of velocity tracking errors de_1/dt and de_2/dt

3.2 内部参数摄动测试

将柔性机械臂的连杆刚度系数 (K_{si} , $i=1,2$) 浮动 $\pm 30\%$,设置伺服关节初始角度为 $\theta_{11} = 0.34 \text{ rad}$ 、 $\theta_{21} = -0.34 \text{ rad}$,在 MATLAB/Simu-

link 仿真环境下,测试内部参数摄动对轨迹跟踪和连杆抖振的影响。

仿真结果如图 7~图 11 所示,图 7 为末端位置跟踪轨迹;图 8 为柔性机械臂两个关节伺服角跟踪轨迹;图 9 为柔性机械臂两个关节伺服角跟踪误差变化曲线;图 10 为柔性机械臂的两个连杆偏转角响应曲线;图 11 为柔性机械臂两个控制输入变化曲线。

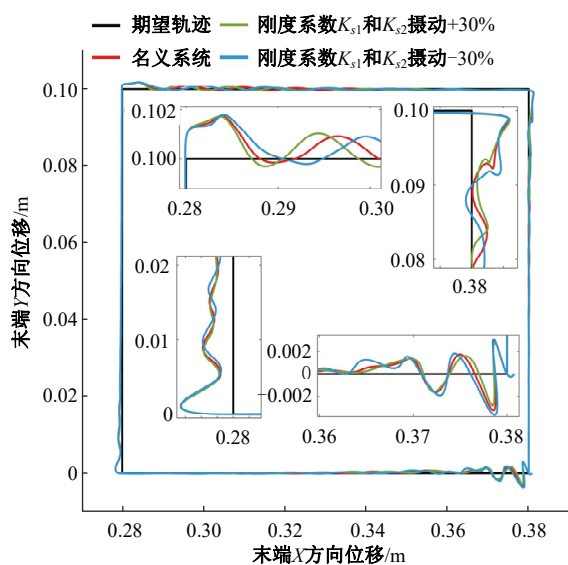


图 7 末端位置跟踪轨迹

Fig. 7 End-effector position tracking trajectory

3.3 外部干扰验证

为模拟柔性机械臂在实际操作中遇到操作人员误触或周边物体碰撞等突发情况,在仿真过程中设计并实施了以下实验方案:在仿真进行到第

20 s 时,针对连杆 1 的偏转角引入一个持续时间为 1 s、幅值为 0.01 弧度的三角波形干扰;在仿真进行到第 60 s 时,针对连杆 2 的偏转角施加一个持续时间为 1 s、幅值为 0.01 rad 的三角波形干扰。设置伺服关节初始角度为 $\theta_{11} = 0.14$ rad、 $\theta_{21} = -0.14$ rad,在 MATLAB/simulink 仿真环境下,验证所提出的控制策略在应对上述干扰情境下的抗干扰控制性能。

仿真结果如图 12~图 16 所示,图 12 为末端位置跟踪轨迹;图 13 为柔性机械臂两个关节伺服角跟踪轨迹;图 14 为柔性机械臂两个关节伺服角跟踪误差变化曲线;图 15 为柔性机械臂的两个连杆偏转角响应曲线;图 16 为柔性机械臂两个控制输入变化曲线。

从图 12 可以看出,相较于收缩理论(Contraction theory, CT)复合控制方案^[22],INDI 和 RISE 复合控制策略在末端轨迹跟踪方面表现出更高的精度。图 13 进一步展示了关节伺服角跟踪轨迹,表明 INDI 和 RISE 复合控制方案在应对外界干扰方面具有更强的鲁棒性,与收缩理论复合控制策略相比,扰动对关节角的影响更小。图 14 的关节伺服角跟踪误差曲线直观地显示了 INDI 和 RISE 复合控制方案在跟踪误差和轨迹跟踪精度方面的优势。同时,图 15 的连杆偏转角响应曲线表明,该策略在抑制连杆抖振方面效果显著,即使在受到外界扰动情况下,连杆抖振的幅度也更小,系统达到稳定状态的时间更短。图 16 比较了收缩理论复合控制方案与 INDI

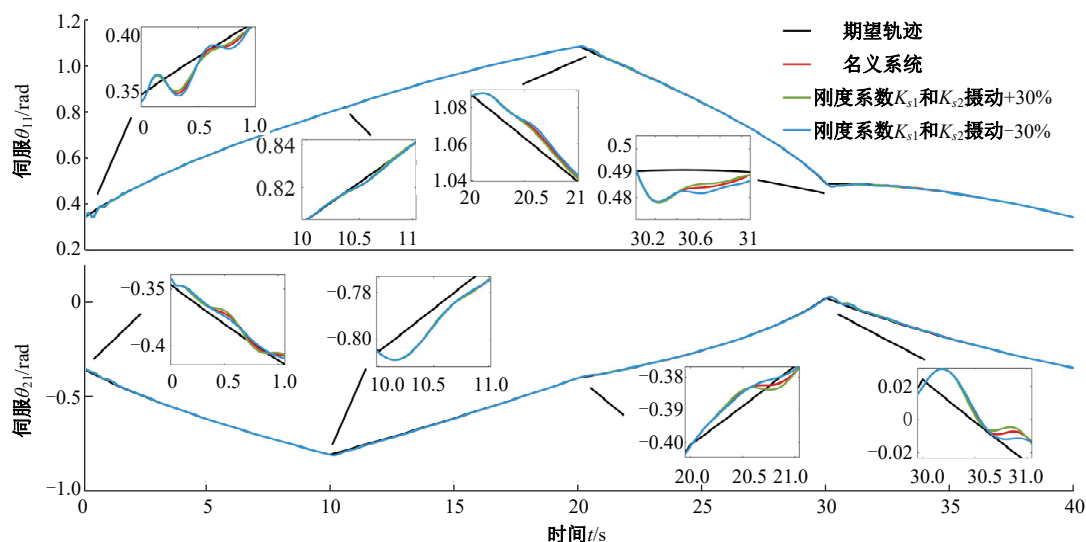
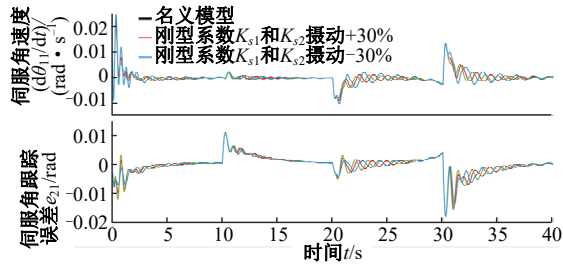
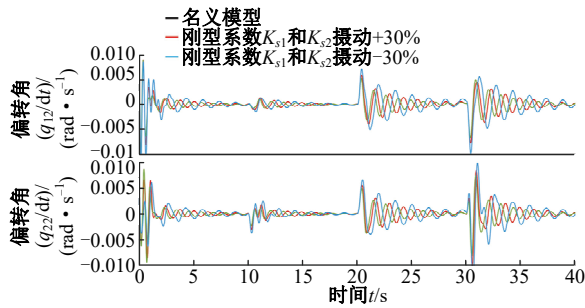


图 8 伺服角 θ_{11} 、 θ_{21} 跟踪轨迹

Fig. 8 Tracking trajectory of servo angles θ_{11} and θ_{21}

图9 伺服角跟踪误差 e_{11} 、 e_{21} 变化曲线Fig. 9 Variation curves of tracking errors e_{11} and e_{21} for servo angles图10 连杆偏转角 q_{12} 、 q_{22} 响应曲线Fig. 10 Response curves of link deviation angles q_{12} and q_{22}

和RISE复合控制方案的控制输入变化曲线,结果表明,INDI和RISE复合控制方案的控制输入抖动小于收缩理论复合控制方案,即使在扰动发生时,其控制输入抖动依然较小,显示出更好的控制效果和安全性。综上所述,本文提出的INDI和RISE复合控制方案在轨迹跟踪控制和抑

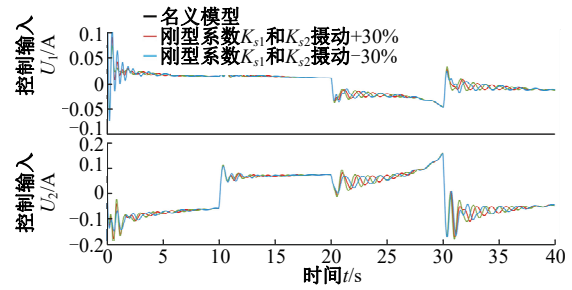
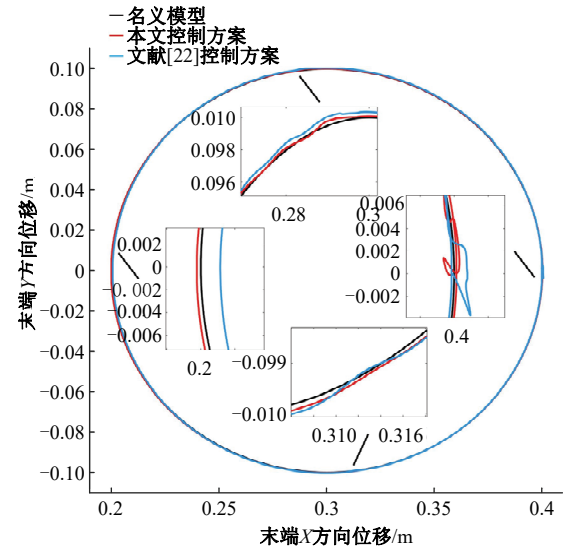
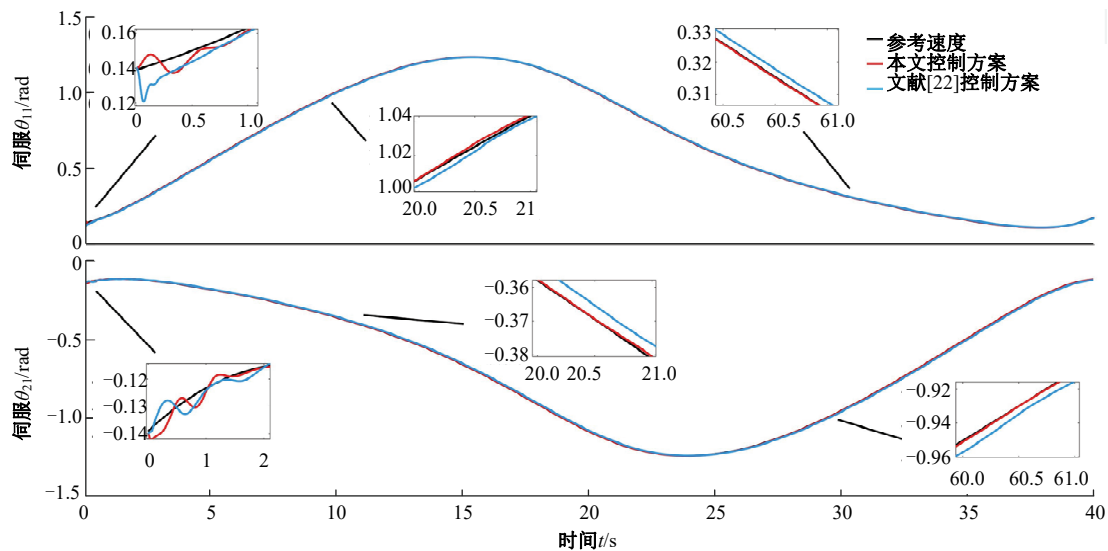
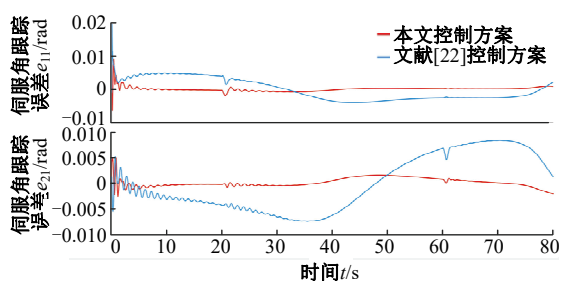
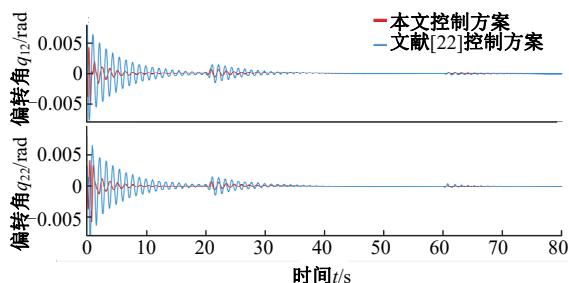
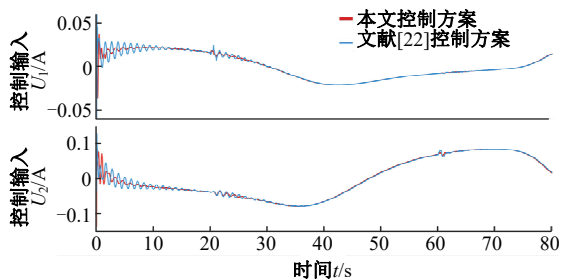
图11 控制输入 U_1 、 U_2 变化曲线Fig. 11 Variation curves of control inputs U_1 and U_2 

图12 末端位置跟踪轨迹

Fig. 12 End-effector position tracking trajectory

制干扰方面有一定的优势。

图13 伺服角 θ_{11} 、 θ_{21} 跟踪轨迹Fig. 13 Tracking trajectory of servo angles θ_{11} and θ_{21}

图 14 伺服角跟踪误差 e_{11} 、 e_{21} 变化曲线Fig. 14 Variation curves of tracking errors e_{11} and e_{21} for servo angles图 15 连杆偏转角 q_{12} 、 q_{22} 响应曲线Fig. 15 Response curves of link deviation angles q_{12} and q_{22} 图 16 控制输入 U_1 、 U_2 变化曲线Fig. 16 Variation curves of control inputs U_1 and U_2

4 结束语

针对柔性机械臂在实际应用中,长期运行导致内部参数摄动和外界干扰影响到末端执行器的作业性能问题,设计了一种复合控制策略。首先,基于奇异摄动理论将二连杆柔性机械臂模型分解为慢速与快速两个子系统,并在此基础上,设计了增量非线性动态逆(INDI)与误差符号鲁棒积分(RISE)的复合控制策略。经过仿真测试,本文提出的控制方案在柔性机械臂末端位置的轨迹跟踪、连杆抖振抑制以及抗干扰方面,均展现出较好的控制优势。

参考文献:

[1] 田成军, 颜禹, 崔仁伟, 等. 基于深度强化学习的机

械臂自主抓取算法[J]. 吉林大学学报: 工学版, 2026, 56(3): 662-669.

Tian Chen-jun, Yan Yu, Cui Ren-wei, et al. Autonomous grasping algorithm for manipulators based on deep reinforcement learning [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2026, 56(3): 662-669.

[2] Wei Y, Yu G, Fei Y W, et al. Robust adaptive dynamic surface control of multi-link flexible joint manipulator with input saturation[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2022, 20(2): 577-588.

[3] Zhao B, Yao X, Zheng W X. Fixed-time composite anti-disturbance control for flexible-link manipulators based on disturbance observer[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2024, 71 (7): 3390-3400.

[4] Feliu-Talegon D, Feliu-Batlle V. Control of very lightweight 2-DOF single-link flexible robots robust to strain gauge sensor disturbances: a fractional-order approach[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology 2022, 30(1): 14-29.

[5] Lochan K, Singh J P, Roy B K, et al. Design of a Composite Control in Two-Time Scale Using Nonlinear Disturbance Observer-Based SMC and Backstepping Control of a Two-Link Flexible Manipulator [M]. London: Academic Press, 2019.

[6] Zhu X, Cao J, Yannick C, et al. High-precision tip tracking of a flexible link manipulator using two-time scale adaptive robust control[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2023, 28(5): 2576-2587.

[7] 顾振宇, 李斌. 柔性机械臂系统双时标模型的 H_∞ 鲁棒控制[J]. 机械设计与制造, 2023(3): 58-62.

Gu Zhen-yu, Li Bin. H_∞ robust control for dual-time-scale model of flexible manipulator systems[J]. Machinery Design and Manufacture, 2023(3): 58-62.

[8] 钱伟, 徐海钦, 王霞, 等. 在线数据记录和扰动观测器相结合的柔性机械臂复合学习控制[J]. 控制理论与应用, 2024, 41(8): 1417-1426.

Qian Wei, Xu Hai-qing, Wang Xia, et al. Composite learning control for flexible manipulators combining online data recording and disturbance observer[J]. Control Theory and Applications, 2024, 41(8): 1417-1426.

[9] Ayankoso S A, Habib M K. Data-driven modeling of a two-link flexible manipulator (TLFM)[C]//21st

- International Conference on Research and Education in Mechatronics(REM). Piscataway, NJ: IEEE. 2020: 1-6.
- [10] 高欢. 柔性机械臂鲁棒控制技术[D]. 南京: 南京航空航天大学自动化学院, 2018.
- Gao Huan. Robust control techniques for flexible manipulators[D]. Nanjing: College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2018.
- [11] 夏俭俭. 面向柔性机械臂振动抑制的轨迹规划与联合控制研究[D]. 济南: 山东大学机械工程学院, 2023.
- Xia Jian-jian. Research on trajectory planning and joint control for vibration suppression of flexible manipulators [D]. Jinan: School of Mechanical Engineering, Shandong University, 2023.
- [12] 胡云峰, 李佳敏, 唐志国. 移动装弹机械臂的逆运动学多种群灰狼算法求解方法[J]. 吉林大学学报: 工学版, 2025, 55(4): 1443-1452.
- Hu Yun-feng, Li Jia-min, Tang Zhi-guo. Solving method on inverse kinematics of mobile loading missile manipulator by multi-population grey wolf optimization algorithm[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2025, 55(4): 1443-1452.
- [13] 李宏胜. 机器人控制技术[M]. 北京: 机械工业出版社, 2020.
- [14] 解占新, 闫政. 基于增量非线性动态逆的液压执行器力控制策略研究[J]. 液压与气动, 2022, 46(7): 74-82.
- Xie Zhan-xin, Yan Zheng. Research on force control strategy for hydraulic actuators based on incremental nonlinear dynamic inversion [J]. Hydraulics and Pneumatics, 2022, 46(7): 74-82.
- [15] Saldiran E, Inalhan G. Incremental Nonlinear Dynamic Inversion-Based Trajectory Tracking Controller for an Agile Quadrotor: Design, Analysis, and Flight Tests Results[M]. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023.
- [16] Ahmadi K, Asadi D, Nabavi-Chashmi S Y, et al. Modified adaptive discrete-time incremental nonlinear dynamic inversion control for quad-rotors in the presence of motor faults[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 188: 109989.
- [17] 符式康, 刘俊辉, 陈昊, 等. 基于改进跟踪微分器的增量动态逆控制器设计[J]. 系统工程与电子技术, 2024(11): 1-10.
- Fu Shi-kang, Liu Jun-hui, Chen Hao, et al. Design of incremental dynamic inversion controller based on improved tracking differentiator[J]. Systems Engineering and Electronics, 2024(11): 1-10.
- [18] 李壮举, 杜朋达, 王宁. 基于改进 LESO 的四旋翼无人机模糊线性自抗扰控制方法[J]. 电子学报, 2024, 52(9): 3185-3194.
- Li Zhuang-ju, Du Peng-da, Wang Ning. Fuzzy linear active disturbance rejection control method for quadrotor UAV based on improved LESO[J]. Acta Electronica Sinica, 2024, 52(9): 3185-3194.
- [19] Afef H, Ahmed C, Afef A. Observer-based robust integral of the sign of the error control of class I of underactuated mechanical systems: theory and real-time experiments[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2022, 44(2): 339-352.
- [20] Sharma B, Agrawal P, Misra A. Partial feedback linearized RISE controller for active flutter suppression [J]. IFAC-PapersOnLine, 2022, 55(22): 159-164.
- [21] Tao G. A simple alternative to the Barbalat lemma [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42(5): 698-699.
- [22] Lochan K, Roy B K, Subudhi B. Use of memristive chaotic signal as a desired trajectory for a two-link flexible manipulator using contraction theory based on a composite control technique[J]. The European Physical Journal Special Topics, 2019, 228: 2215-2231.