

考虑任务优先级的冗余轮式移动机械臂位形优化

邢宏军¹, 徐宇哲¹, 周忠歌¹, 刘彦清¹, 丁亮², 陈金宝¹

(1. 南京航空航天大学 宇航空间机构全国重点实验室, 南京 210016; 2. 哈尔滨工业大学 机器人技术与系统全国重点实验室, 哈尔滨 150080)

摘要: 针对轮式移动机械臂在复杂环境中灵巧作业的需求, 开展了面向冗余轮式移动机械臂 (WMM) 考虑任务优先级的位形优化研究。为实现该目标, 首先, 分别建立轮式移动平台和多自由度机械臂运动学模型, 并在此基础上构建 WMM 整机运动学模型; 然后, 基于任务优先级框架设计 WMM 逆运动学求解方法, 并开展面向车-臂双轨迹跟踪、避奇异位形、避关节极限等多任务目标的 WMM 位形优化研究; 最后, 结合 SolidWorks、Matlab/Simulink 软件进行 WMM 复杂工况仿真, 仿真结果验证了该方法的有效性。

关键词: 轮式移动机械臂; 任务优先级; 逆运动学; 位形优化; 轨迹跟踪

中图分类号: TP242 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5497(2025)11-3507-14

DOI: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb.20240133

Configuration optimization of redundant wheeled mobile manipulators considering task priority

XING Hong-jun¹, XU Yu-zhe¹, ZHOU Zhong-ge¹, LIU Yan-qing¹, DING Liang², CHEN Jin-bao¹

(1. National Key Laboratory of Aerospace Mechanism, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. State Key Laboratory of Robotics and System, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: To facilitate the dexterous operation of a mobile manipulator in a complex environment, we conducted configuration optimization based on task priority for a redundant wheeled mobile manipulator (WMM). To achieve this objective, we initially established the kinematic models for the wheeled mobile base and the multi-degree-of-freedom manipulator separately. Subsequently, we constructed the kinematic model for the WMM system based on these foundations. Subsequently, we designed an inverse kinematic model for the WMM using the task priority framework. Configuration optimization was then performed for various targets, including vehicle-arm dual trajectory tracking, singularity avoidance, and joint limit avoidance. Finally, the performance of the WMM in a complex environment is simulated using SolidWorks and Matlab/Simulink. The simulation results validate the effectiveness of the proposed method.

Key words: wheeled mobile manipulator; task priority; inverse kinematics; configuration optimization; trajectory tracking

收稿日期: 2024-02-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(52405025, U21B6002); 江苏省自然科学基金项目(BK20230889); 机器人技术与系统全国重点实验室开放基金项目(SKLRs-2023-KF-04).

作者简介: 邢宏军(1992-), 男, 副研究员, 博士. 研究方向: 移动机械臂操控. E-mail: xinghj@nuaa.edu.cn

0 引言

随着人类社会的不断发展,自动化系统与机器人正逐渐取代人类去执行重复单调、环境危险、高体力消耗的作业任务,且在众多领域已取得了突出成果,如物流调度、智能制造、灾害救援等^[1]。

轮式移动机械臂(Wheeled mobile manipulator, WMM)兼具轮式移动平台卓越的移动性能和多自由度机械臂灵巧作业性能,更便于进行复杂环境作业^[2]。但同时 WMM 系统较为复杂,其具有的多自由度和移动平台可能存在的完整/非完整约束等给其精确建模带来了重大挑战。在运动规划和控制层面, WMM 系统多自由度引入的冗余特性可用于优化其作业位形,进而提高任务完成能力和作业效率,但如何设计位形优化策略是广大科研人员面临的重大难题^[3]。

针对移动机械臂系统运动学研究, Picard 等^[4]和 Teka 等^[5]对机械臂和移动平台分别进行运动学建模,然后融合两个模型进行整机系统运动研究。Chung 等^[6]针对移动平台和机械臂采用不同的建模策略搭建了系统耦合运动学模型。陈杰等^[7]考虑非完整约束建立了履带式移动机械臂模型,并提出了一种基于自适应模糊控制和非奇异终端滑模控制相结合的轨迹跟踪控制方法。Seraji^[8]着重于如何实现子系统运动学的控制,采用了将移动平台作为机械臂约束条件的建模思路,但该方法无法得到 WMM 系统整机运动学控制器。陈良港等^[9]将移动底座与机械臂视为一个系统建立运动学模型,推导了通用形式的几何雅克比矩阵,解决了任务空间速度与关节空间速度没有直接运动学映射的问题。De Luca 等^[10,11]将 WMM 视为一个整体进行建模,并融合移动平台和机械臂动态关系,进行了仿真验证;随后,该团队再次基于该方法构建了含有转向轮的非完整约束 WMM 运动学模型与控制策略。Chen 等^[12]结合矩阵变换设计了完整约束 WMM 运动学建模方法。Li 等^[13]通过约束补充,构建了冗余性 WMM 的扩展雅克比矩阵,并得到了其非冗余运动学模型。

在 WMM 位形优化方面,相比于常规冗余机器人,在其位形优化中需考虑移动平台带来的完整/非完整约束,位形优化目标包括但不限于避免奇异、避免关节位置超限、避免自身及环境碰撞、增强末端运动性能、多轨迹同时跟踪等^[3,14]。Jia 等^[15]

基于雅可比加权伪逆矩阵方法实现了移动平台和机械臂间的运动分配,从而提高了 WMM 末端的运动精度。Xing 等^[16]在考虑机械臂关节限位的基础上,设计了移动平台和机械臂运动分配的自适应加权矩阵,并显著优化了机械臂末端的力输出性能。张铮等^[17]针对冗余机械臂提出了一种综合考虑关节避限和能耗最优的目标函数,并设计自适应权重参数实现了对任务优先级的调节。武毅等^[18]提出了一种基于多任务转换的冗余机器人控制算法,解决了机器人在任务空间避障的问题。Farelo 等^[19]结合移动平台和机械臂的运动学模型,采用雅克比矩阵的加权伪逆实现了车-臂对双轨迹跟踪,并成功在 9 自由度 WMM 系统中得到应用。Mashali 等^[20]基于任务优先级框架提出了同时规划 WMM 末端和移动平台轨迹的方案,可实现 WMM 在无法同时跟踪两种轨迹下优先保证 WMM 末端运动轨迹跟踪的目标。

目前,国内外针对冗余机器人系统的研究主要以传统多自由度冗余机械臂为对象,较少涉及面向 WMM 系统的位形优化策略和目标函数确定。已报道的 WMM 位形优化方法主要采用基于冗余机械臂的冗余分解策略。然而,这种方法未考虑到 WMM 系统的特殊性,例如移动平台和机械臂模型之间的差异以及约束条件的区别。因此,在充分考虑 WMM 系统特点的前提下,亟需改进目标函数及优化方法,以提高 WMM 系统在复杂环境下的作业性能。

本文以非完整约束 WMM 系统为研究对象,建立了融合机械臂和移动平台的 WMM 整机运动学模型,并基于任务优先级框架开展了其位形优化研究,实现了车-臂双轨迹跟踪、避奇异位形、避关节极限三方面的位形优化,并通过在 Matlab/Simulink 中搭建仿真模型验证了本文方法的有效性。

1 WMM 整机运动学建模

1.1 非完整约束移动平台运动学建模

本文使用的 WMM 三维模型如图 1 所示,其包含一个双轮非完整约束移动平台,其模型如图 2 所示。

该移动平台前部有左右两个主动轮,后部有一个被动万向轮,起着支撑平台的作用。其中, $\{\Sigma_w\}$ 为世界坐标系, P_b 点为机械臂基座与移动平台的连接点,其世界坐标系 $\{\Sigma_w\}$ 下的广义坐标



图 1 双轮非完整约束移动机械臂

Fig. 1 Two-wheeled nonholonomic mobile manipulator

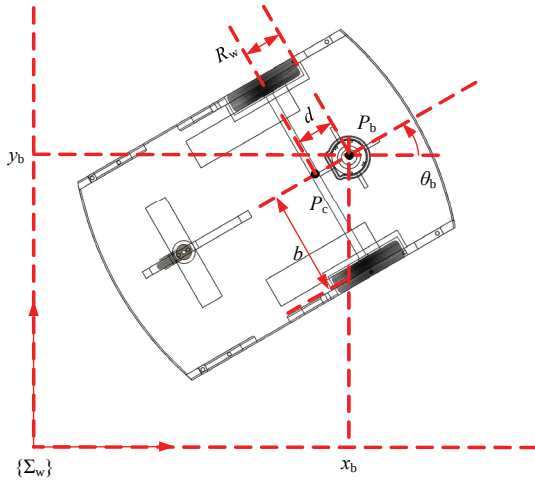


图 2 非完整约束移动平台模型

Fig. 2 Nonholonomic mobile base model

为 $q_b = [x_b, y_b, \theta_b]^T$, 左右驱动车轮的转速为 $v_b = (\omega_l, \omega_r)^T$, 则在假定移动平台车轮与地面间纯滚动的情况下, 移动平台的运动学模型可表示为:

$$\dot{q}_b = \Psi(q_b) v_b \quad (1)$$

式中: $\Psi(q_b)$ 为车轮转速至移动平台广义速度的速度传递矩阵。根据式(1)和图2可知, 非完整约束双轮移动平台速度传递矩阵为:

$$\Psi(q_b) = \frac{R_w}{2b} \begin{pmatrix} b \cdot c\theta_b + d \cdot s\theta_b & b \cdot c\theta_b - d \cdot s\theta_b \\ b \cdot s\theta_b - d \cdot c\theta_b & b \cdot s\theta_b + d \cdot c\theta_b \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中: $c\theta$ 为 $\cos(\theta)$ 的简写, $s\theta$ 为 $\sin(\theta)$ 的简写; R_w 为左右车轮的半径; b 为车轮纵向对称面与车体对称面的距离; d 为安装点 P_b 相对于 P_c 点的前置距离。

1.2 多自由度机械臂运动学建模

本文选取的机械臂为7自由度机械臂(Kinova Gen 3; Kinova Robotics; Canada), 其结构如图3所示。采用D-H坐标描述法^[21]建立该机械臂坐

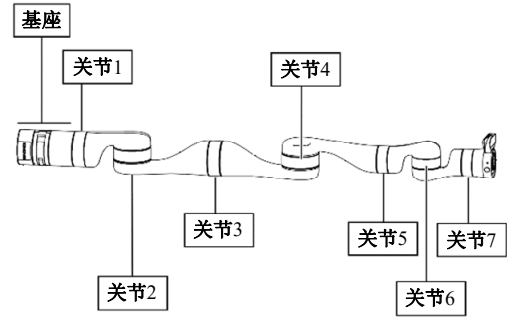


图 3 Kinova Gen 3机械臂结构图

Fig. 3 Structure diagram of Kinova Gen 3 manipulator

标系, 其D-H参数表如表1所示, 机械臂关节角 θ_m 位置的上限和下限如表2所示。其中, 表1中的EE代表机械臂的末端执行器。

图4为D-H法中各连杆参数的定义, 其中, a_i 为沿 $\hat{X}_i$ 轴, 从 $\hat{Z}_i$ 移动到 $\hat{Z}_{i+1}$ 的距离; α_i 为绕 $\hat{X}_i$ 轴, 从 $\hat{Z}_i$ 旋转到 $\hat{Z}_{i+1}$ 的角度; d_i 为沿 $\hat{Z}_i$ 轴, 从 $\hat{X}_{i-1}$ 移动到 $\hat{X}_i$ 的距离; θ_i 为绕 $\hat{Z}_i$ 轴, 从 $\hat{X}_{i-1}$ 旋转到 $\hat{X}_i$ 的角度。

表 1 Kinova Gen 3机械臂D-H参数表

Table 1 D-H parameter of Kinova Gen 3 manipulator

杆件序号	连杆扭转角/(°)	连杆长度/m	连杆偏距/m	关节角/(°)
1	0	0	0.284 8	θ_1
2	$\pi/2$	0	0.011 8	θ_2
3	$-\pi/2$	0	0.420 8	θ_3
4	$\pi/2$	0	0.012 8	θ_4
5	$-\pi/2$	0	0.314 3	θ_5
6	$\pi/2$	0	0	θ_6
7	$-\pi/2$	0	0	θ_7
EE	0	0	0.237 4	0

表 2 Kinova Gen 3机械臂关节运动范围

Table 2 Joint motion range of Kinova Gen 3 manipulator

运动范围	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
上限 $\theta/(^\circ)$	$+\infty$	+126	$+\infty$	+147	$+\infty$	+117	$+\infty$
下限 $\theta/(^\circ)$	$-\infty$	-126	$-\infty$	-147	$-\infty$	-117	$-\infty$

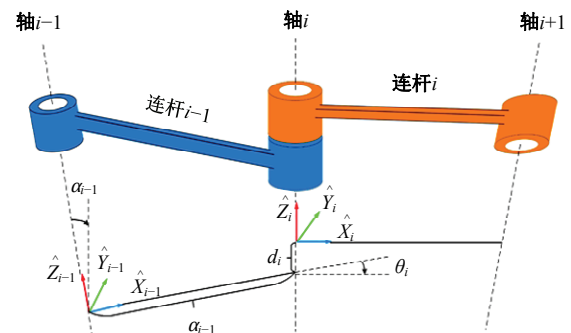


图 4 D-H法连杆参数的定义

Fig. 4 Definition of link parameters by D-H method

结合表 1 和图 4, 可求得自连杆坐标系 $\{i-1\}$ 到连杆坐标系 $\{i\}$ 的位置姿态变换关系, 即 $\{i-1\}$ 系到 $\{i\}$ 系的位姿矩阵:

$${}^{i-1}T = \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{i-1}R_{3 \times 3} & {}^{i-1}p_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

式中: 连杆 $\{0\}$ 为基座, 连杆 $\{8\}$ 为末端执行器。位姿矩阵 ${}^{i-1}T$ 是一个 4×4 的矩阵, ${}^{i-1}T$ 的前三行前三列, 即姿态矩阵 ${}^{i-1}R$, 为坐标系 $\{i-1\}$ 到坐标系 $\{i\}$ 的姿态变换关系; ${}^{i-1}T$ 的前三行第四列, 即位置矢量 ${}^{i-1}p$, 为坐标系 $\{i-1\}$ 坐标原点到坐标系 $\{i\}$ 坐标原点的位置矢量。

位姿矩阵 T 满足矩阵乘法法则, 即:

$${}^A T = {}^A T_B {}^B T_C \quad (4)$$

结合式 (3) 和式 (4), 可以求出机械臂任意两连杆系之间的位姿矩阵 ${}^i T_k$ 。

之后求解以机械臂自身基座坐标系为参考系的雅克比矩阵 ${}^0 J_m(\theta_m)$ 。定义机械臂关节坐标为 $\theta_m = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7)^T$, 结合求得的机械臂位姿矩阵即可通过矢量积法^[22]求得机械臂关节空间速度与其末端任务空间速度之间的传递关系, 即机械臂的雅克比矩阵。

结合机械臂雅克比矩阵, 机械臂关节速度至机械臂末端笛卡尔速度的映射关系可表示为:

$${}^0 \dot{x}_{EE} = {}^0 J_m(\theta_m) \dot{\theta}_m \quad (5)$$

式中: ${}^0 \dot{x}_{EE} = ({}^0 \dot{x}, {}^0 \dot{y}, {}^0 \dot{z}, {}^0 \omega_x, {}^0 \omega_y, {}^0 \omega_z)^T$ 为末端执行器在机械臂基座系中的笛卡尔速度; ${}^0 J_m(\theta_m)$ 为机械臂在自身基座坐标系下的雅克比矩阵; $\dot{\theta}_m = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6, \dot{\theta}_7)^T$ 为机械臂的关节速度。

以机械臂的第 i 个关节为例, 该关节的关节速度 $\dot{\theta}_i$ 引起的末端笛卡尔速度为:

$$\begin{pmatrix} {}^0 v_i \\ {}^0 \omega_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0 z_i \times {}^{0|i} p \\ {}^0 z_i \end{pmatrix} \dot{\theta}_i \quad (6)$$

式中: ${}^0 z_i$ 为机械臂基座系下第 i 个关节的关节轴向单位矢量, 即连杆坐标系 $\{i\}$ 的 z 轴单位坐标基矢量在机械臂基座系下的坐标表示; ${}^{0|i} p$ 为连杆坐标系 $\{i\}$ 原点到末端执行器坐标系原点的位置矢量在机械臂基座系下的表示。

由式 (6) 和雅克比矩阵的运动学定义可知, 机械臂雅克比矩阵的第 i 列为:

$${}^0 J_{m,i}(\theta_i) = \begin{pmatrix} {}^0 z_i \times {}^{0|i} p \\ {}^0 z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0 R \cdot Z_i \times {}^i R \cdot {}^i p \\ {}^i R \cdot Z_i \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中: $Z_i = (0, 0, 1)^T$, ${}^0 R$ 和 ${}^i p$ 可由式 (3) (4) 分别求出。

1.3 WMM 雅克比矩阵建立

将式 (7) 中求得的机械臂雅克比矩阵的参考坐标系由机械臂基坐标系转换为世界坐标系, 可得基于世界坐标系的机械臂雅克比矩阵为:

$$J_m(q_b, \theta_m) = \begin{pmatrix} {}^W_B R(q_b) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & {}^W_B R(q_b) \end{pmatrix} \cdot {}^0 J_m(\theta_m) \quad (8)$$

式中: ${}^W_B R(q_b)$ 为世界坐标系与机械臂基坐标系间的旋转矩阵, 可表示为:

$${}^W_B R(q_b) = \begin{pmatrix} c\theta_b & -s\theta_b & 0 \\ s\theta_b & c\theta_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

将式 (1) 中车轮转速至移动平台广义速度的速度传递矩阵改写为移动平台笛卡尔速度与车轮转速间的映射表达式, 可得:

$$\dot{x}_{mb} = J_{mb} \dot{q}_b = J_{mb} \Psi(q_b) v_b = J_b(q_b) v_b \quad (10)$$

式中: $\dot{x}_{mb}$ 为移动平台在 $\{\Sigma_w\}$ 下的笛卡尔空间速度, 包括水平方向的平移速度和绕竖直轴的转动速度。转换矩阵 J_{mb} 为:

$$J_{mb} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

由此可得移动平台的雅克比矩阵:

$$J_b(q_b) = J_{mb} \Psi(q_b) \quad (12)$$

联立移动平台雅克比矩阵和机械臂雅克比矩阵, 可得 WMM 系统整机雅克比矩阵:

$$J(q_b, \theta_m) = (J_b(q_b), J_m(q_b, \theta_m)) \quad (13)$$

通常情况下, 多自由度机械臂所受约束为完整约束, 因此, 一般直接以其关节角速度作为其关节广义速度, 即: $\dot{q}_m = v_m$ 。此时, 结合式 (13), 可得 WMM 在速度级上的正运动学模型为:

$$\dot{x}_{EE} = J(q_b, \theta_m) v \quad (14)$$

式中: $\dot{x}_{EE} \in \mathbb{R}^6$ 为 WMM 末端运动速度; $v = [v_b^T, v_m^T]^T \in \mathbb{R}^9$ 为 WMM 系统的关节运动速度 (移动平台中为左右驱动车轮转速)。

至此, 通过对机械臂和移动平台雅克比矩阵求解得到了 WMM 的雅克比矩阵, 并进一步分析

正运动关系。由此,给定各关节的速度 $\boldsymbol{v}$,便可得出 WMM 末端执行器的在笛卡尔空间的速度 $\dot{\boldsymbol{x}}_{\text{EE}}$ 。

2 基于任务优先级的 WMM 位形优化设计

2.1 面向机械臂末端轨迹跟踪的主任务位形优化

结合式(14)建立的 WMM 速度层正运动学模型,引入考虑任务优先级的 WMM 逆运动学求解方法,可求得面向主任务的 WMM 关节速度为:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{J}^\dagger \dot{\boldsymbol{x}}_{\text{EE}} \quad (15)$$

式中: $\boldsymbol{v}_1$ 为 WMM 主任务(机械臂末端轨迹跟踪)对应的关节速度; $\boldsymbol{J}^\dagger$ 为 WMM 雅克比矩阵的加权伪逆矩阵,可表示为:

$$\boldsymbol{J}^\dagger = \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{J}^T (\boldsymbol{J} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{J}^T)^{-1} \quad (16)$$

式中: $\boldsymbol{W}$ 为对角矩阵,表示加权因子。

2.2 面向移动平台轨迹跟踪的次任务位形优化

上文描述了对 WMM 末端运动轨迹的跟踪控制,但该方法无法实现对移动平台的运动跟踪。在实际作业过程中,移动平台运动的不可控常常会导致 WMM 与环境中的障碍物发生碰撞。为实现对 WMM 移动平台的轨迹跟踪,本节将其定义为 WMM 系统位形优化的次任务,以达到其在复杂环境中的避障目的。

将移动平台轨迹跟踪作为次任务,此时在运动过程中可能出现两种现象。当 WMM 末端的轨迹点不超出移动平台轨迹点所确定的机械臂工作空间范围时,WMM 可以同时实现对两条轨迹的跟踪,即“双轨迹跟踪”;反之,WMM 会优先保证高优先级任务,仅对 WMM 末端的轨迹进行跟踪,即“仅末端跟踪”。

通过将次任务的优化指令投影到主任务的雅克比矩阵零空间内实现上述任务优先级排序,融合次任务的 WMM 关节速度可表示为:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}^\dagger \dot{\boldsymbol{x}}_{\text{EE}} + \boldsymbol{\mathcal{N}}_{21} \boldsymbol{\mu}_1 \quad (17)$$

式中: $\boldsymbol{\mu}_1$ 为次任务对应的 WMM 关节速度; $\boldsymbol{\mathcal{N}}_{21}$ 为次任务向主任务雅克比矩阵零空间投影的正交映射矩阵,可表示为:

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_{21} = \boldsymbol{I}_{n \times n} - \boldsymbol{J}^\dagger \boldsymbol{J} \quad (18)$$

式中: $\boldsymbol{I}_{n \times n}$ 为单位矩阵; n 为 WMM 关节空间的维度。

下面求解次级任务对应的关节速度 $\boldsymbol{\mu}_1$ 。式(14)描述了 WMM 末端速度 $\dot{\boldsymbol{x}}_{\text{EE}}$ 和 WMM 关节速度 $\boldsymbol{v}$ 间的映射关系。若以 WMM 关节速度 $\boldsymbol{v}$ 作为移动平台关节空间速度矢量,则移动平台运动学模型为:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\text{mb}} = \boldsymbol{J}_{b0} \boldsymbol{v} \quad (19)$$

式中: $\dot{\boldsymbol{x}}_{\text{mb}}$ 为移动平台在 $\{\Sigma_w\}$ 下的笛卡尔空间速度,即 P_b 点的速度; $\boldsymbol{J}_{b0}$ 为移动平台扩展雅克比矩阵:

$$\boldsymbol{J}_{b0} = [\boldsymbol{J}_b, \mathbf{0}_{6 \times 7}] \quad (20)$$

将式(17)代入式(19),可得:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\text{mb}} = \boldsymbol{J}_{b0} \boldsymbol{J}^\dagger \dot{\boldsymbol{x}}_{\text{EE}} + \boldsymbol{J}_{b0} \boldsymbol{\mathcal{N}}_{21} \boldsymbol{\mu}_1 \quad (21)$$

由式(21)可得考虑任务优先级的协同任务对应的关节速度为:

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{J}^\dagger \dot{\boldsymbol{x}}_{\text{EE}} + \boldsymbol{\mathcal{N}}_{21} (\boldsymbol{J}_{b0} \boldsymbol{\mathcal{N}}_{21})^\dagger (\dot{\boldsymbol{x}}_{\text{mb}} - \boldsymbol{J}_{b0} \boldsymbol{J}^\dagger \dot{\boldsymbol{x}}_{\text{EE}}) \quad (22)$$

WMM 从“双轨迹跟踪”向“仅末端跟踪”过渡时可能导致机械臂接近或处于奇异位形,造成雅克比矩阵 $\boldsymbol{J}_{b0} \boldsymbol{\mathcal{N}}_{21}$ 不满秩。按式(16)求解 $(\boldsymbol{J}_{b0} \boldsymbol{\mathcal{N}}_{21})^\dagger$,将导致 $\boldsymbol{v}_2$ 范数极大,从而引起 WMM 的剧烈振动。为此,在求 $(\boldsymbol{J}_{b0} \boldsymbol{\mathcal{N}}_{21})^\dagger$ 时采用阻尼最小二乘伪逆求解方法,修正后的雅克比矩阵伪逆为:

$$\boldsymbol{J}^\dagger = \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{J}^T (\boldsymbol{J} \boldsymbol{W}^{-1} \boldsymbol{J}^T + k_d \boldsymbol{I})^{-1} \quad (23)$$

其中, k_d 的值为:

$$k_d = \begin{cases} -k_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_{m,\min}}\right) + k_0, & \sigma_m < \sigma_{m,\min} \\ 0, & \sigma_m \geq \sigma_{m,\min} \end{cases} \quad (24)$$

式中: k_0 为 WMM 接近奇异位形时维持系统稳定的阻尼值; σ_m 为雅克比矩阵 $\boldsymbol{J}_m$ 的最小奇异值; $\sigma_{m,\min}$ 为奇异位形判定标准。

2.3 面向系统性能指标的第三级任务位形优化

当 WMM 系统实现了对末端轨迹和移动平台轨迹的同步跟踪后,若系统仍有剩余自由度,此时可引入第三级子任务,以优化 WMM 系统的作业性能,在本研究中,第三级子任务定义为避免关节极限和避奇异位形。

2.3.1 基于第三级子任务的位形优化设计

通过将第三级子任务投影到主任务和次任务雅克比矩阵的零空间,以实现下一层级的任务,避免对更高优先级任务造成干扰。运用与 2.2 节类似的方法,此时,考虑三级协同任务的 WMM 关

节速度为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_3 = & \boldsymbol{J}^+ \dot{\boldsymbol{x}}_{EE} + \mathcal{N}_{21}(\boldsymbol{J}_{b0} \mathcal{N}_{21})^\dagger (\dot{\boldsymbol{x}}_{mb} - \boldsymbol{J}_{b0} \boldsymbol{J}^+ \dot{\boldsymbol{x}}_{EE}) \\ & + \mathcal{N}_{21} \mathcal{N}_{32} \boldsymbol{\mu}_2 \end{aligned} \quad (25)$$

式中: $\boldsymbol{\mu}_2$ 为第三级子任务对应的 WMM 关节速度; $\mathcal{N}_{32}$ 为第三级子任务向次级任务对应的雅可比矩阵零空间的投影矩阵, 由式(18)和式(22)得:

$$\mathcal{N}_{32} = \boldsymbol{I}_{n \times n} - (\boldsymbol{J}_{b0} \mathcal{N}_{21})^\dagger (\boldsymbol{J}_{b0} \mathcal{N}_{21}) \quad (26)$$

式中: $(\boldsymbol{J}_{b0} \mathcal{N}_{21})^\dagger$ 的值可由式(23)求得。

考虑到在复杂环境中, WMM 末端和移动平台的独立运动容易造成机械臂关节达到运动极限或机械臂整体处于奇异位形。因此, 本研究将利用 WMM 的剩余自由度优化机械臂位形以使其尽可能远离关节极限和奇异位形。此时, 第三级子任务对应的 WMM 关节速度可改写为 $\boldsymbol{\mu}_2 = [0, 0, \boldsymbol{v}_m^\top]^\top$, 其中, $\boldsymbol{v}_m$ 表示机械臂关节速度, 其值将在后文给出。

2.3.2 避机械臂关节极限

定义机械臂关节极限优化函数为:

$$\begin{aligned} H_l(\boldsymbol{\theta}_m) = & \sum_{i=1}^n H_{l,i}(\theta_i) = \\ & \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma} \frac{(\theta_{\max,i} - \theta_{\min,i})^2}{(\theta_{\max,i} - \theta_i)(\theta_i - \theta_{\min,i})} \end{aligned} \quad (27)$$

式中: θ_i 为机械臂的第 i 个关节角; $\theta_{\max,i}$ 为机械臂第 i 个关节角运动范围的上限; $\theta_{\min,i}$ 为机械臂第 i 个关节角运动范围的下限; γ 为正标量增益。

$H_l(\boldsymbol{\theta}_m)$ 对第 i 个关节角 θ_i 的偏导数为:

$$\nabla_{\theta_i} H_l = \frac{1}{\gamma} \frac{(\theta_{\max,i} - \theta_{\min,i})^2 (2\theta_i - \theta_{\max,i} - \theta_{\min,i})}{(\theta_{\max,i} - \theta_i)^2 (\theta_i - \theta_{\min,i})^2} \quad (28)$$

为使机械臂各关节尽可能靠近其运动范围的中间值, 即需使 $H_l(\boldsymbol{\theta}_m)$ 的函数值尽可能减小, 因此, 令 $\boldsymbol{v}_m$ 指向 $H_l(\boldsymbol{\theta}_m)$ 的负梯度方向, 即:

$$\boldsymbol{v}_m = -\alpha \nabla_{\theta_m} H_l \quad (29)$$

式中: α 为正标量增益。

将式(29)代入式(25)便可实现在第三级子任务中对机械臂关节角的优化, 使机械臂各关节尽可能避免运动到关节范围的极限位置。

2.3.3 避机械臂奇异位形

定义机械臂位形优化函数:

$$H_s(\boldsymbol{\theta}_m) = \det(\boldsymbol{J}_m \boldsymbol{J}_m^\top) \quad (30)$$

$H_s(\boldsymbol{\theta}_m)$ 对第 i 个关节角 θ_i 的偏导数为:

$$\nabla_{\theta_i} H_s = 2 \det(\boldsymbol{J}_m \boldsymbol{J}_m^\top) \text{tr} \left[\frac{\partial \boldsymbol{J}_m}{\partial \theta_i} \boldsymbol{J}_m^\top \right] \quad (31)$$

为使机械臂系统整机尽可能远离奇异位形, 需使 $H_s(\boldsymbol{\theta}_m)$ 的函数值尽可能增大, 因此, 可令 $\boldsymbol{v}_m$ 指向 $H_s(\boldsymbol{\theta}_m)$ 的正梯度方向, 即:

$$\boldsymbol{v}_m = +\beta \nabla_{\theta_m} H_s \quad (32)$$

式中: β 为正标量增益。

将式(32)代入式(25)即可通过第三级子任务优化机械臂位形, 以使其尽可能远离系统奇异点。

3 仿真实验

3.1 数值仿真实验

为验证所论述方法在执行考虑任务优先级的 WMM 轨迹跟踪任务时的有效性, 本节针对各级子任务分别进行了数值仿真实验。

针对主任务(WMM 末端轨迹跟踪), 将规划的 WMM 末端轨迹 $\boldsymbol{x}_{EE}$ 对时间 t 的导数 $\dot{\boldsymbol{x}}_{EE}$ 通过式(15)映射为 WMM 系统的关节速度 $\boldsymbol{v}_1$, 然后将该关节速度 $\boldsymbol{v}_1$ 对时间 t 积分, 得到 WMM 的实时关节位置, 并以该关节位置实时更新 WMM 的物理模型, 以实现 WMM 的运动仿真。

在仿真中设定式(16)中的加权矩阵 $\boldsymbol{W}$ 为单位阵, 为充分验证本文方法的普适性, 定义两种末端规划轨迹, 一种为圆轨迹: $\boldsymbol{x}_{EE}^d = \boldsymbol{x}_{EE0} + [R_{EE} \sin(\pi/50t), R_{EE}(1 - \cos(\pi/50t)), 0]^\top$, 另一种为“8”字形轨迹: $\boldsymbol{x}_{EE}^d = \boldsymbol{x}_{EE0} + [R_{EE} \sin(\pi/50t), -R_{EE}/2 \sin(\pi/25t), 0]^\top$, 其中, $\boldsymbol{x}_{EE0}$ 为 WMM 末端初始位置矢量, $R_{EE} = 1.5 \text{ m}$ 。为确保 WMM 末端轨迹跟踪误差可收敛至零, 下发的 WMM 末端速度指令设计为 $\dot{\boldsymbol{x}}_{EE}^r = \dot{\boldsymbol{x}}_{EE}^d + \Gamma_e [\boldsymbol{x}_{EE}^d - \boldsymbol{x}_{EE}]$, 其中, $\Gamma_e = 20 \boldsymbol{I}_{3 \times 3}$ 。需要指出的是, WMM 末端轨迹跟踪中的 z 向轨迹和移动平台轨迹跟踪中的转向角度的指定输入均为零, 且跟踪精度远高于其余各向轨迹, 因此, 在仿真结果中未做展示。仿真结果如图 5~图 7 所示。

由仿真结果可知, 本文方法可实现对多种末端轨迹的各向跟踪, 最大跟踪误差出现在跟踪“8”字形轨迹时的 48.34 s, 此时 x 向轨迹跟踪误差约为 $6.44 \times 10^{-3} \text{ m}$; 同时, 在各种末端轨迹跟踪仿真

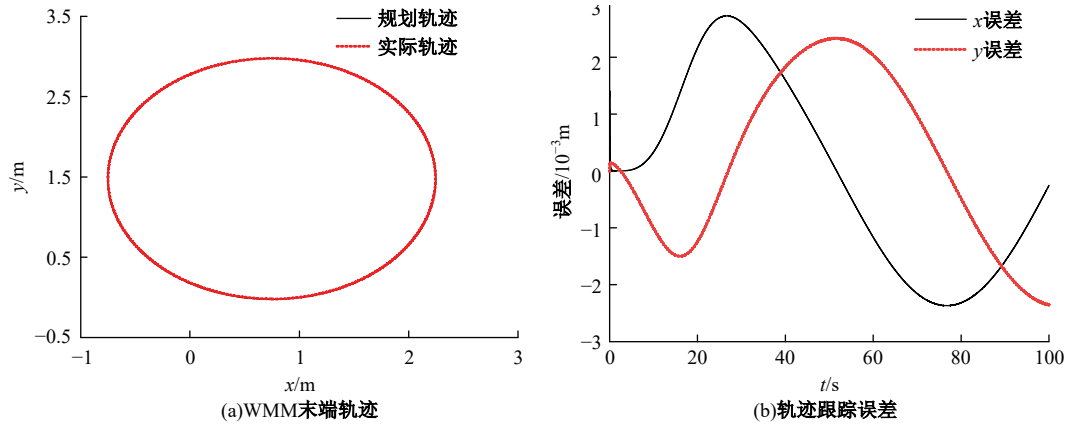


图 5 面向圆形轨迹跟踪主任务仿真结果

Fig. 5 Circular trajectory tracking for the main task

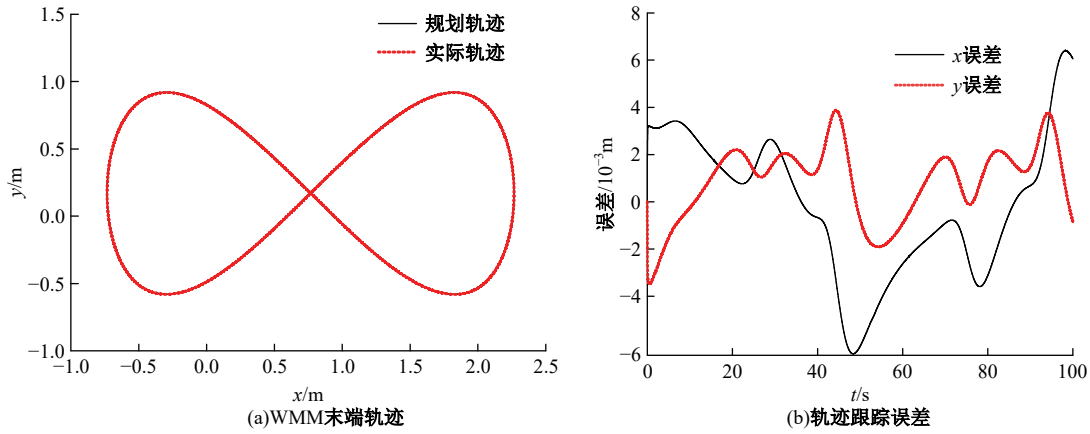


图 6 面向“8”字形轨迹跟踪主任务仿真结果

Fig. 6 "8" trajectory tracking for the main task

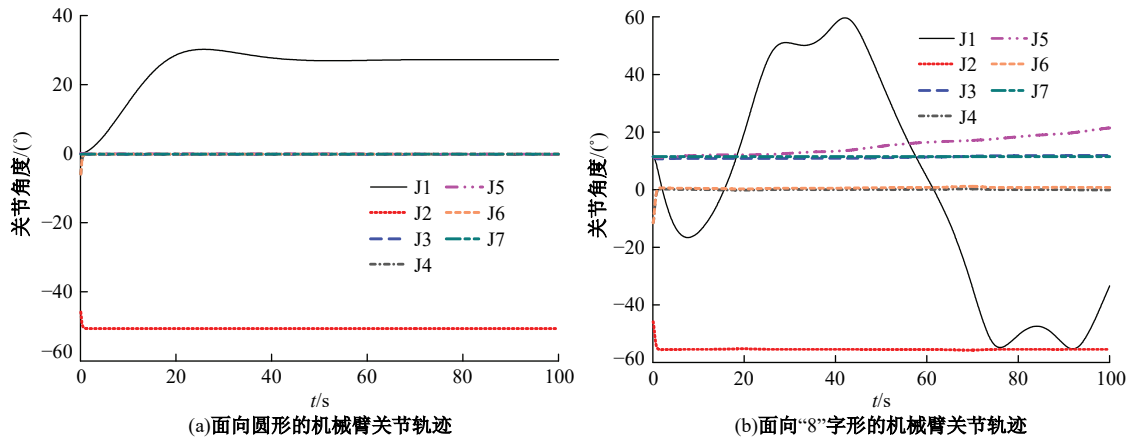


图 7 WMM 末端轨迹跟踪中的机械臂关节运动

Fig. 7 Manipulator joint motion in WMM end-effector's trajectory tracking

中,机械臂关节运动平滑,系统未出现运动突变情形。

针对次级任务为移动平台轨迹跟踪的主从复合任务,分别验证 2.2 节中的两种场景,一种为“双轨迹跟踪”,一种为“仅末端跟踪”。

在“双轨迹跟踪”场景中,分别设计 WMM 末

端和移动平台的规划轨迹为 $x_{EE}^d = x_{EE0} + [R_{EE} \sin(\pi/50t), R_{EE}(1 - \cos(\pi/50t)), 0]^T$ 和 $x_{mb}^d = x_{mb0} + [R_{mb} \sin(\pi/50t), R_{mb}(1 - \cos(\pi/50t)), 0]^T$, 其中, $R_{EE} = 1.5 \text{ m}$, $R_{mb} = 1.5 \text{ m}$ 。为确保 WMM 末端和移动平台的轨迹跟踪误差可收敛至零,下发的 WMM 末端和移动平台的速度指令分别设计

为 $\dot{x}_{EE}^r = \dot{x}_{EE}^d + \Gamma_e[x_{EE}^d - x_{EE}]$ 和 $\dot{x}_{mb}^r = \dot{x}_{mb}^d + \Gamma_b[x_{mb}^d - x_{mb}]$, 其中, $\Gamma_e = 20I_{3 \times 3}$, $\Gamma_b = 10I_{3 \times 3}$ 。图 8 为对应的轨迹跟踪仿真结果。由图 8 可知, WMM 末端和移动平台轨迹的最大跟踪误差均小于 3×10^{-3} m, 各向跟踪误差的最大均方根值为 1.83×10^{-3} m, 出现在 x 向末端轨迹跟踪中。在“仅末端跟踪”场景中, WMM 末端和移动平台的规划轨迹与“双轨迹跟踪”场景类似, 仅将轨迹半

径分别设置为 $R_{EE}=1.5$ m, $R_{mb}=1$ m。图 9 为 WMM 在无法兼顾双轨迹跟踪时的运动情况。此时, WMM 末端的最大轨迹跟踪误差小于 3×10^{-3} m, 但移动平台规划轨迹和实际轨迹间存在较大误差已无法实现对移动平台轨迹的跟踪, 如图 9(d) 所示, 最大跟踪误差出现在 48.21 s 时的 x 向, 值为 1.61 m, 各向跟踪误差的均方根值分别为 0.967 m(x 向)和 0.913 m(y 向)。

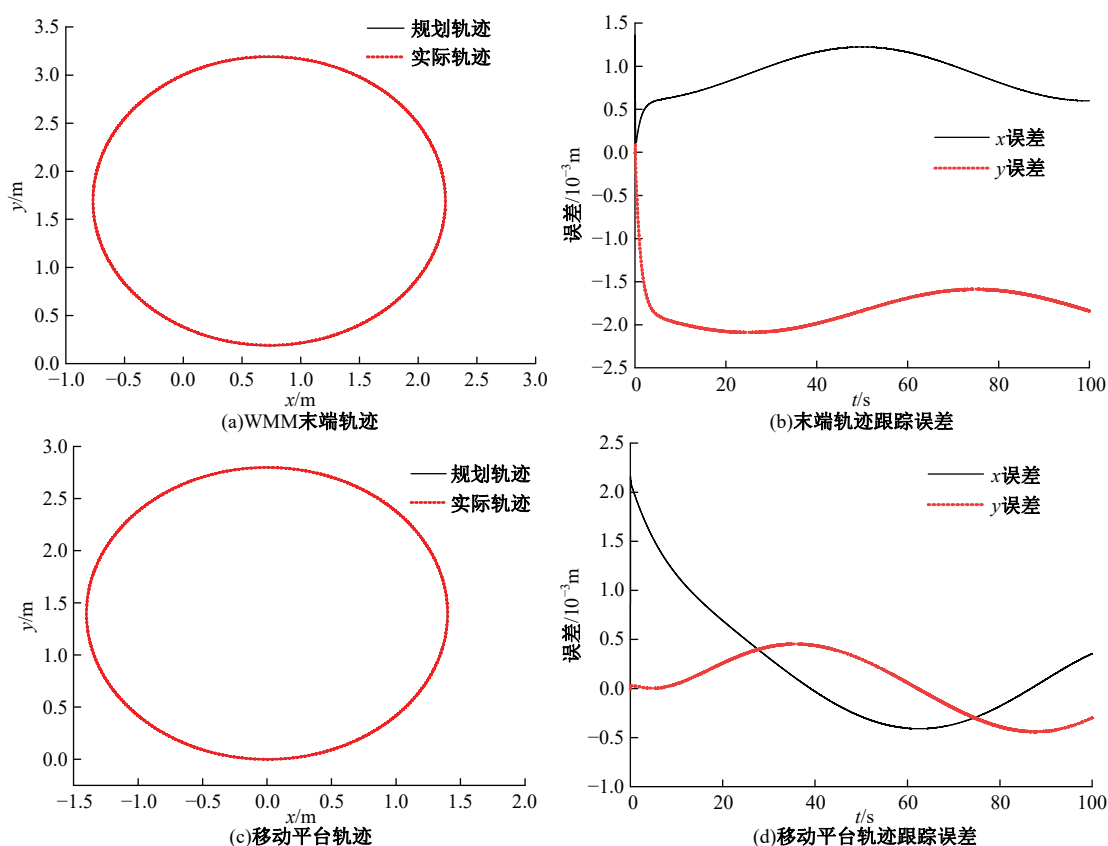


图 8 “双轨迹跟踪”仿真结果

Fig. 8 Simulation results of "dual trajectory tracking"

两种场景下的主从复合任务仿真中, 机械臂关节运动如图 10 所示。由图 10 可知, 在“双轨迹跟踪”和“仅末端跟踪”时, 机械臂关节运动都较为平滑, 可以顺利实现本文算法设定的任务。

针对考虑系统性能指标的主-次-第三级耦合任务, 设定主次任务的规划轨迹与“双轨迹跟踪”场景一致。首先, 验证 2.3.2 节中的避机械臂关节极限效果。设定式(27)和式(29)中的增益参数 $\alpha=1$, $\gamma=1$, 仿真结果如图 11 所示。

由图 11 可知, 在未进行避关节极限优化时, $H_1(\theta_m)$ 的函数值相较于初始时刻上升了约 1.2; 而经过优化后, 终止时刻 $H_1(\theta_m)$ 的函数值比初始时刻下降了约 1.3, 充分证实了本文避关节极限

优化方法的有效性。

其次验证 2.3.3 节中的避机械臂奇异位形效果。设定式(32)中的增益参数 $\beta=1$, 仿真结果如图 12 所示。

由图 12 可知, 在未进行优化时, 避奇异位形优化函数 $H_s(\theta_m)$ 的值整体呈下降趋势, 表明机械臂逐渐靠近奇异位形; 而经过优化后, $H_s(\theta_m)$ 的值得到了大幅度提高, 并最终稳定在区间 $[0.012, 0.013]$ 内, 充分证实了本文避奇异位形优化方法的有效性。

3.2 可视化仿真模型搭建

为充分验证上述考虑任务优先级的冗余移动机械臂位形优化方法在复杂场景下的作业性能,

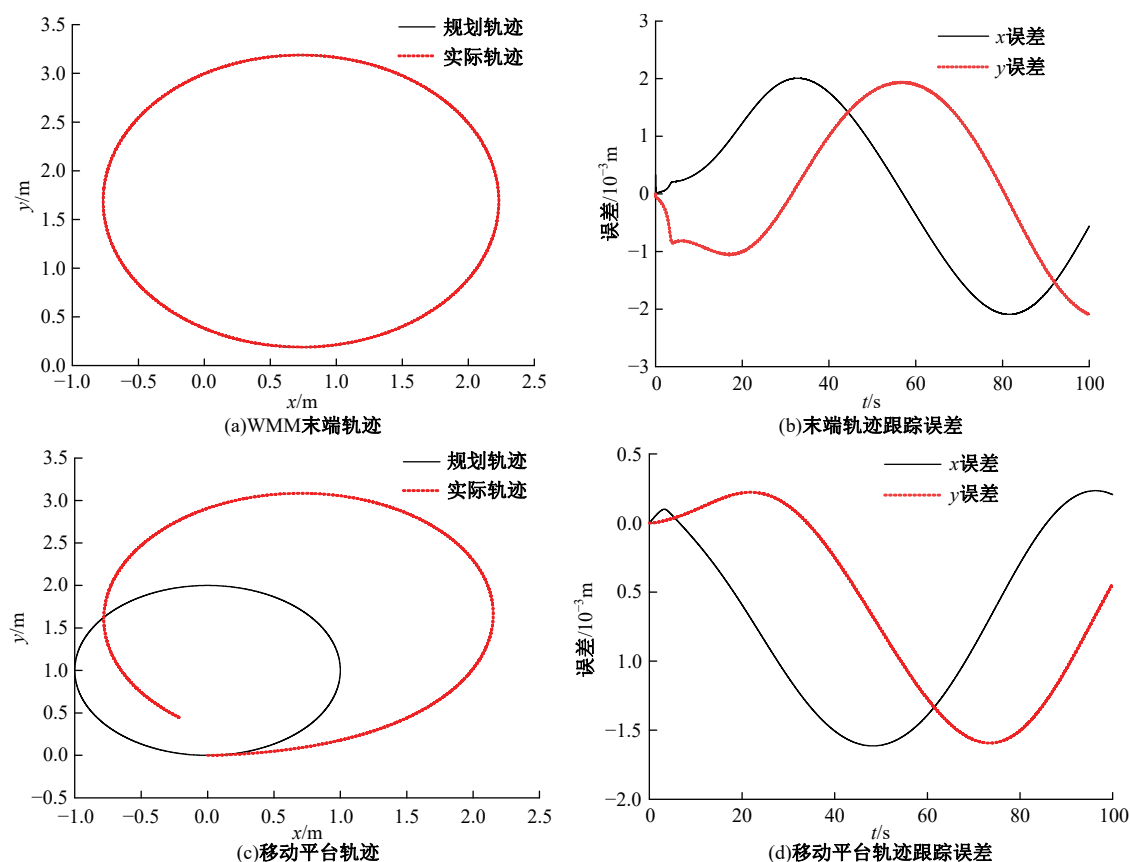


图 9 “仅末端跟踪”仿真结果

Fig. 9 Simulation results of "EE trajectory tracking only"

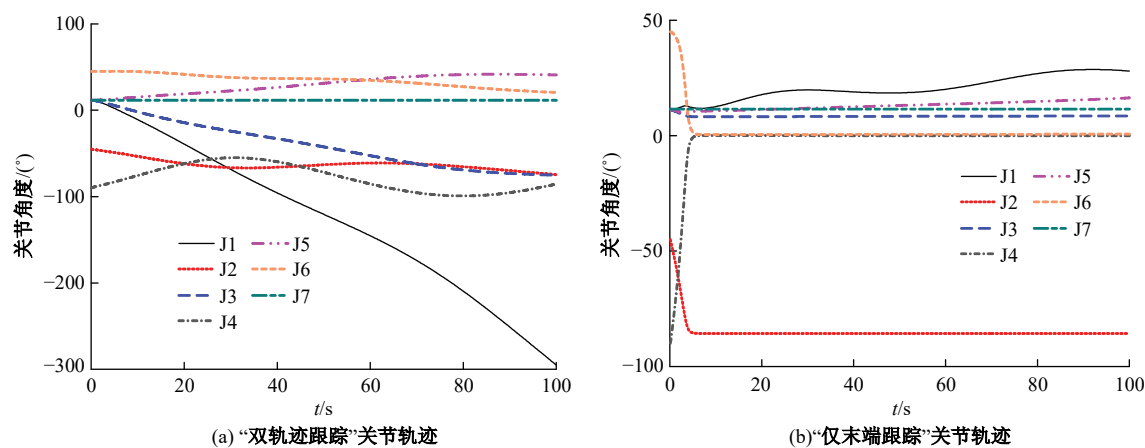


图 10 主从复合轨迹跟踪中的机械臂关节运动

Fig. 10 Manipulator joint motion in main-secondary coupled trajectory tracking

本文搭建了基于 SolidWorks 和 Matlab/Simulink 的移动机械臂仿真平台。平台搭建过程主要分为 3 步:首先在 SolidWorks 中对 WMM 进行三维建模并将该模型导出为 URDF (Unified robot description format) 文件,然后将 URDF 文件通过 Simscape 导入 Matlab/Simulink;最后在 Matlab/Simulink 中对模型需要的关节运动进行设置,使其能在关节控制指令下进行可视化运动。

WMM 可视化仿真平台如图 13 所示。该仿真平台主要包括 4 个子模块:轨迹规划模块、控制器模块、WMM 物理模块和运动状态监测模块。

本次可视化仿真中,WMM 执行的作业任务及其场景如图 14 所示。WMM 在该任务中需依次完成以下任务:首先,从起点位置 1 运动到位置 2 将物体抓起;其次,从位置 2 成功通过位置 3 的门进入小房间内;再次,躲避位置 4 处的障碍墙并

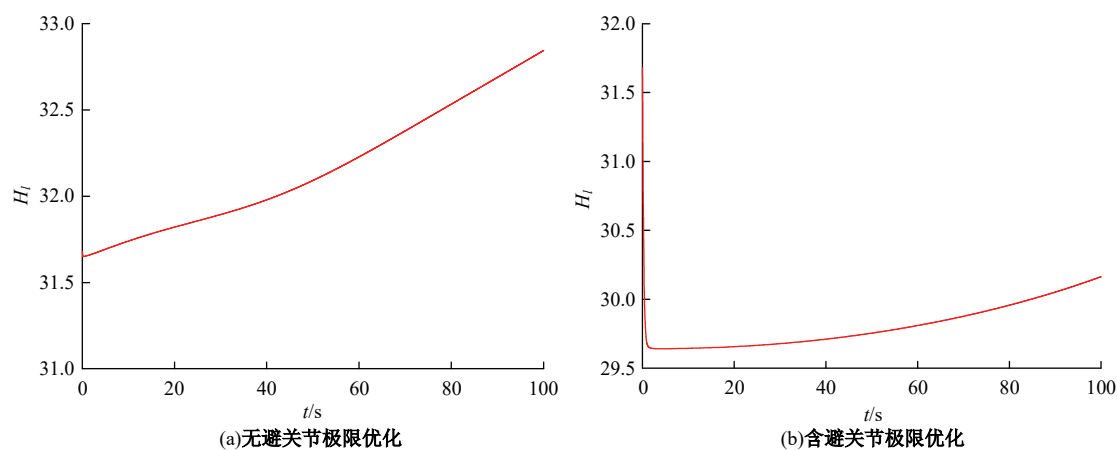


图 11 避机械臂关节极限仿真结果

Fig. 11 Simulation results of joint limit avoidance

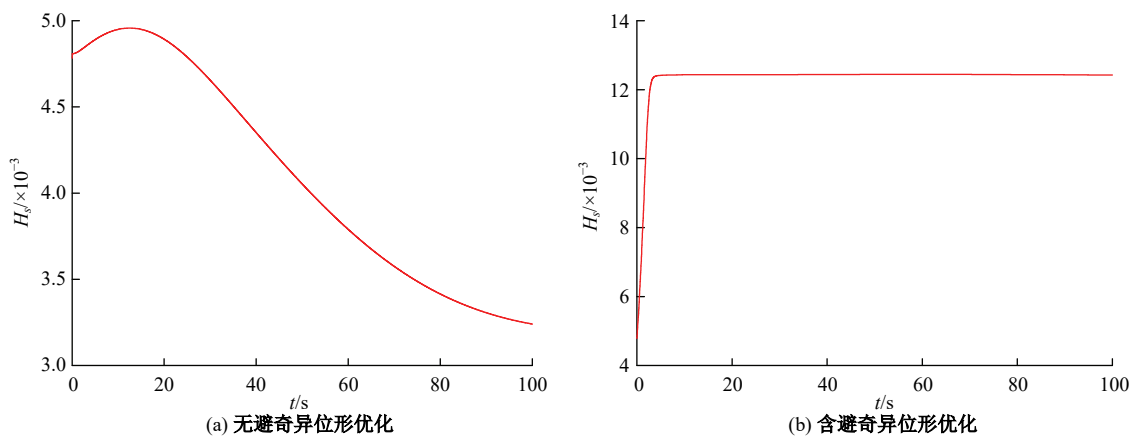


图 12 避机械臂奇异位形优化结果

Fig. 12 Simulation results of singularity avoidance

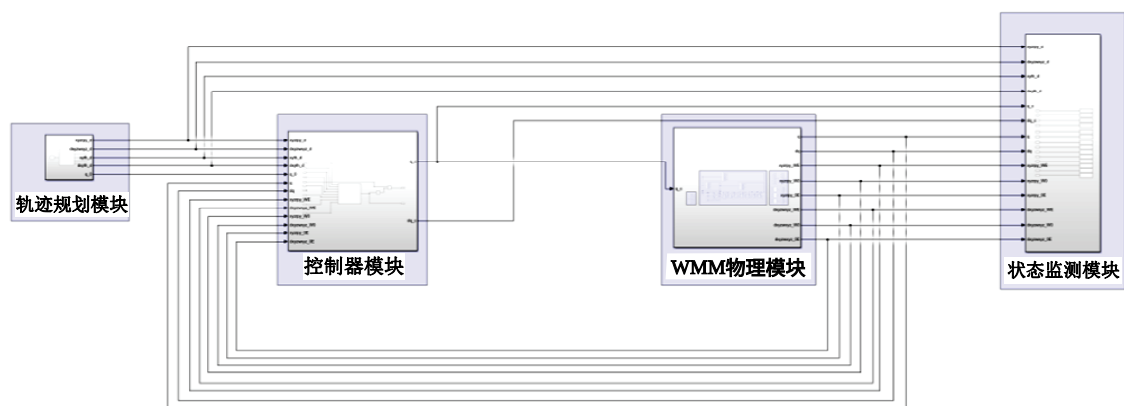


图 13 WMM 可视化仿真平台

Fig. 13 Visual simulation platform of the WMM

将物体放置在位置 4;最后,通过位置 5 处的侧门并最终运动到位置 6 停止。

本文采用三次样条插值方法^[23]规划图 14 中的任务路径,设定的 WMM 末端轨迹和移动平台轨迹以及 WMM 末端距移动平台(图 2 中的 P_b)的距离如图 15 所示。

3.3 可视化仿真结果及分析

运行图 13 中的仿真模型,WMM 系统的规划轨迹如图 15 所示,仿真过程中 WMM 可视化运动时序叠加图如图 16 所示(总运动时长为 350 s)。

图 14 中的设定任务与图 16 中仿真结果的对时序对应表如表 3 所示。WMM 末端和移动平台的运动轨迹及轨迹跟踪误差分别如图 17 和图 18 所

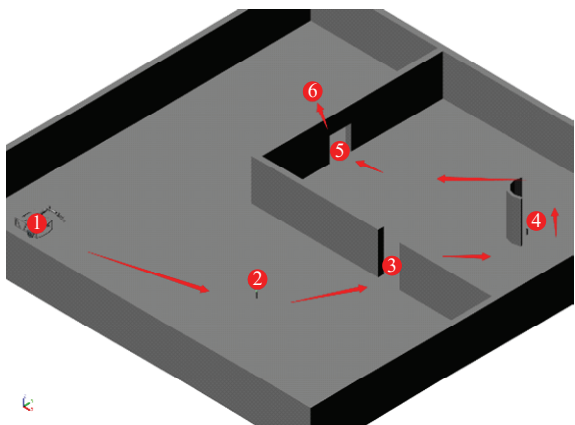


图 14 WMM 任务场景设置

Fig. 14 Task scenario setting of the WMM

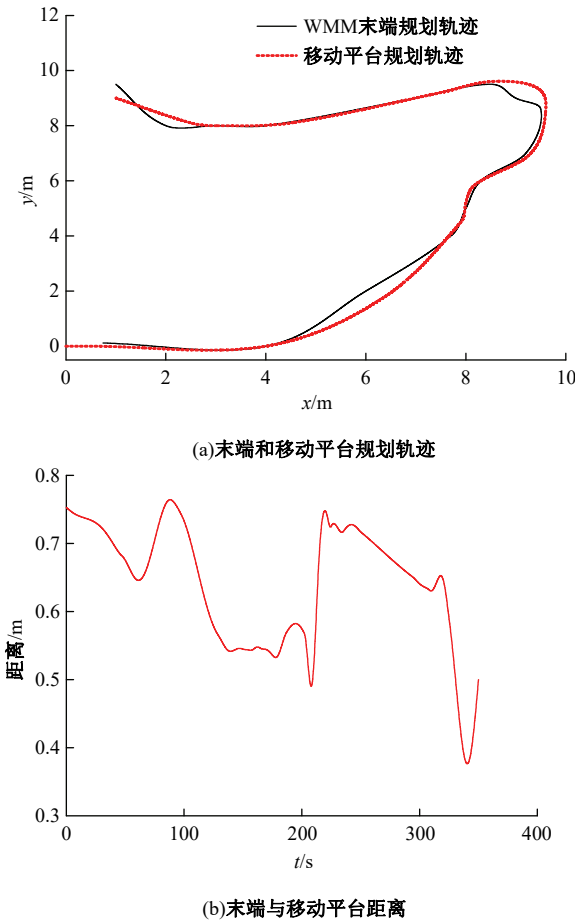


图 15 可视化仿真中的轨迹设定

Fig. 15 Trajectory setting in the visual simulation

示。仿真过程中,机械臂关节和移动平台车轮的运动轨迹如图 19 所示。

由图 18 可知,WMM 末端轨迹跟踪误差均方根值分别为 3.4×10^{-4} m(x 向)、 5.8×10^{-4} m(y 向)和 3×10^{-6} m(z 向),最大跟踪误差出现在约 222 s 时的 y 向,其值为 3.29×10^{-3} m;移动平台轨迹跟踪误差均方根值分别为 4.7×10^{-4} m(x 向)

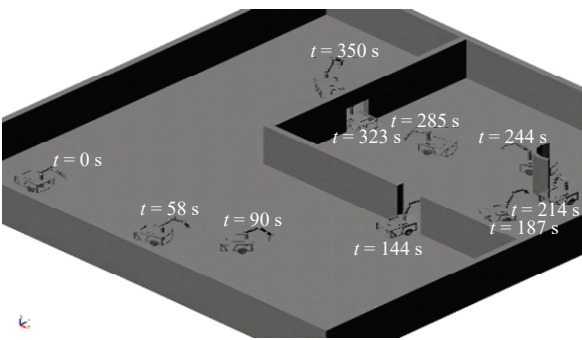


图 16 WMM 可视化运动时序叠加图

Fig. 16 Visual motion timing overlay diagram of the WMM

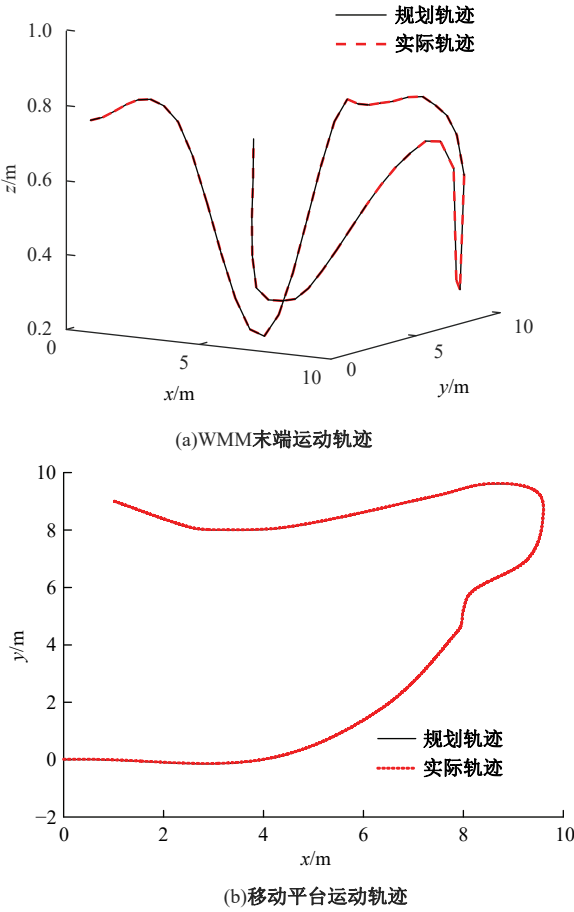


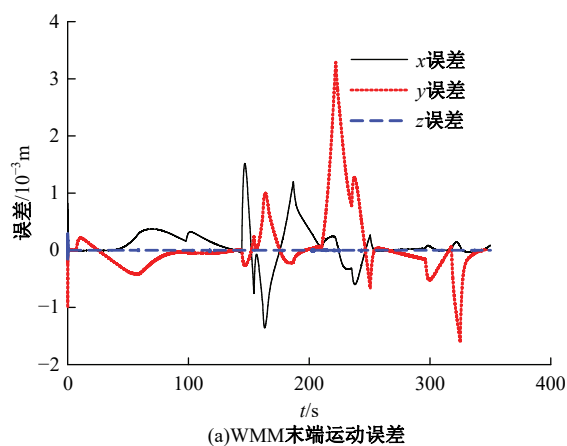
图 17 WMM 运动轨迹

Fig. 17 Motion trajectory of the WMM

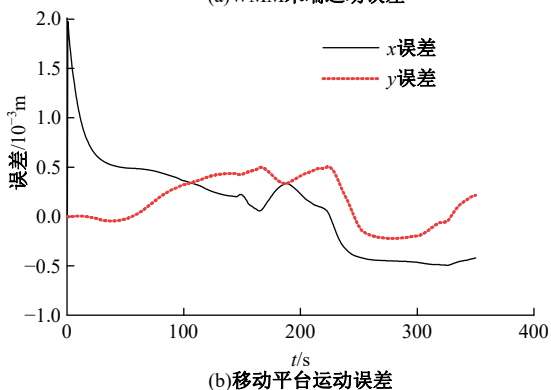
表 3 可视化仿真任务时序表

Table 3 Task timing table of the visual simulation

任务序号	时刻 t/s	WMM 的状态
1	0	WMM 以初始姿态位于起点处
2	89.8	WMM 完成目标物体的抓取
3	153.1	WMM 通过房门:前轮轴线与墙中性面重合
4	213.8	WMM 完成目标物体的放置
5	319.0	WMM 通过侧门:前轮轴线与墙中性面重合
6	350.0	WMM 运动至任务终点处



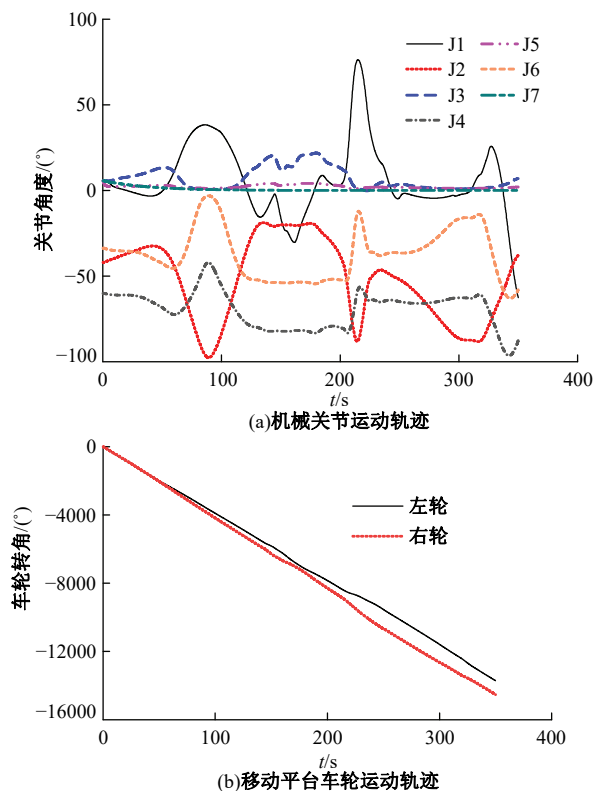
(a)WMM末端运动误差



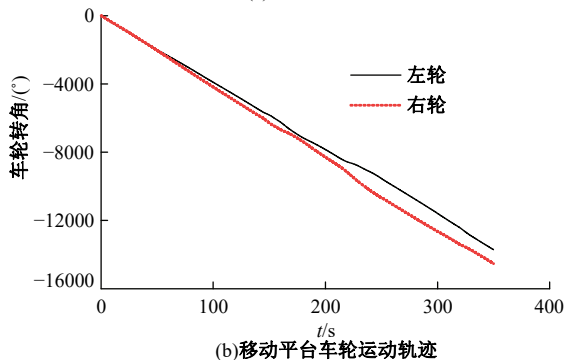
(b)移动平台运动误差

图18 WMM运动误差

Fig. 18 Motion error of the WMM



(a)机械关节运动轨迹



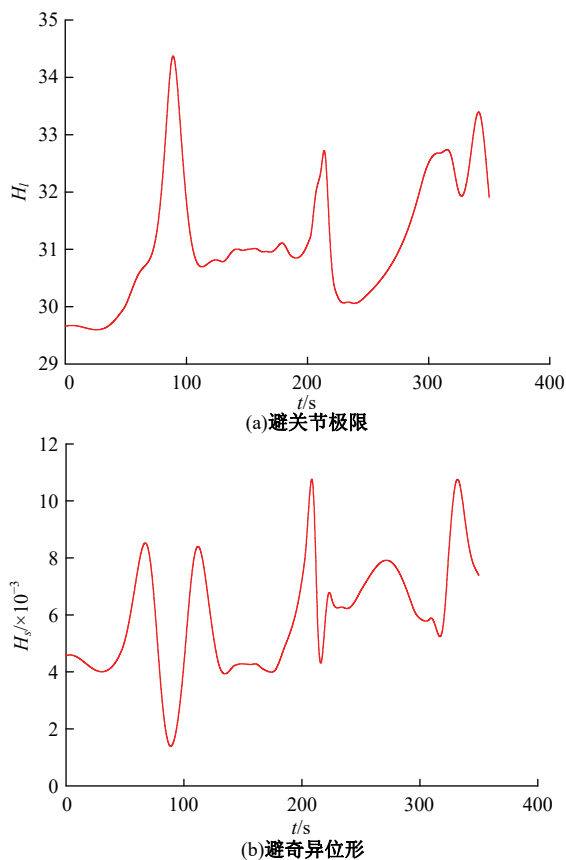
(b)移动平台车轮运动轨迹

图19 机械臂关节和移动平台车轮运动轨迹

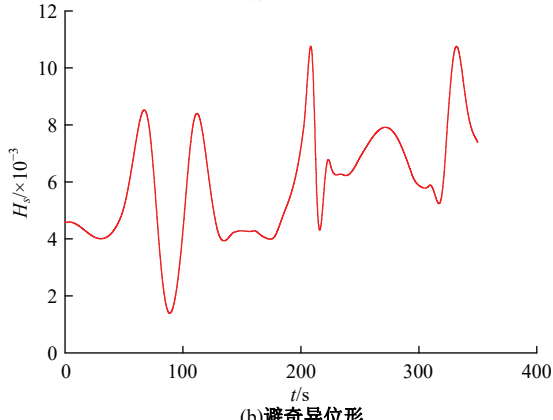
Fig. 19 Motion trajectories of the manipulator's joints and mobile platform's wheels

和 2.9×10^{-4} m(y向), 最大跟踪误差出现在约 0.12 s 时的 x 向, 其值为 2.19×10^{-3} m。由图 19 可知, 仿真过程中, 机械臂关节和移动平台车轮运动轨迹平顺, 几乎没有抖动。上述仿真结果充分证明了本文方法对 WMM 系统具有良好的双轨迹跟踪性能, 可为复杂任务的执行提供有力保障。

在该可视化仿真中, 第三级优化指标分别设置为避免机械臂关节极限和避免机械臂奇异位形, 相关增益参数设置与 3.1 节相同, 优化指标 H_1 和 H_s 的值如图 20 所示。由式 (27) 可知, $H_1(\theta_m)$ ($\gamma=1$) 的最小值为 28, 且该值越小, 表明机械臂关节越靠近其中间位置, 故图 20(a) 中的结果 (H_1 最大值约为 34.37) 证实了避关节极限的位形优化取得了预期效果。由式 (30) 的定义可知, $H_s(\theta_m)$ 的值越大, 则避机械臂奇异位形的效果越好, 故图 20(b) 中的结果 (H_s 最小值约为 1.39×10^{-3}) 表明避机械臂奇异位形的位形优化也可实现预期目标。



(a)避关节极限



(b)避奇异位形

图20 WMM系统性能优化仿真结果

Fig. 20 Simulation results of the WMM's performance optimization

4 结束语

针对大尺度场景下的灵巧作业问题,本文提出了一种考虑任务优先级的冗余移动机械臂位形优化方法,可实现对多任务目标的分级并行处理,以 10 自由度轮式移动机械臂(3 自由度移动平台+7 自由度机械臂)为研究对象进行了分析和验证。

本文分别建立了双轮非完整约束移动平台和机械臂的运动学模型,并在此基础上搭建了 WMM 整机运动学模型,求得了整机系统雅克比矩阵。设计了基于任务优先级的 WMM 位形优化策略,并分别以 WMM 末端轨迹跟踪、移动平台轨迹跟踪和系统性能指标提升为优先级逐级递减的目标进行了位形优化设计。

基于 SolidWorks 和 Matlab/Simulink 软件搭建了 WMM 可视化仿真平台,并进行了仿真验证。试验结果表明:本文提出的 WMM 位形优化方法可做到对多作业目标的并行实现,且各优先级任务间无相互干扰;在适宜参数下,WMM 末端最大轨迹跟踪误差不超过 4×10^{-3} m,移动平台最大轨迹跟踪误差不超过 2×10^{-3} m,且第三级性能优化指标(避机械臂关节极限和避机械臂奇异位形)也能取得预期效果。本文提出的位形优化方法具有较好的扩展性,通过对冗余机器人运动学模型和目标函数的修改,可进一步实现其他构型机器人的多种附加任务。

参考文献:

- [1] Xing H, Torabi A, Ding L, et al. An admittance-controlled wheeled mobile manipulator for mobility assistance: human - robot interaction estimation and redundancy resolution for enhanced force exertion ability[J]. *Mechatronics*, 2021, 74: No. 102497.
- [2] 罗欣,丁晓军. 地面移动作业机器人运动规划与控制研究综述[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2021, 53(1): 1-15.
Luo Xin, Ding Xiao-jun. Research and prospective on motion planning and control of ground mobile manipulators[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2021, 53(1): 1-15.
- [3] 邢宏军. 面向救灾任务的轮式移动作业机器人柔顺控制及遥操作[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学机电工程学院, 2022.
Xing Hong-jun. Compliance control and teleoperation of wheeled mobile manipulators for disaster rescue tasks[D]. Harbin: School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, 2022.
- [4] Picard G, Lenain R, Mezouar Y, et al. Multi-trajectory approach for a generic coordination paradigm of wheeled mobile manipulators[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2022, 7(2): 2329-2336.
- [5] Teka B, Dutta A. Modeling and simulation of cooperative transport of an object by two mobile manipulators on an uneven terrain using KSOM network[J]. *International Journal of Modelling and Simulation*, 2021, 41(1): 39-51.
- [6] Chung G B, Yi B, Lim D J, et al. An efficient dynamic modeling methodology for general type of hybrid robotic systems[C]//*IEEE International Conference on Robotics and Automation*, New Orleans, USA, 2004: 1795-1802.
- [7] 陈杰,莫玮. 履带式移动机械臂的自适应模糊滑模控制[J]. *吉林大学学报:工学版*, 2015, 45(3): 892-898.
Chen Jie, Mo Wei. Adaptive fuzzy sliding mode control for crawler-type mobile manipulators[J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2015, 45(3): 892-898.
- [8] Seraji H. A unified approach to motion control of mobile manipulators[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1998, 17(2): 107-118.
- [9] 陈良港,张方,张建光,等. 移动机械臂运动学建模与控制[J]. *国外电子测量技术*, 2022, 41(1): 35-40.
Chen Liang-gang, Zhang Fang, Zhang Jian-guang, et al. Kinematic modeling and control for mobile manipulator[J]. *Foreign Electronic Measurement Technology*, 2022, 41(1): 35-40.
- [10] De Luca A, Oriolo G, Giordano P R. Kinematic modeling and redundancy resolution for nonholonomic mobile manipulators[C]//*IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Orlando, USA, 2006: 1867-1873.
- [11] De Luca A, Oriolo G, Giordano P R. Kinematic control of nonholonomic mobile manipulators in the presence of steering wheels[C]//*IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Anchorage, USA, 2010: 1792-1798.
- [12] Chen F, Selvaggio M, Caldwell D G. Dexterous grasping by manipulability selection for mobile manipulator with visual guidance[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, 15(2): 1202-1210.
- [13] Li M, Yang Z, Zha F, et al. Design and analysis of a

- whole-body controller for a velocity controlled robot mobile manipulator[J]. *Science China Information Sciences*, 2020, 63(7): 1-15.
- [14] Xing H, Ding L, Gao H, et al. Dual-user haptic teleoperation of complementary motions of a redundant wheeled mobile manipulator considering task priority[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(10): 6283-6295.
- [15] Jia Y, Xi N, Cheng Y, et al. Coordinated motion control of a nonholonomic mobile manipulator for accurate motion tracking[C]//*IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Chicago, USA, 2014: 1635-1640.
- [16] Xing H, Torabi A, Ding L, et al. Enhancement of force exertion capability of a mobile manipulator by kinematic reconfiguration[J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2020, 5(4): 5842-5849.
- [17] 张铮, 朱齐丹, 吕晓龙, 等. 冗余机械臂运动学逆解的求解优化方法[J]. *吉林大学学报: 工学版*, 2023, 53(12): 3379-3387.
- Zhang Zheng, Zhu Qi-dan, Lyu Xiao-long, et al. Optimized method for solving inverse kinematics of redundant manipulator[J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2023, 53(12): 3379-3387.
- [18] 武毅, 胥超, 刘力源, 等. 基于多任务转换的冗余度机器人控制算法[J]. *机械工程学报*, 2023, 59(15): 83-93.
- Wu Yi, Xu Chao, Liu Li-yuan, et al. Redundant robot control algorithm based on multi-task transformation[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2023, 59(15): 83-93.
- [19] Farelo F, Alqasemi R, Dubey R. Optimized dual-trajectory tracking control of a 9-DoF WMRA system for ADL tasks[C]//*IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Anchorage, USA, 2010: 1786-1791.
- [20] Mashali M, Alqasemi R, Dubey R. Task priority based dual-trajectory control for redundant mobile manipulators[C]//*IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, Bali, Indonesia, 2014: 1457-1462.
- [21] 齐志刚, 黄攀峰, 刘正雄, 等. 空间冗余机械臂路径规划方法研究[J]. *自动化学报*, 2019, 45(6): 1103-1110.
- Qi Zhi-gang, Huang Pan-feng, Liu Zheng-xiong, et al. Research on path planning method of spatial redundant manipulator[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(6): 1103-1110.
- [22] 李洋, 冯适意, 朱德良, 等. 面向移乘护理的冗余双臂机器人行为安全控制[J]. *机械工程学报*, 2023, 59(9): 76-89.
- Li Yang, Feng Shi-yi, Zhu De-liang, et al. Safety control of a redundant dual-arm robot for transfer-care task[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2023, 59(9): 76-89.
- [23] Lian J, Yu W, Xiao K, et al. Cubic spline interpolation-based robot path planning using a chaotic adaptive particle swarm optimization algorithm[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, 2: 1-20.