doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023345

量子 Loop 代数 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 的单权模

吴青云，谭易兰，夏利猛
（江苏大学 数学科学学院，江苏 镇江 212013）

摘要： 用构造的方法解决量子 Loop 代数 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 具有一个一维权空间的单权模的结构问题，得到了任意一个具有一维权空间的单权模必同构于 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 的四类单权模之一. 此外，还构造了一类权空间维数为 2 的既非最高权也非最低权的量子 Loop 代数 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 的单权模.

关键词： 量子 Loop 代数；权模；单模；Dense 模
中图分类号： O152.5 **文献标志码：** A **文章编号：** 1671-5489(2024)02-0256-07

Simple Weight Modules of Quantum Loop Algebra $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$

WU Qingyun, TAN Yilan, XIA Limeng
(*School of Mathematical Sciences, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013, *Jiangsu Province, China*)

Abstract: The structural problem of simple weight modules with a one-dimensional weight space in the quantum Loop algebra $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ was solved by using a construction method, and it was obtained that any simple weight module with a one-dimensional weight space must be isomorphic to one of the four classes of simple weight modules of $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$. In addition, a class of simple weight modules of the quantum Loop algebra $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ with weight space dimension of 2, which was neither the highest weight nor the lowest weight, was constructed.

Keywords: quantum Loop algebra; weight module; simple module; Dense module

1 引言与主要结果

设 $\mathfrak{g}$ 是复数域上的有限维单李代数，Yangian 代数 $Y(\mathfrak{g})$ 和量子仿射代数 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 组成了两族重要的仿射型量子群. $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 是由一族生成元和一系列生成关系构成的具有单位元的结合代数，$U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ 商去由中心元 C 生成的双边理想后得到的商代数记为 $U_q(L(\mathfrak{g}))$. 其代数结构和表示理论在数学和物理中都有重要的理论意义和应用价值. 例如，$U_q(L(\mathfrak{g}))$ 模可用于构造量子 Yang-Baxter 方程的三角解[1].

关于 $U_q(L(\mathfrak{g}))$ 模的研究是量子群表示理论的重要问题之一[2-3]. 目前，$U_q(L(\mathfrak{g}))$ 模的研究主要集中在最高权模，包括有限维不可约模、局部 Weyl 模、KR(Kirillow-Reshetikhin)模和素表示(Prime representations)[4-8]. 而 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 的表示理论在 $U_q(L(\mathfrak{g}))$ 的研究中具有重要作用.

本文目标是分类 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 的一类单权模. 从 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的 Dense 模出发[9]，构造一类既不是最高权也不是最低权的无限维 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 单权模，然后分类具有一个一维权空间的 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 单权模. 本文主要结果如下：

收稿日期： 2023-08-20.

第一作者简介： 吴青云(1999—)，女，汉族，硕士研究生，从事李理论的研究，E-mail：2212102047@stmail.ujs.edu.cn. **通信作者简介：** 谭易兰(1981—)，男，汉族，博士，副教授，从事李理论的研究，E-mail：tanyanlan@ujs.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金(批准号：12171155).

定理 1　设 V 是 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$存在一个一维权空间的单权模，则 V 必与下列模中的某个模同构：

1）有限维单模；

2）无限维最高权单模；

3）无限维最低权单模；

4）Dense 模 $V(\mu,\tau,b_\mu)$.

此外，本文还通过构造一个权空间均为二维的 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$模，给出该模不可约的充分条件，以说明本文主要结果中一维权空间的限定条件必不可少.

2　预备知识

首先给出量子 Loop 代数 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的定义.

定义 1[10]　设 q 不是单位根，量子 Loop 代数 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 是一个有单位元 $\mathbf{1}$ 的结合代数，它的生成元为 $x_k^{\pm}(k\in\mathbb{Z})$，$h_k^{\pm}(k\in\mathbb{Z}-\{0\})$和 $K^{\pm1}$，且满足生成关系：

$$KK^{-1}=K^{-1}K=\mathbf{1},\qquad Kh_k=h_kK,$$
$$Kx_k^{\pm}K^{-1}=q^{\pm2}x_k^{\pm},\qquad [h_k,h_l]=\mathbf{0},$$
$$[h_k,x_l^{\pm}]=\pm\frac{1}{k}[2k]_q x_{k+l}^{\pm},\tag{1}$$
$$[x_k^{+},x_l^{-}]=\frac{1}{q-q^{-1}}(\psi_{k+l}-\phi_{k+l}).\tag{2}$$
$$x_{k+1}^{\pm}x_l^{\pm}-q^{\pm2}x_l^{\pm}x_{k+1}^{\pm}=q^{\pm2}x_k^{\pm}x_{l+1}^{\pm}-x_{l+1}^{\pm}x_k^{\pm},\tag{3}$$

这里 $[m]_q=\dfrac{q^m-q^{-m}}{q-q^{-1}}$，且 ψ_{k+l} 和 ϕ_{k+l} 满足 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\psi_k u^k=K\exp\{(q-q^{-1})\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_k u^k\}$，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\phi_{-k}u^{-k}=K^{-1}\exp\{(q-q^{-1})\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_{-k}u^{-k}\}$.

由定义 1 和数学归纳法，易证如下引理.

引理 1　$U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$可由 $K^{\pm1}$,$h_{\pm1}$和 $x_0^{\pm}$ 生成.

命题 1[10]　1）由 K,x_0^{+} 和 x_0^{-} 生成的子代数与 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$同构；

2）映射

$$\rho_N:U_q(L(\mathfrak{sl}_2))\to U_q(\mathfrak{sl}_2),\quad x_k^{+}\mapsto q^{-k}a^kK^ke^{+},\quad x_k^{-}\mapsto q^{-k}a^ke^{-}K^k$$

是一个满同态.

引理 2[10]　$U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$作为 Hopf 代数，满足余乘关系：

$$\Delta(x_0^{+})=x_0^{+}\otimes K+\mathbf{1}\otimes x_0^{+},\qquad \Delta(x_0^{-})=x_0^{-}\otimes\mathbf{1}+K^{-1}\otimes x_0^{-},$$
$$\Delta(x_1^{-})=x_1^{-}\otimes\mathbf{1}+K\otimes x_1^{-},\qquad \Delta(x_{-1}^{\pm})=x_{-1}^{\pm}\otimes K^{-1}+\mathbf{1}\otimes x_{-1}^{\pm},$$
$$\Delta(K)=K\otimes K,\qquad \Delta(h_1)=h_1\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes h_1-(q^2-q^{-2})x_0^{+}\otimes x_1^{-},$$
$$\Delta(K^{-1})=K^{-1}\otimes K^{-1},\qquad \Delta(h_{-1})=h_{-1}\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes h_{-1}-(q^2-q^{-2})x_{-1}^{+}\otimes x_0^{-}.$$

下面介绍 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的表示理论，首先介绍 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的最高权模. 本文记 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的元素 x 在其模 V 上的作用为 $x.v$，这里 $v\in V$.

定义 2[10]　设 V 是 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的一个模. 如果存在非零向量 $w\in V$，使得 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2)).w=V$，且满足：

$$x_k^{+}.w=\mathbf{0},\quad \psi_k.w=d_k^{+}w(k\in\mathbb{N}),\quad \phi_k.w=d_k^{-}w\ (k\in\mathbb{N}_-),\quad d_0^{+}d_0^{-}=\mathbf{1},$$

则称 V 是 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的最高权模，$\underline{d}=\{d_k^{\pm}\mid k\in\mathbb{Z}\}$为 V 的最高权.

最低权模的定义可类似给出，只需将 $x_k^{+}.w=\mathbf{0}$ 改为 $x_k^{-}.w=\mathbf{0}$.

定义 3[10]　定义 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的 Verma 模 $M(\underline{d})$为 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$模商去由 $x_k^{+}(k\in\mathbb{Z})$，$\psi_k-d_k^{+}\cdot\mathbf{1}(k\geqslant0)$，$\phi_k-d_k^{+}\cdot\mathbf{1}(k\leqslant0)$所有系数生成的左理想.

下面给出刻画 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$有限维单模的结构.

命题 2[10] $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的有限维单模是最高权模，$U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的最高单权模是有限维的当且仅当存在常系数非零的多项式 P，且满足：

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k^+ u^k = q^{\deg P}\frac{P(q^{-2}u)}{P(u)}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} d_{-k}^- u^{-k} = q^{\deg P}\frac{P(q^{-2}u)}{P(u)}.$$

定义 4[10] 对任意的 $a\in\mathbb{C}$，$W_1(a)=\mathrm{span}\{\boldsymbol{w}_0,\boldsymbol{w}_1\}$是 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的二维单权模，这里 $\boldsymbol{w}_0$ 是最高权向量. 有限生成元在 $W_1(a)$上的作用下有

$$x_0^+.\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{0},\quad x_{-1}^+.\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{0},\quad x_1^-.\boldsymbol{w}_0=a\boldsymbol{w}_1,\quad x_0^-.\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{w}_1,$$
$$x_0^+.\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{w}_0,\quad x_{-1}^+.\boldsymbol{w}_1=a^{-1}\boldsymbol{w}_0,\quad x_1^-.\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{0},\quad x_0^-.\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{0},$$
$$K.\boldsymbol{w}_0=q\boldsymbol{w}_0,\quad h_1.\boldsymbol{w}_0=q^{-1}a\boldsymbol{w}_0,\quad h_{-1}.\boldsymbol{w}_0=-qa^{-1}\boldsymbol{w}_0,$$
$$K.\boldsymbol{w}_1=q^{-1}\boldsymbol{w}_1,\quad h_1.\boldsymbol{w}_1=-qa\boldsymbol{w}_1,\quad h_{-1}.\boldsymbol{w}_1=q^{-1}a^{-1}\boldsymbol{w}_1.$$

定义 5[11] 设 V 是一个 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$模，若 $V_\mu=\{\boldsymbol{v}\in V\mid K.\boldsymbol{v}=\mu.\boldsymbol{v}\}$，$V=\oplus V_\mu$，其中 $\mu\in\mathbb{C}$，则称 V 是 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的权模.

由 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$生成元间的定义关系，易得如下引理.

引理 3 设 V 是 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的权模，若 $\boldsymbol{v}\in V_\mu$，则由定义关系可得 $h_k.\boldsymbol{v}\in V_\mu$，$x_k^+.\boldsymbol{v}\in V_{\mu+2}$和$x_k^-.\boldsymbol{v}\in V_{\mu-2}$.

由文献[9]中定义 3.1.3 和命题 3.1.7，通过同构易得如下命题.

命题 3 对任意的 $\mu,\tau\in\mathbb{C}$，$n\in\mathbb{N}$，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$在向量空间 $W(\mu,\tau)=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\boldsymbol{v}_{\mu+2k},k\in\mathbb{Z}\}$上的作用

$$K.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}=\mu q^{2k}\boldsymbol{v}_{\mu+2k},\quad x_0^+.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}=a_{\mu+2k}\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2},\quad x_0^-.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}=\boldsymbol{v}_{\mu+2k-2},$$

定义了 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$的 Dense 模结构，其中 $a_{\mu+2k}=\dfrac{1}{(q-q^{-1})^2}(\tau-(\mu q^{2k+1}+\mu^{-1}q^{-2k-1}))$. 当 $\mu\neq q^n$，$n\in\mathbb{N}$时，$W(\mu,\tau)$不可约.

3 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的 Dense 模

由命题 1 可知，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$的 Dense 模 W 是一个 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$模. 由引理 1 可知，$U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$由 $K^{\pm1}$，$h_{\pm1}$和 $x_0^{\pm}$ 生成. 因此只要再确定 $h_{\pm1}$在 $\boldsymbol{v}_{\mu+2k}$上的作用，即可确定 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$-模 W 的结构. 因为 W 权空间均为 1 维，所以不妨设

$$h_1.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}=b_{\mu+2k}\boldsymbol{v}_{\mu+2k},\quad h_{-1}.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}=c_{\mu+2k}\boldsymbol{v}_{\mu+2k}.$$

定理 2 $h_{\pm1}$作用的系数均可由 b_μ 确定.

证明：在式(1)中 k 分别取 1 和-1，并将等式两边分别作用在权向量 $\boldsymbol{v}_{\mu+2k}$上，得

$$[2]_q x_1^+.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}=a_{\mu+2k}(b_{\mu+2k+2}-b_{\mu+2k})\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2},$$
$$[2]_q x_1^-.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}=(b_{\mu+2k}-b_{\mu+2k-2})\boldsymbol{v}_{\mu+2k-2},$$
$$[2]_q x_{-1}^+.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}=a_{\mu+2k}(c_{\mu+2k+2}-c_{\mu+2k})\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2},$$
$$[2]_q x_{-1}^-.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}=(c_{\mu+2k}-c_{\mu+2k-2})\boldsymbol{v}_{\mu+2k-2}.$$

在式(2)中 k,l 分别取-1 和 1，并将等式两边分别作用在权向量 $\boldsymbol{v}_{\mu+2k}$上，比较 $\boldsymbol{v}_{\mu+2k}$的系数，可得

$$(b_{\mu+2k}-b_{\mu+2k-2})(c_{\mu+2k}-c_{\mu+2k-2})=(q+q^{-1})^2. \tag{4}$$

类似地，在式(3)中 k 分别取 0 和-2，l 取 0，可得

$$(b_{\mu+2k+4}-b_{\mu+2k+2})=q^2(b_{\mu+2k+2}-b_{\mu+2k}), \tag{5}$$
$$(c_{\mu+2k+4}-c_{\mu+2k+2})=q^{-2}(c_{\mu+2k+2}-c_{\mu+2k}). \tag{6}$$

在式(2)中 k,l 分别取 0 和 1，再结合式(5)，可得

$$(a_{\mu+2k-2}-q^2a_{\mu+2k})(b_{\mu+2k}-b_{\mu+2k-2})=[2]_q\mu q^{2k}b_{\mu+2k}. \tag{7}$$

在式(2)中 k,l 分别取 0 和 1，再结合式(6)，可得

$$(a_{\mu+2k-2}-q^{-2}a_{\mu+2k})(c_{\mu+2k}-c_{\mu+2k-2})=-[2]_q\mu^{-1}q^{-2k}c_{\mu+2k}. \tag{8}$$

由命题 3，易见

$$a_{\mu+2k-2}-q^2a_{\mu+2k}-[2]_q\mu q^{2k}=a_{\mu+2k-4}-q^2a_{\mu+2k-2}.$$

结合式(7)，即可得

$$(a_{\mu+2k-4}-q^2a_{\mu+2k-2})b_{\mu+2k}=(a_{\mu+4k-4}-q^2a_{\mu+4k-2})b_\mu.$$

利用式(4)，不难证明 $a_{\mu+2k-4}-q^2a_{\mu+2k-2}\neq 0$. 由此可得

$$b_{\mu+2k}=\frac{a_{\mu+4k-4}-q^2a_{\mu+4k-2}}{a_{\mu+2k-4}-q^2a_{\mu+2k-2}}b_\mu=\left(1+\frac{q(q+q^{-1})\mu(1-q^{2k})}{(q-q^{-1})(a_{\mu+2k-4}-q^2a_{\mu+2k-2})}\right)b_\mu.$$

最后，结合式(4)，(8)，得

$$c_{\mu+2k}=-\frac{(a_{\mu+2k-2}-q^2a_{\mu+2k})(a_{\mu+2k-2}-q^{-2}a_{\mu+2k})}{b_{\mu+2k}}.$$

结论得证.

注 1　$U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的 Dense 模由 3 个元素 $\mu,\tau,b_\mu\in\mathbb{C}$ 且 $\mu\neq q^n$，$n\in\mathbb{N}$ 确定，记为 $V(\mu,\tau,b_\mu)$.

4　主要结果的证明

设 V 是 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的单权模，且存在 V_μ 满足 $V_\mu=\mathrm{span}\{\boldsymbol{w}_0\}$. 由于 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$的有限维单模、最高权单模和最低权单模均具有一维权空间，因此不妨设 V 不属于上述三类. 于是有 $\dim(V_{\mu-2})>0$ 和 $\dim(V_{\mu+2})>0$.

引理 4　存在 $\boldsymbol{u}\in V_{\mu-2}$，使得 $x_0^+.\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}_0$.

证明：反证法. 假设对任意 $u\in V_{\mu-2}$，都有 $x_0^+.\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{w}_0$. 因为 $\dim(V_\mu)=1$，所以对任意 $\boldsymbol{u}\in V_{\mu-2}$，有 $x_0^+.\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. 通过数学归纳法易证得对任意 $k\in\mathbb{Z}$，$x_k^+.\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. 因此对任意 $\boldsymbol{0}\neq u\in V_{\mu-2}$，都有 $\boldsymbol{w}_0\notin U_q(L(\mathfrak{sl}_2)).\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$，则 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2)).\boldsymbol{u}$ 是 V 的一个真子模，与 V 是单模矛盾. 故假设不真，结论得证.

由 $x_k^+.V_{\mu-2}\subseteq V_\mu$，$h_m.V_\mu\subseteq V_\mu$，$K.V_\mu\subseteq V_\mu$ 并结合 $\dim(V_\mu)=1$，可得以下推论.

推论 1　对任意 $k\in\mathbb{Z}$，$m\in\mathbb{Z}-\{0\}$，都有 $x_k^+.\boldsymbol{u}=a_k\boldsymbol{w}_0$，$x_0^+h_m.\boldsymbol{u}=b_m\boldsymbol{w}_0$ 和 $x_0^+K.\boldsymbol{u}=b_0\boldsymbol{w}_0$，其中 $a_k,b_m,b_0\in\mathbb{C}$，$\boldsymbol{u}$ 满足引理 4.

为证 $\boldsymbol{w}_1$ 是 K 和 h_k 的公共权向量，先证以下引理.

引理 5　对任意 $k\in\mathbb{Z}$，都有 $x_k^+.\boldsymbol{w}_0=c_k\boldsymbol{w}_1$，其中 $c_k\in\mathbb{C}$.

证明：首先用数学归纳法对 $k\geqslant 0$ 的情形进行证明.

1) 当 $k=0$ 时，显然有 $x_0^+.\boldsymbol{w}_0=\boldsymbol{w}_1$.

2) 当 $k=1$ 时，

$$x_1^+.\boldsymbol{w}_0=x_1^+x_0^+.\boldsymbol{u}=q^2x_0^+x_1^+.\boldsymbol{u}=q^2a_1x_0^+.\boldsymbol{w}_0=q^2a_1\boldsymbol{w}_1=c_1\boldsymbol{w}_1.$$

3) 假设当 $0\leqslant n\leqslant k$，$n\in\mathbb{Z}$ 时，均有 $x_n^+.\boldsymbol{w}_0=c_n\boldsymbol{w}_1$，则

$$x_{k+1}^+.\boldsymbol{w}_0=x_{k+1}^+x_0^+.\boldsymbol{u}=(q^2x_0^+x_{k+1}^++q^2x_k^+x_1^+-x_1^+x_k^+).\boldsymbol{u}.$$

利用推论 1，得

$$x_{k+1}^+.\boldsymbol{w}_0=q^2a_{k+1}x_0^+.\boldsymbol{w}_0+q^2a_1x_k^+.\boldsymbol{w}_0-a_kx_1^+.\boldsymbol{w}_0,$$

结合上述 1)，2)和假设条件，得 $x_{k+1}^+.\boldsymbol{w}_0=c_{k+1}\boldsymbol{w}_1$.

同理可证 $k\leqslant 0$ 时，也满足 $x_k^+.\boldsymbol{w}_0=c_k\boldsymbol{w}_1$. 证毕.

命题 4　对任意 $k\in\mathbb{Z}-\{0\}$，都有 $h_k.\boldsymbol{w}_1=d_k\boldsymbol{w}_1$，其中 $d_k\in\mathbb{C}$.

证明：首先由定义关系，计算得

$$h_k.\boldsymbol{w}_1=h_k(x_0)^2.\boldsymbol{u}=[h_k,(x_0)^2].\boldsymbol{u}+(x_0)^2h_k.\boldsymbol{u}=$$

$$\frac{1}{k}[2k]_qx_k^+.\boldsymbol{w}_0+\frac{1}{k}[2k]_qx_0^+x_k^+.\boldsymbol{u}+x_0^+(x_0^+h_k.\boldsymbol{u}).$$

利用推论 1，得

$$h_k.\boldsymbol{w}_1=\frac{1}{k}[2k]_qx_k^+.\boldsymbol{w}_0+\frac{1}{k}[2k]_qa_kx_0^+.\boldsymbol{w}_0+b_kx_0^+.\boldsymbol{w}_0.$$

结合引理 5，结论得证.

同理于上述结果，存在非零向量 $\boldsymbol{v}\in V_{\mu+2}$ 满足 $\boldsymbol{w}_0=x_0^-.\boldsymbol{v}$. 取 $\boldsymbol{w}_{-1}=x_0^-.\boldsymbol{w}_0=(x_0^-)^2.\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$. 可得如下结论，证明略.

命题 5 1) 对任意 $k\in\mathbb{Z}$，都有 $x_k^-.\boldsymbol{w}_0=e_k\boldsymbol{w}_{-1}$，其中 $e_k\in\mathbb{C}$；

2) 对任意 $k\in\mathbb{Z}-\{0\}$，都有 $h_k.\boldsymbol{w}_{-1}=f_k\boldsymbol{w}_{-1}$，其中 $f_k\in\mathbb{C}$.

取 $\boldsymbol{w}_2=x_0^+.\boldsymbol{w}_1=(x_0^+)^2.\boldsymbol{w}_0\neq\boldsymbol{0}$，用 $\boldsymbol{w}_0$ 替换引理 5 和命题 4 中的 $\boldsymbol{u}$，即可得如下结论.

引理 6 1) 对任意 $k\in\mathbb{Z}$，都有 $x_k^+.\boldsymbol{w}_1=f_k\boldsymbol{w}_2$，其中 $f_k\in\mathbb{C}$；

2) 对任意 $k\in\mathbb{Z}-\{0\}$，都有 $h_k.\boldsymbol{w}_2=g_k\boldsymbol{w}_2$，其中 $g_k\in\mathbb{C}$.

取 $\boldsymbol{w}_{-2}=x_0^-.\boldsymbol{w}_{-1}=(x_0^-)^2.\boldsymbol{w}_0\neq\boldsymbol{0}$，用 $\boldsymbol{w}_0$ 替换命题 5 中的 $\boldsymbol{v}$，即可得如下结论.

引理 7 1) 对任意 $k\in\mathbb{Z}$，都有 $x_k^-.\boldsymbol{w}_{-1}=p_k\boldsymbol{w}_{-2}$，其中 $p_k\in\mathbb{C}$；

2) 对任意 $k\in\mathbb{Z}-\{0\}$，都有 $h_k.\boldsymbol{w}_{-2}=q_k\boldsymbol{w}_{-2}$，其中 $q_k\in\mathbb{C}$.

依此类推，可得以下命题.

命题 6 对任意 $k\in\mathbb{Z}-\{0\}$，$n\in\mathbb{Z}$，都有 $h_k.\boldsymbol{w}_n=l_k\boldsymbol{w}_n$，其中 $l_k\in\mathbb{C}$.

下面证明定理 1. 设 V 是 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 的具有一个一维权空间的单权模. 因为 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 的最高(低)权单模的最高(低)权空间是一维的，所以 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 的有限维单模、最高权单模或最低权单模都是具有一个一维权空间的单权模. 不妨设 V 不属于这三类中的任意一类. 设 $V_\mu=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\boldsymbol{w}_0\}$，记 $\boldsymbol{w}_{-n}=(x_0^-)^n.\boldsymbol{w}_0$，$\boldsymbol{w}_n=(x_0^+)^n.\boldsymbol{w}_0$，设

$$W=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\cdots,\boldsymbol{w}_{-2},\boldsymbol{w}_{-1},\boldsymbol{w}_0,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots\}.$$

显然有 $W\subseteq V$. 下证 W 是 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 模. 因为 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 可由 $K^{\pm1}$，$h_{\pm1}$ 和 $x_0^\pm$ 生成，所以只需证 W 在 $K^{\pm1}$，$h_{\pm1}$ 和 $x_0^\pm$ 的作用下稳定即可.

1) W 在 $K^{\pm1}$ 的作用下稳定. 显然有 $K.\boldsymbol{w}_k=\mu q^{2k}\boldsymbol{w}_k$，$K^{-1}.\boldsymbol{w}_k=\mu^{-1}q^{-2k}\boldsymbol{w}_k$.

2) W 在 $h_{\pm1}$ 的作用下稳定. 由命题 6 可得 $h_1.\boldsymbol{w}_k=l_1\boldsymbol{w}_k$，$h_{-1}.\boldsymbol{w}_k=l_{-1}\boldsymbol{w}_k$.

3) W 在 $x_0^\pm$ 的作用下稳定. 在 x_0^+ 的作用下，对 $\boldsymbol{w}_k(k\in\mathbb{N}_+)$ 已经满足稳定，故证 $\boldsymbol{w}_{-k}(k\in\mathbb{N}_+)$ 在 x_0^+ 作用下稳定即可.

① 当 $k=1$ 时，

$$x_0^+.\boldsymbol{w}_{-1}=x_0^+x_0^-.\boldsymbol{w}_0=[x_0^+,x_0^-].\boldsymbol{w}_0+x_0^-x_0^+.\boldsymbol{w}_0=[x_0^+,x_0^-].\boldsymbol{w}_0+x_0^-.\boldsymbol{w}_1,$$

结合式(2)中 k,l 均取 0 的情况，计算得 $[x_0^+,x_0^-].\boldsymbol{w}_0=\dfrac{\mu-\mu^{-1}}{q-q^{-1}}\boldsymbol{w}_0$. 由 $\dim(V_\mu)=1$ 易得 $x_0^-.\boldsymbol{w}_1=t\boldsymbol{w}_0$，$t\in\mathbb{C}$. 因此 $x_0^+.\boldsymbol{w}_{-1}=\left(\dfrac{\mu-\mu^{-1}}{q-q^{-1}}+t\right)\boldsymbol{w}_0$.

② 假设当 $1\leqslant n\leqslant k$ 时，均有 $x_0^+.\boldsymbol{w}_{-n}=t_n\boldsymbol{w}_{-n+1}$，

$$x_0^+.\boldsymbol{w}_{-k-1}=x_0^+x_0^-.\boldsymbol{w}_{-k}=[x_0^+,x_0^-].\boldsymbol{w}_{-k}+x_0^-x_0^+.\boldsymbol{w}_{-k}=\left(\frac{\mu q^{-2k}-\mu^{-1}q^{-2k}}{q-q^{-1}}+t_k\right)\boldsymbol{w}_{-k},$$

因此通过数学归纳法可证 $\boldsymbol{w}_{-k}(k\in\mathbb{N}_+)$ 在 x_0^+ 作用下稳定.

同理，可证 W 在 x_0^- 的作用下稳定.

综上可知 W 是 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 模，则 W 是 V 的子模. 因为 V 是单模，所以

$$V=W=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\cdots,\boldsymbol{w}_{-2},\boldsymbol{w}_{-1},\boldsymbol{w}_0,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots\}.$$

由假设知 V 不是最高权单模或最低权单模. 由上述证明可知，对任意的 $k\in\mathbb{Z}$，$\boldsymbol{w}_k\neq\boldsymbol{0}$. 因此作为子代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的模，V 是 Dense 单权模，故 $V\cong V(\mu,\tau,b_\mu)$. 定理 1 得证.

5 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 一类权空间维数为 2 的权模

下面构造 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 的一类权空间维数均为 2 的单权模 U，并给出模 U 不可约的充分条件，从而说明定理 1 中的限定条件是不可缺的.

设 $U=V(\mu,\tau,b_\mu)\otimes W_1(a)$，其中 $\mu,\tau\in\mathbb{C}$ 且 $\mu\neq q^n$，$n\in\mathbb{N}$，则 U 是 $U_q(L(\mathfrak{sl}_2))$ 权模，权空间为 $U_{\mu+2k+1}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2}\otimes\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{v}_{\mu+2k}\otimes\boldsymbol{w}_0\}$.

引理 8　设 V 是 U 的非零子模，若 $U_{\mu+2k+1}\subseteq V$，则 $V=U$.

证明：由 $U_{\mu+2k+1}\subseteq V$，V 是 U 的非零子模，可得 $x_0^+U_{\mu+2k+1}, x_0^-U_{\mu+2k+1}\subseteq V$，

$$x_0^+.(\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2}\otimes\boldsymbol{w}_1)=x_0^+.\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2}\otimes K.\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2}\otimes x_0^+.\boldsymbol{w}_1=$$
$$a_{\mu+2k+2}q^{-1}(\boldsymbol{v}_{\mu+2k+4}\otimes\boldsymbol{w}_1)+\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2}\otimes\boldsymbol{w}_0,$$
$$x_0^+.(\boldsymbol{v}_{\mu+2k}\otimes\boldsymbol{w}_0)=x_0^+.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}\otimes K.\boldsymbol{w}_0+\boldsymbol{v}_{\mu+2k}\otimes x_0^+.\boldsymbol{w}_0=$$
$$a_{\mu+2k}q(\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2}\otimes\boldsymbol{w}_0),$$
$$x_0^-.(\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2}\otimes\boldsymbol{w}_1)=x_0^-.\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2}\otimes\boldsymbol{w}_1+K^{-1}.\boldsymbol{v}_{\mu+2k+2}\otimes x_0^-.\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{v}_{\mu+2k}\otimes\boldsymbol{w}_1,$$
$$x_0^-.(\boldsymbol{v}_{\mu+2k}\otimes\boldsymbol{w}_0)=x_0^-.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}\otimes\boldsymbol{w}_0+K^{-1}.\boldsymbol{v}_{\mu+2k}\otimes x_0^-.\boldsymbol{w}_0=$$
$$\boldsymbol{v}_{\mu+2k-2}\otimes\boldsymbol{w}_0+q^{-\mu-2k}\boldsymbol{v}_{\mu+2k}\otimes\boldsymbol{w}_1,$$

由上述计算可得 $U_{\mu+2k+3}\subseteq V$ 和 $U_{\mu+2k-1}\subseteq V$，即 $U\subseteq V$. 由 V 是 U 的非零子模，得 $V\subseteq U$. 因此 $V=U$，证毕.

定理 3　若 $b_\mu\neq\dfrac{q^{-1}a}{2}(a_{\mu-2}-q^2a_\mu)(\tau-\sqrt{\tau^2-4})$，则 $U=V(\mu,\tau,b_\mu)\otimes W_1(a)$不可约.

证明：反证法. 假设U是可约的，则U存在真子模V，V的权空间$V_{\mu+2k+1}=V\cap U_{\mu+2k+1}$. 由引理8可得 $\dim(V_{\mu+2k+1})\leqslant 1$，且存在 $k\in\mathbb{Z}$，使得 $\dim(V_{\mu+2k+1})=1$. 因此，不妨设 $k=0$.

设 $\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{v}_{\mu+2}\otimes\boldsymbol{w}_1+n\boldsymbol{v}_\mu\otimes\boldsymbol{w}_0\in V_{\mu+1}$，计算得

$$h_1.\boldsymbol{v}=(m(b_{\mu+2}-qa)-n(q^2-q^{-2})aa_\mu)\boldsymbol{v}_{\mu+2}\otimes\boldsymbol{w}_1+n(b_\mu+q^{-1}a)\boldsymbol{v}_\mu\otimes\boldsymbol{w}_0.$$

由 $\dim(\boldsymbol{v}_{\mu+1})=1$ 得

$$m(b_{\mu+2}-b_\mu-qa-q^{-1}a)=n(q^2-q^{-2})aa_\mu,\tag{9}$$

由定义简单计算得

$$x_0^-.\boldsymbol{v}=(m+n\mu^{-1})(\boldsymbol{v}_\mu\otimes\boldsymbol{w}_1)+n\boldsymbol{v}_{\mu-2}\otimes\boldsymbol{w}_0,$$
$$h_1.(x_0^-.\boldsymbol{v})=((m+n\mu^{-1})(b_\mu-qa)-n(q^2-q^{-2})aa_{\mu-2})\boldsymbol{v}_\mu\otimes\boldsymbol{w}_1+n(b_{\mu-2}+q^{-1}a)\boldsymbol{v}_{\mu-2}\otimes\boldsymbol{w}_0.$$

由 $\dim(\boldsymbol{v}_{\mu-1})\leqslant 1$ 得

$$(m+n\mu^{-1})(b_\mu-b_{\mu-2}-qa-q^{-1}a)=n(q^2-q^{-2})aa_{\mu-2}.\tag{10}$$

设$\dfrac{b_\mu-b_{\mu-2}-qa-q^{-1}a}{(q^2-q^{-2})aa_{\mu-2}}=t$，则式(9)，(10)可以分别改写为

$$m(q^2a_{\mu-2}t+q)=na_\mu,\qquad(m+n\mu^{-1})t=n.$$

利用消元法得$\dfrac{a_\mu}{q^2a_{\mu-2}t+q}=\dfrac{1}{t}-\mu^{-1}$，通分化简得

$$q^2a_{\mu-2}t^2+(q+\mu a_\mu-q^2\mu a_{\mu-2})t-\mu q=0.$$

利用求根公式，计算得

$$t=\frac{\mu\tau\pm\mu\sqrt{\tau^2-4}}{2q(q-q^{-1})a_{\mu-2}}-\frac{1}{(q-q^{-1})a_{\mu-2}}.$$

再代回计算得

$$b_{\mu+2}-b_\mu=q^2(q^2-q^{-2})aa_{\mu-2}t+q^2(q+q^{-1})a=\frac{q(q+q^{-1})a\mu}{2}(\tau\pm\sqrt{\tau^2-4}).$$

结合式(7)，易得

$$b_\mu=\frac{q^{-1}a}{2}(a_{\mu-2}-q^2a_\mu)(\tau-\sqrt{\tau^2-4}).$$

与条件矛盾，故假设不真. 结论得证.

参　考　文　献

[1] JIMBO M. A q-Difference Analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter Equation [J]. Letters in Mathematical Physics, 1985, 10(1): 63-69.

[2] CHARI V, PRESSLEY A. A Guide to Quantum Groups [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994:

392-403.

[3] DRINFELD V G. A New Realization of Yangians and of Quantized Affine Algebras [J]. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1987, 296(1): 13-17.

[4] CHARI V, PRESSLEY A. Weyl Modules for Classical and Quantum Affine Algebras [J]. Representation Theory of the American Mathematical Society, 2001, 5(9): 191-223.

[5] HERNANDEZ D. The Kirillov-Reshetikhin Conjecture and Solutions of T-Systems [J]. Journal Fürdie Refine und Angewanclte Mathematik, 2006, 181(8): 63-87.

[6] BRITO M, CHARI V, MOURA A. Demazure Modules of Level Two and Prime Representations of Quantum Affine $\mathfrak{sl}_{n+1}$ [J]. Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 2018, 17(1): 75-105.

[7] BRITO M, CHARI V, VENKATESH R. Quantum Affine Algebras, Graded Limits and Flags [J]. Journal of the Indian Institute of Science, 2022, 102(3): 1001-1031.

[8] LECLERC B. Quantum Loop Algebras, Quiver Varieties, and Cluster Algebras [R]//SKOWRONSKI A, YAMAGATA K. Representations of Algebras and Related Topics, EMS Series of Congress Reports. Tokyo: EMS Press, 2010: 117-152.

[9] 杨冬梅. 无限维不可分解的$U_q(sl_2)$-模的分类 [D]. 北京: 北京工业大学, 2005. (YANG D M. Classification of Infinitely Dimensional in Decomposable $U_q(sl_2)$ Modules [D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2005.)

[10] CHARI V, PRESSLEY A. Quantum Affine Algebras [J]. Communications in Mathematical Physics, 1991, 142(2): 261-283.

[11] BRITTEN D, LAU M, LEMIRE F. Weight Modules for Current Algebras [J]. Journal of Algebra, 2005, 440(1): 245-263.

(责任编辑: 李 琦)