Hom－李超三系的(θ,φ)－导子和 Jordan (θ,φ)－导子

曹 燕， 徐雪琪
（哈尔滨理工大学 理学院，哈尔滨 150080）

摘 要：主要研究了 Hom－李超三系的（广义）(θ,φ)－导子和（广义）Jordan(θ,φ)－导子。首先，给出了 Hom－李超三系的（广义）(θ,φ)－导子和（广义）Jordan(θ,φ)－导子的定义。然后，证明了 Hom－李超三系的（广义）Jordan(θ,φ)－导子是（广义）(θ,φ)－导子的充分条件，以及 Hom－李超三系的（广义）Jordanθ－导子就是（广义）θ－导子。

关键词：Hom－李超三系；(θ,φ)－导子；Jordan(θ,φ)－导子；广义(θ,φ)－导子；广义 Jordan(θ,φ)－导子
DOI：10.15938/j.jhust.2026.03.013
中图分类号：0152.5 **文献标志码**：A **文章编号**：1007－2683(2026)03－0127－09

(θ,φ)－derivations and Jordan(θ,φ)－derivations of Hom-Lie Supertriple Systems

CAO Yan， XU Xueqi
（School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China）

Abstract: The research focuses on (generalized) (θ,φ)－derivations and (generalized) Jordan(θ,φ)－derivations of Hom-Lie supertriple systems. Firstly, we give the definitions of (generalized) (θ,φ)－derivations and (generalized) Jordan(θ,φ)－derivations of Hom-Lie supertriple systems, and further conclude that (generalized) Jordan(θ,φ)－derivations are (generalized) (θ,φ)－derivations on the Hom-Lie supertriple systems under some conditions. Also, we prove that (generalized) Jordanθ－derivations are (generalized) θ－derivations on the Hom-Lie supertriple systems.

Keywords: Hom-Lie supertriple systems; (θ,φ)－derivations; Jordan(θ,φ)－derivations; generalized (θ,φ)－derivations; generalized Jordan(θ,φ)－derivations

0 引 言

JACOBSON[1]结合 Jordan 理论和量子力学中的问题首次提出了李三系的定义。HODGE 等[2]研究了李三系表示理论和代数同态，并引入到限制李三系中。NAJATI[3－5]研究了李三系的广义导子。OKUBO[6]在研究 Yang-Baxter 方程的过程中首次提出了李超三系的定义。文[7－13]分别研究了李超三系的线性形变与阿贝尔扩张、型心以及广义导子。文[14]在研究李 color 代数的过程中，提出了李 color 三系的定义。文[15]研究了李 color 三系的广义导子。

文[16]研究了 Hom－李三系的广义导子，证明了广义导子是拟导子与拟型心的和，以及拟导子能嵌入到更大的 Hom－李三系中。文[17]提到了 Hom－李代数的（广义）(θ,φ)－导子和（广义）Jordan(θ,φ)－导子。文[18]研究了 Hom－李超三系的广义导子。文[19－20]把李 color 三系的广义导子的结果推

收稿日期：2024－10－11
基金项目：国家自然科学基金(11801121)；黑龙江省自然科学基金(QC2018006).
作者简介：徐雪琪(2000—)，女，硕士研究生.
通信作者：曹 燕(1981—)，女，博士，副教授，E-mail:48069607@qq.com.

广到 Hom－李 color 三系及 BiHom－李 color 三系上。Hom－李超三系是李超三系的推广，因此可联想到一个问题，即李超三系上关于(广义)(θ,φ)－导子和(广义)Jordan(θ,φ)－导子的相关理论是否能推广到 Hom－李超三系上。因此，本文研究了 Hom－李超三系的(广义)(θ,φ)－导子和(广义)Jordan(θ,φ)－导子。本文要求基域 $\mathbb{F}$ 的特征不为3。

1 预备知识

定义 1[2] 设 T 为域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，若 T 上有三元线性运算$[\cdot,\cdot,\cdot]:T\times T\times T\to T$，$\forall x,y,z,u,u,v\in T$，满足

1)$[x,y,z]=-[y,z,x]$，

2)$[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]=0$，

3)$[u,v,[x,y,z]]=[[u,v,x],y,z]+[x,[u,v,y],z]+[x,y,[u,v,z]]$，

则称 T 为李三系。

如果线性空间 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$，则称线性空间 V 为 $\mathbb{Z}_2$－阶化的，其中称 $V_{\bar{0}}$ 为 V 的偶部，$V_{\bar{1}}$ 为 V 的奇部。如果 $x\in V_\gamma(\gamma\in\mathbb{Z}_2)$，则称 x 为 γ 次齐次元素。如果 x,y,z 是 $\mathbb{Z}_2$－阶化向量空间中的齐次元，用 $d(x)$，$d(y)$，$d(z)\in\mathbb{Z}_2$ 表示他们的次数。为方便，用 x 表示 $d(x)$。此外，本文用 $hg(V)$ 表示 V 中所有齐次元素。

设 V、W 是2个 $\mathbb{Z}_2$－阶化的线性空间，如果对任意的 $x\in V_\gamma,\gamma\in\mathbb{Z}_2$，都有 $f(x)\in W_{\gamma+\theta}$，则称线性映射 $f:V\to W$ 为 θ 次。特别地，当 f 是0次时，即 $f(V_\gamma)\subseteq W_\gamma$，则称 f 是偶的。

定义 2[13] $\mathbb{Z}_2$－阶化线性空间 T 上若有三元线性运算$[\cdot,\cdot,\cdot]:T\times T\times T\to T$，满足 $\forall x,y,z,u,v\in hg(T)$，有

1)$d([x,y,z])\equiv d(x)+d(y)+d(z)(\mathrm{mod}2)$，

2)$[x,y,z]=-(-1)^{xy}[y,x,z]$，

3)$(-1)^{zx}[x,y,z]+(-1)^{xy}[y,z,x]+(-1)^{yz}[z,x,y]=0$，

4)$[u,v,[x,y,z]]=[[u,v,x],y,z]+(-1)^{(u+v)x}[x,[u,v,y],z]+(-1)^{(u+v)(x+y)}[x,y,[u,v,z]]$，

则称 T 为李超三系，将 $d(x)$ 表示为 x，$(-1)^{d(x)d(y)}$ 表示为 $(-1)^{xy}$。

定义 3[18] 设 $T=T_{\bar{0}}\oplus T_{\bar{1}}$ 为 $\mathbb{Z}_2$－阶化线性空间，若 T 上有三元线性运算$[\cdot,\cdot,\cdot]:T\times T\times T\to T$，以及偶线性映射 $\alpha:T\to T$，满足 $\forall x,y,z,u,v\in hg(T)$，有

1)$[T_i,T_j,T_k]\subseteq T_{i+j+k}$，$i,j,k\in\mathbb{Z}_2$

2)$[x,y,z]=-(-1)^{xy}[y,x,z]$，

3)$(-1)^{xz}[x,y,z]+(-1)^{xy}[y,z,x]+(-1)^{yz}[z,x,y]=0$，

4)$[\alpha(u),\alpha(v),[x,y,z]]=[[u,v,x],\alpha(y),\alpha(z)]+(-1)^{(u+v)x}[\alpha(x),[u,v,y],\alpha(z)]+(-1)^{(u+v)(x+y)}[\alpha(x),\alpha(y),[u,v,z]]$，

则称$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$是 Hom－李超三系。

当 $\alpha=i_d$ 时，Hom－李超三系为李超三系。因此 Hom－李超三系是李超三系的进一步推广。

定义 4[18] 设$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$是 Hom－李超三系，若齐次线性映射 $D:T\to T$ 满足

1)$[D,\alpha]=0$，

2)$D([x,y,z])=[D(x),\alpha^k(y),\alpha^k(z)]+(-1)^{Dx}[\alpha^k(x),D(y),\alpha^k(z)]+(-1)^{D(x+y)}[\alpha^k(x),\alpha^k(y),D(z)]$，

其中 $x,y,z\in hg(T)$，则称 D 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的导子。

定义 5 设$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$是 Hom－李超三系，若齐次线性映射 $D':T\to T$ 满足

1)$[D',\alpha]=0$，

2)$D'([x,y,x])=[D'(x),\alpha^k(y),\alpha^k(x)]+(-1)^{D'x}[\alpha^k(x),D'(y),\alpha^k(x)]+(-1)^{D'(x+y)}[\alpha^k(x),\alpha^k(y),D'(x)]$，

其中 $x,y\in hg(T)$，则称 D'为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan 导子。

定义 6 设$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$是 Hom－李超三系，若 $D:T\to T$ 是齐次线性映射，δ 为 T 的导子，且 $d(\delta)=d(D)$，满足

1)$[D,\alpha]=0$，

2)$D([x,y,z])=[\delta(x),\alpha^k(y),\alpha^k(z)]+(-1)^{Dx}[\alpha^k(x),\delta(y),\alpha^k(z)]+(-1)^{D(x+y)}[\alpha^k(x),\alpha^k(y),D(z)]$，

其中 $x,y,z\in hg(T)$，则称 D 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的广义导子。

2　主要结果

定义 7　设$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$是 Hom – 李超三系,若$D,\theta,\varphi:T\to T$是齐次线性映射,且满足$[D,\alpha]=0$,$d(\theta)=d(\varphi)=0$。

1)若$\forall x,y,z\in T$,齐次线性映射 D 满足

$$D([x,y,z])=[D(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)],$$

则称 D 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_1$ – 导子。

2)若$\forall x,y,z\in T$,齐次线性映射 D 满足

$$D([x,y,z])=[D(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)],$$

则称 D 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_2$ – 导子。

3)若$\forall x,y,z\in T$,齐次线性映射 D 满足

$$D([x,y,z])=[D(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}[\varphi(\alpha^k(x)),D(y),\theta(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)],$$

则称 D 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_3$ – 导子。

特别地,$\forall i=1,2,3$,若$\theta=\varphi$,则称$(\theta,\varphi)_i$ – 导子为 θ – 导子。显然,当$\theta=\varphi=i_d$时,$(\theta,\varphi)_i$ – 导子是导子。

定义 8　设$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$是 Hom – 李超三系,若$D,\theta,\varphi:T\to T$是齐次线性映射,且满足$[D,\alpha]=0$,$d(\theta)=d(\varphi)=0$。

1)若$\forall x,y\in T$,齐次线性映射 D 满足

$$D([x,y,x])=[D(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(x))]+(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),\varphi(\alpha^k(x))]+(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(x)],$$

则称 D 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan $(\theta,\varphi)_1$ – 导子。

2)若$\forall x,y\in T$,齐次线性映射 D 满足

$$D([x,y,x])=[D(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(x))]+(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),\varphi(\alpha^k(x))]+(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(x)],$$

则称 D 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan $(\theta,\varphi)_2$ – 导子。

3)若$\forall x,y\in T$,齐次线性映射 D 满足

$$D([x,y,x])=[D(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(x))]+(-1)^{Dx}[\varphi(\alpha^k(x)),D(y),\theta(\alpha^k(x))]+(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(x)],$$

则称 D 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan $(\theta,\varphi)_3$ – 导子。

特别地,$\forall i=1,2,3$,若$\theta=\varphi$,则称 Jordan $(\theta,\varphi)_i$ – 导子为 Jordan θ – 导子。显然,当$\theta=\varphi=i_d$时,Jordan $(\theta,\varphi)_i$ – 导子是 Jordan 导子。

易见,$\forall i=1,2,3$,当 D_i 是 T 的$(\theta,\varphi)_i$ – 导子时,D_i 是 T 的 Jordan $(\theta,\varphi)_i$ – 导子。

本节默认$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$是 Hom – 李超三系,$D,\theta,\varphi:T\to T$是齐次线性映射,且满足$[D,\alpha]=0$,$d(\theta)=d(\varphi)=0$。

定理 1　D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_1$ – 导子当且仅当 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan $(\theta,\varphi)_1$ – 导子,且$\forall x,y,z\in T$,

1)$[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)]=[\varphi(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),D(z)]$,

2)$(-1)^{zx}A(x,y,z)+(-1)^{xy}A(y,z,x)+(-1)^{yz}A(z,x,y)=0$,

其中

$$A(x,y,z)=\alpha([D(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)])。$$

证明:必要性。若 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_1$ – 导子,则显然 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan $(\theta,\varphi)_1$ – 导子,且满足

$$D([x,y,z])=-(-1)^{xy}D([y,x,z])\tag{1}$$

由于

$$-(-1)^{xy}D([y,x,z])=-(-1)^{xy}[D(y),\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(z))]-(-1)^{xy}(-1)^{Dy}[\theta(\alpha^k(y)),D(x),\varphi(\alpha^k(z))]-(-1)^{xy}(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(x)),D(z)]=(-1)^{xy}(-1)^{(D+y)x}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{xy}(-1)^{Dy}(-1)^{y(D+x)}[D(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{xy}(-1)^{D(x+y)}(-1)^{xy}[\varphi(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),D(z)]=[D(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),D(z)],$$

及

$$D([x,y,z])=[D(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(x)),$$

$\varphi(\alpha^k(y)),D(z)]$,

因此

$[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)]=$

$[\varphi(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),D(z)]$。

又因为 D 是 $[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$ 的 $(\theta,\varphi)_1$ - 导子,所以 $\alpha(D([x,y,z]))=A(x,y,z)$,故

$(-1)^{zx}A(x,y,z)+(-1)^{xy}A(y,z,x)+$

$(-1)^{yz}A(z,x,y)=\alpha((-1)^{zx}D([x,y,z])+$

$(-1)^{xy}D([y,z,x])+(-1)^{yz}D([z,x,y]))=$

$\alpha[D((-1)^{zx}[x,y,z]+(-1)^{xy}[y,z,x]+$

$(-1)^{yz}[z,x,y])]=0$。

充分性。若 D 是 $[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$ 的 Jordan $(\theta,\varphi)_1$ - 导子,且满足定理1的1)和2),则

$\alpha(D([x,y,x]))=A(x,y,x)$,

因此

$\alpha(D([x+z,y,x+z]))=$

$\alpha(D([x,y,z])+D([z,y,x])+$

$D([x,y,x])+D([z,y,z]))=$

$\alpha(D([x,y,z]))+\alpha(D([z,y,x]))+$

$A(x,y,x)+A(z,y,z)$,

及

$\alpha(D([x+z,y,x+z]))=$

$A(x+z,y,x+z)=$

$A(x,y,x)+A(x,y,z)+A(z,y,x)+A(z,y,z)$

因此有

$\alpha(D([x,y,z]))+\alpha(D([z,y,x]))=$

$A(x,y,z)+A(z,y,x)$ (2)

由定理1的1)可得,

$A(y,x,z)=\alpha([D(y),\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(z))]+$

$(-1)^{Dy}[\theta(\alpha^k(y)),D(x),\varphi(\alpha^k(z))]+$

$(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(x)),D(z)])=$

$\alpha(-(-1)^{(D+y)x}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),$

$\varphi(\alpha^k(z))]-(-1)^{Dy}(-1)^{y(D+x)}[D(x),$

$\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]-$

$(-1)^{D(x+y)}(-1)^{yx}[\varphi(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),$

$D(z)])=-\alpha((-1)^{yx}[D(x),\theta(\alpha^k(y)),$

$\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}(-1)^{yx}[\theta(\alpha^k(x)),$

$D(y),\varphi(\alpha^k(z))]+$

$(-1)^{D(x+y)}(-1)^{yx}[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),$

$D(z)])=-(-1)^{yx}A(x,y,z)$。

因此

$A(x,y,y)=-(-1)^{xy}A(y,x,y)$,

由式(1)可得

$D([x,y,y])=-(-1)^{xy}D([y,x,y])$,

又因为

$\alpha(D([x,y,x]))=A(x,y,x)$,

故

$\alpha(D([x,y,y]))=-(-1)^{xy}\alpha(D([y,x,y]))=$

$-(-1)^{xy}A(y,x,y)=A(x,y,y)$。

用相同的方法易证

$\alpha(D([x,y,z]))+\alpha(D([x,z,y]))=$

$A(x,y,z)+A(x,z,y)$ (3)

将式(2)乘以 $(-1)^{xz}$,再加上式(3)乘以 $(-1)^{xy}$,可得

$\alpha[(-1)^{xz}(D([x,y,z])+D([z,y,x]))+$

$(-1)^{xy}(D([x,y,z])+D([x,z,y]))]=$

$(-1)^{xz}(A(x,y,z)+A(z,y,x))+$

$(-1)^{xy}(A(x,y,z)+A(x,z,y))$,

则

$((-1)^{xz}+(-1)^{xy})\alpha(D([x,y,z]))+$

$\alpha[(-1)^{xz}D([z,y,x])+$

$(-1)^{xy}D([x,z,y])]=((-1)^{xz}+$

$(-1)^{xy})\alpha(D([x,y,z]))-$

$(-1)^{zy}\alpha(D([y,x,z]))=((-1)^{xz}+$

$(-1)^{xy}+(-1)^{zy}(-1)^{xy})\alpha(D([x,y,z]))=$

$(-1)^{xz}(A(x,y,z)+A(z,y,x))+$

$(-1)^{xy}(A(x,y,z)+A(x,z,y))$,

因此

$((-1)^{xz}+(-1)^{xy}+$

$(-1)^{zy}(-1)^{xy})\alpha(D([x,y,z]))=$

$((-1)^{xz}+(-1)^{xy}+(-1)^{zy}(-1)^{xy})A(x,y,z)+$

$(-1)^{xz}A(z,y,x)+(-1)^{xy}A(x,z,y)-$

$(-1)^{zy}(-1)^{xy}A(x,y,z)=((-1)^{xz}+$

$(-1)^{xy}+(-1)^{zy}(-1)^{xy})A(x,y,z)+$

$(-1)^{xz}A(z,y,x)+(-1)^{xy}A(x,z,y)+$

$(-1)^{zy}A(y,x,z)=((-1)^{xz}+(-1)^{xy}+$

$(-1)^{zy}(-1)^{xy})A(x,y,z)$。

又因为基域 $\mathbb{F}$ 的特征不为3,因此

$(-1)^{xz}+(-1)^{xy}+(-1)^{zy}(-1)^{xy}\neq 0$。

故

$\alpha(D([x,y,z]))=A(x,y,z)$。

即 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_1$ – 导子。

推论 1　D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 θ – 导子当且仅当 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan$\theta$ – 导子。

证明:必要性。若 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 θ – 导子,则显然 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan$\theta$ – 导子。

充分性。若 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan$\theta$ – 导子,则定理 1 中的 1)显然成立,而且有

$$(-1)^{zx}A(x,y,z)+(-1)^{xy}A(y,z,x)+$$
$$(-1)^{yz}A(z,x,y)=\alpha((-1)^{zx}[D(x),\theta(\alpha^k(y))],$$
$$\theta(\alpha^k(z))]+(-1)^{zx}(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),$$
$$\theta(\alpha^k(z))]+(-1)^{zx}(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(x)),$$
$$\theta(\alpha^k(y)),D(z)])+\alpha((-1)^{xy}[D(y),\theta(\alpha^k(z)),$$
$$\theta(\alpha^k(x))]+(-1)^{xy}(-1)^{Dy}[\theta(\alpha^k(y)),D(z),$$
$$\theta(\alpha^k(x))]+(-1)^{xy}(-1)^{D(y+z)}[\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z)),$$
$$D(x)])+\alpha((-1)^{yz}[D(z),\theta(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y))]+$$
$$(-1)^{yz}(-1)^{Dz}[\theta(\alpha^k(z)),D(x),\theta(\alpha^k(y))]+$$
$$(-1)^{yz}(-1)^{D(x+z)}[\theta(\alpha^k(z)),\theta(\alpha^k(x)),$$
$$D(y)])=(-1)^{Dz}\alpha((-1)^{xz}(-1)^{Dz}[D(x),$$
$$\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))]+(-1)^{xy}(-1)^{Dy}[\theta(\alpha^k(y)),$$
$$\theta(\alpha^k(z)),D(x)]+(-1)^{yz}[\theta(\alpha^k(z)),D(x),$$
$$\theta(\alpha^k(y))])+(-1)^{Dx}\alpha((-1)^{xy}(-1)^{Dx}[D(y),$$
$$\theta(\alpha^k(z)),\theta(\alpha^k(x))]+(-1)^{yz}(-1)^{Dz}[\theta(\alpha^k(z)),$$
$$\theta(\alpha^k(x)),D(y)]+(-1)^{xz}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),$$
$$\theta(\alpha^k(z))])+(-1)^{Dy}\alpha((-1)^{zy}(-1)^{Dy}[D(z),$$
$$\theta(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y))]+(-1)^{xz}(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),$$
$$\theta(\alpha^k(y)),D(z)]+(-1)^{xy}[\theta(\alpha^k(y)),D(z),$$
$$\theta(\alpha^k(x))])=0。$$

因此,定理 1 的 2)成立。由定理 1 可得 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 θ – 导子。

定理 2　D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_2$ – 导子当且仅当 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan $(\theta,\varphi)_2$ – 导子,且 $\forall x,y,z\in T$,

$$1)[D(x)),\theta(\alpha^k(y)),(\varphi-\theta)(\alpha^k(z))]=$$
$$(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),(\varphi-\theta)(\alpha^k(z))],$$
$$2)(-1)^{zx}A'(x,y,z)+(-1)^{xy}A'(y,z,x)+$$
$$(-1)^{yz}A'(z,x,y)=0,$$

其中

$$A'(x,y,z)=\alpha([D(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))]+$$
$$(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),\varphi(\alpha^k(z))]+$$
$$(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)])。$$

证明:必要性。若 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_2$ – 导子,则显然 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan $(\theta,\varphi)_2$ – 导子,且满足

$$D([x,y,z])=-(-1)^{xy}D([y,x,z])。$$

由于

$$-(-1)^{xy}D([y,x,z])=-(-1)^{xy}[D(y),$$
$$\theta(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(z))]-(-1)^{xy}(-1)^{Dy}[\theta(\alpha^k(y)),$$
$$D(x),\varphi(\alpha^k(z))]-(-1)^{xy}(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(y)),$$
$$\varphi(\alpha^k(x)),D(z)]=$$
$$(-1)^{xy}(-1)^{(D+y)x}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),\theta(\alpha^k(z))]+$$
$$(-1)^{xy}(-1)^{Dy}(-1)^{y(D+x)}[D(x),\theta(\alpha^k(y)),$$
$$\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{xy}(-1)^{D(x+y)}(-1)^{xy}[\varphi(\alpha^k(x)),$$
$$\varphi(\alpha^k(y)),D(z)]=[D(x),\theta(\alpha^k(y)),$$
$$\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),$$
$$\theta(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),$$
$$\varphi(\alpha^k(y)),D(z)],$$

及

$$D([x,y,z])=[D(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))]+$$
$$(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),\varphi(\alpha^k(z))]+$$
$$(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)],$$

因此

$$[D(x)),\theta(\alpha^k(y)),(\varphi-\theta)(\alpha^k(z))]=$$
$$(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),(\varphi-\theta)(\alpha^k(z))]。$$

又因为 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_2$ – 导子,所以 $\alpha(D([x,y,z]))=A'(x,y,z)$,故

$$(-1)^{zx}A'(x,y,z)+(-1)^{xy}A'(y,z,x)+$$
$$(-1)^{yz}A'(z,x,y)=\alpha((-1)^{zx}D([x,y,z])+$$
$$(-1)^{xy}D([y,z,x])+(-1)^{yz}D([z,x,y]))=$$
$$\alpha[D((-1)^{zx}[x,y,z]+(-1)^{xy}[y,z,x]+$$
$$(-1)^{yz}[z,x,y])]=0。$$

充分性。若 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan$(\theta,\varphi)_2$ – 导子且满足定理 2 的 1)和 2)。由于

$$A'(y,x,z)=\alpha([D(y),\theta(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(z))]+$$
$$(-1)^{Dy}[\theta(\alpha^k(y)),D(x),\varphi(\alpha^k(z))]+$$
$$(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(x)),D(z)])=$$
$$\alpha(-(-1)^{(D+y)x}[\theta(\alpha^k(x)),D(y),$$
$$\theta(\alpha^k(z))]-(-1)^{Dy}(-1)^{y(D+x)}[D(x),\theta(\alpha^k(y)),$$
$$\varphi(\alpha^k(z))]-(-1)^{D(x+y)}(-1)^{yx}[\varphi(\alpha^k(x)),$$

$\varphi(\alpha^k(y)),D(z)]) = -\alpha((-1)^{yx}[D(x),$
$\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))] + (-1)^{Dx}(-1)^{yx}[\theta(\alpha^k(x)),$
$D(y),\theta(\alpha^k(z))] + (-1)^{D(x+y)}(-1)^{yx}[\varphi(\alpha^k(x)),$
$\varphi(\alpha^k(y)),D(z)]) = -(-1)^{yx}A'(x,y,z)$。

再利用与定理1类似的证明方法即可证出 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_2$-导子。

定理3 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_3$-导子当且仅当 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan $(\theta,\varphi)_3$-导子,且$\forall x,y,z\in T$,

$1)[D(x),(\theta-\varphi)(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))] =$
$(-1)^{Dx}[(\theta-\varphi)(\alpha^k(x)),D(y),\theta(\alpha^k(z))]$,

$2)(-1)^{zx}A''(x,y,z) + (-1)^{xy}A''(y,z,x) +$
$(-1)^{yz}A''(z,x,y) = 0$。

其中

$A''(x,y,z) = \alpha([D(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))] +$
$(-1)^{Dx}[\varphi(\alpha^k(x)),D(y),\theta(\alpha^k(z))] +$
$(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)])$。

证明:参考定理1的证明方法即可证出结论。

注:推论1也可以由定理2或定理3得出。因为若 D 是$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan$\theta$-导子,则$\forall x,y,z\in T$,有

$A(x,y,z) = A'(x,y,z) = A''(x,y,z)$

成立。

定义9 设$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$是 Hom-李超三系,若 $D_i,\theta,\varphi:T\to T$ 是齐次线性映射,且满足$[D_i,\alpha]=0,d(\theta)=d(\varphi)=0,\forall i=1,2,3$。

1)若 $D_1:T\to T$ 是齐次线性映射,δ_1 是 T 的$(\theta,\varphi)_1$-导子,且 $d(D_1)=d(\delta_1),\forall x,y,z\in T$,有

$D_1([x,y,z]) = [\delta_1(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))] +$
$(-1)^{D_1x}[\theta(\alpha^k(x)),\delta_1(y),\varphi(\alpha^k(z))] +$
$(-1)^{D_1(x+y)}[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D_1(z)]$,

则称 D_1 为关于 δ_1 的广义$(\theta,\varphi)_1$-导子。

2)若 $D_2:T\to T$ 是齐次线性映射,δ_2 是 T 的$(\theta,\varphi)_2$-导子,且 $d(D_2)=d(\delta_2),\forall x,y,z\in T$,有

$D_2([x,y,z]) = [\delta_2(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))] +$
$(-1)^{D_2x}[\theta(\alpha^k(x)),\delta_2(y),\varphi(\alpha^k(z))] +$
$(-1)^{D_2(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D_2(z)]$,

则称 D_2 为关于 δ_2 的广义$(\theta,\varphi)_2$-导子。

3)若 $D_3:T\to T$ 是齐次线性映射,δ_3 是 T 的$(\theta,\varphi)_3$-导子,且 $d(D_3)=d(\delta_3),\forall x,y,z\in T$,有

$D_3([x,y,z]) = [\delta_3(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))] +$
$(-1)^{D_3x}[\varphi(\alpha^k(x)),\delta_3(y),\theta(\alpha^k(z))] +$
$(-1)^{D_3(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D_3(z)]$,

则称 D_3 为关于 δ_3 的广义$(\theta,\varphi)_3$-导子。

特别地,$\forall i=1,2,3$,若 $\theta=\varphi,\delta$ 为 θ-导子,则称广义$(\theta,\varphi)_i$-导子 D 为关于 δ 的广义 θ-导子。显然,当 $\theta=\varphi=i_d$ 且 δ 为导子时,D 是广义导子。

定义10 设$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$是 Hom-李超三系,若 $D_i,\theta,\varphi:T\to T$ 是齐次线性映射,且满足$[D_i,\alpha]=0,d(\theta)=d(\varphi)=0,\forall i=1,2,3$。

1)若 $D_1:T\to T$ 是齐次线性映射,δ_1 是 T 的 Jordan $(\theta,\varphi)_1$-导子,且 $d(D_1)=d(\delta_1),\forall x,y\in T$,有

$D_1([x,y,x]) = [\delta_1(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(x))] +$
$(-1)^{D_1x}[\theta(\alpha^k(x)),\delta_1(y),\varphi(\alpha^k(x))] +$
$(-1)^{D_1(x+y)}[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D_1(x)]$,

则称 D_1 为关于 δ_1 的广义 Jordan $(\theta,\varphi)_1$-导子。

2)若 $D_2:T\to T$ 是齐次线性映射,δ_2 是 T 的 Jordan $(\theta,\varphi)_2$-导子,且 $d(D_2)=d(\delta_2),\forall x,y\in T$,有

$D_2([x,y,x]) = [\delta_2(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(x))] +$
$(-1)^{D_2x}[\theta(\alpha^k(x)),\delta_2(y),\varphi(\alpha^k(x))] +$
$(-1)^{D_2(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D_2(x)]$,

则称 D_2 为关于 δ_2 的广义 Jordan $(\theta,\varphi)_2$-导子。

3)若 $D_3:T\to T$ 是齐次线性映射,δ_3 是 T 的 Jordan $(\theta,\varphi)_3$-导子,且 $d(D_3)=d(\delta_3),\forall x,y\in T$,有

$D_3([x,y,x]) = [\delta_3(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(x))] +$
$(-1)^{D_3x}[\varphi(\alpha^k(x)),\delta_3(y),\theta(\alpha^k(x))] +$
$(-1)^{D_3(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D_3(x)]$,

则称 D_3 为关于 δ_3 的广义 Jordan $(\theta,\varphi)_3$-导子。

特别地,$\forall i=1,2,3$,若 $\theta=\varphi,\delta$ 为 Jordanθ-导子,则称广义 Jordan $(\theta,\varphi)_i$-导子 D 为关于 δ 的广义 Jordanθ-导子。显然,当 $\theta=\varphi=i_d$ 且 δ 为 Jordan 导子时,D 是广义 Jordan 导子。

定理4 若 δ 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_1$-导子,则 D 是关于 δ 的广义$(\theta,\varphi)_1$-导子当且仅当 D 是关于 δ 的广义 Jordan $(\theta,\varphi)_1$-导子,且$\forall x,y,z\in T$,

$1)[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)] =$
$[\varphi(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),D(z)]$,

$2)(-1)^{zx}B(x,y,z) + (-1)^{xy}B(y,z,x) +$

$$(-1)^{yz}B(z,x,y)=0,$$

其中

$$B(x,y,z)=\alpha([\delta(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),\delta(y),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)])。$$

证明:必要性。若 D 是关于 δ 的广义$(\theta,\varphi)_1$ – 导子,则显然 D 是广义 Jordan $(\theta,\varphi)_1$ – 导子,且满足

$$D([x,y,z])=-(-1)^{xy}D([y,x,z])。$$

由于

$$-(-1)^{xy}D([y,x,z])=-(-1)^{xy}[\delta(y),\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(z))]-(-1)^{xy}(-1)^{Dy}[\theta(\alpha^k(y)),\delta(x),\varphi(\alpha^k(z))]-(-1)^{xy}(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(x)),D(z)]=(-1)^{xy}(-1)^{(D+y)x}[\theta(\alpha^k(x)),\delta(y),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{xy}(-1)^{Dy}(-1)^{y(D+x)}[\delta(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{xy}(-1)^{D(x+y)}(-1)^{xy}[\varphi(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),D(z)]=[\delta(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),\delta(y),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),D(z)],$$

及

$$D([x,y,z])=[\delta(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),\delta(y),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)],$$

因此

$$[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)]=[\varphi(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),D(z)]。$$

又因为 D 是关于 δ 的广义$(\theta,\varphi)_1$ – 导子,所以 $\alpha(D([x,y,z]))=B(x,y,z)$,故

$$(-1)^{zx}B(x,y,z)+(-1)^{xy}B(y,z,x)+(-1)^{yz}B(z,x,y)=\alpha((-1)^{zx}D([x,y,z])+(-1)^{xy}D([y,z,x])+(-1)^{yz}D([z,x,y]))=\alpha[D((-1)^{zx}[x,y,z]+(-1)^{xy}[y,z,x]+(-1)^{yz}[z,x,y])]=0。$$

充分性:若 D 是关于 δ 的广义 Jordan $(\theta,\varphi)_1$ – 导子,且满足定理 4 的 1)和 2),则由定理 1 类似的证明方法,只需 $B([x,y,z])=-(-1)^{xy}B([y,x,z])$ 成立即可得证。

$$B(y,x,z)=\alpha([\delta(y),\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dy}[\theta(\alpha^k(y)),\delta(x),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(x)),D(z)])=\alpha(-(-1)^{(D+y)x}[\theta(\alpha^k(x)),\delta(y),\varphi(\alpha^k(z))]-(-1)^{Dy}(-1)^{y(D+x)}[\delta(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]-(-1)^{D(x+y)}(-1)^{yx}[\varphi(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),D(z)])=-\alpha((-1)^{yx}[\delta(x),\theta(\alpha^k(y)),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{Dx}(-1)^{yx}[\theta(\alpha^k(x)),\delta(y),\varphi(\alpha^k(z))]+(-1)^{D(x+y)}(-1)^{yx}[\theta(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)])=-(-1)^{yx}B(x,y,z)。$$

因此本定理成立。

推论 2　若 δ 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 θ – 导子,D 是关于 δ 的广义 θ – 导子,当且仅当 δ 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan$\theta$ – 导子时,D 是关于 δ 的广义 Jordanθ – 导子,且 $\forall x,y,z\in T$,

$$(-1)^{z(D+x)}[\theta(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),(D-\delta)(z)]+(-1)^{x(D+y)}[\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z)),(D-\delta)(x)]+(-1)^{y(D+z)}[\theta(\alpha^k(z)),\theta(\alpha^k(x)),(D-\delta)(y)]=0。$$

证明:必要性。若 δ 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 θ – 导子,D 是关于 δ 的广义 θ – 导子,则显然 δ 为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的 Jordan$\theta$ – 导子时,D 是关于 δ 的广义 Jordanθ – 导子。又由定理 4 知

$$(-1)^{zx}B(x,y,z)+(-1)^{xy}B(y,z,x)+(-1)^{yz}B(z,x,y)=0,$$

即得

$$(-1)^{z(D+x)}[\theta(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),(D-\delta)(z)]+(-1)^{x(D+y)}[\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z)),(D-\delta)(x)]+(-1)^{y(D+z)}[\theta(\alpha^k(z)),\theta(\alpha^k(x)),(D-\delta)(y)]=0。$$

充分性。若 D 为广义 Jordan θ – 导子时,则定理 4 的 1)和 2)成立。

$$(-1)^{zx}B(x,y,z)+(-1)^{xy}B(y,z,x)+(-1)^{yz}B(z,x,y)=\alpha((-1)^{zx}[\delta(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))]+(-1)^{zx}(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),\delta(y),\theta(\alpha^k(z))]+(-1)^{zx}(-1)^{D(x+y)}[\theta(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y)),D(z)])+\alpha((-1)^{xy}[\delta(y),\theta(\alpha^k(z)),\theta(\alpha^k(x))]+(-1)^{xy}(-1)^{Dy}[\theta(\alpha^k(y)),\delta(z),\theta(\alpha^k(x))]+(-1)^{xy}(-1)^{D(y+z)}[\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z)),D(x)])+\alpha((-1)^{yz}[\delta(z),\theta(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y))]+(-1)^{yz}(-1)^{Dz}[\theta(\alpha^k(z)),\delta(x),\theta(\alpha^k(y))]+(-1)^{yz}(-1)^{D(x+z)}[\theta(\alpha^k(z)),\theta(\alpha^k(x)),D(y)])=(-1)^{Dz}\alpha((-1)^{xz}(-1)^{Dz}[\delta(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))]+(-1)^{xy}(-1)^{Dy}[\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z)),$$

$\delta(x)]+(-1)^{yz}[\theta(\alpha^k(z)),\delta(x),\theta(\alpha^k(y))])+$
$(-1)^{Dx}\alpha((-1)^{xy}(-1)^{Dx}[\delta(y),\theta(\alpha^k(z)),$
$\theta(\alpha^k(x))]+(-1)^{yz}(-1)^{Dz}[\theta(\alpha^k(z)),$
$\theta(\alpha^k(x)),\delta(y)]+(-1)^{xz}[\theta(\alpha^k(x)),\delta(y),$
$\theta(\alpha^k(z))])+(-1)^{Dy}\alpha((-1)^{zy}(-1)^{Dy}[\delta(z),$
$\theta(\alpha^k(x)),\theta(\alpha^k(y))]+(-1)^{xz}(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),$
$\theta(\alpha^k(y)),\delta(z)]+(-1)^{xy}[\theta(\alpha^k(y)),\delta(z),$
$\theta(\alpha^k(x))])=0$。

由推论1可得出δ是θ-导子,再由定理4可得出当δ是θ-导子时,D是关于δ的广义θ-导子。

利用定理4的证明方法可证明以下定理成立。

定理5 若δ为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_2$-导子,则$D$是关于$\delta$的广义$(\theta,\varphi)_2$-导子当且仅当$D$是关于$\delta$的广义Jordan $(\theta,\varphi)_2$-导子,且$\forall x,y,z\in T$,

$1)[\delta(x),\theta(\alpha^k(y)),(\varphi-\theta)(\alpha^k(z))]=$
$(-1)^{\delta x}[\theta(\alpha^k(x)),\delta(y),(\varphi-\theta)(\alpha^k(z))]$,
$2)(-1)^{zx}B'(x,y,z)+(-1)^{xy}B'(y,z,x)+$
$(-1)^{yz}B'(z,x,y)=0$,

其中

$B'(x,y,z)=\alpha([\delta(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))]+$
$(-1)^{Dx}[\theta(\alpha^k(x)),\delta(y),\varphi(\alpha^k(z))]+$
$(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)])$。

定理6 若δ为$[T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha]$的$(\theta,\varphi)_3$-导子,则$D$是关于$\delta$的广义$(\theta,\varphi)_3$-导子当且仅当$D$是关于$\delta$的广义Jordan $(\theta,\varphi)_3$-导子,且$\forall x,y,z\in T$,

$1)[\delta(x),(\theta-\varphi)(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))]=$
$(-1)^{\delta x}[(\theta-\varphi)(\alpha^k(x)),\delta(y),\theta(\alpha^k(z))]$,
$2)(-1)^{zx}B''(x,y,z)+(-1)^{xy}B''(y,z,x)+$
$(-1)^{yz}B''(z,x,y)=0$,

其中

$B''(x,y,z)=\alpha([\delta(x),\theta(\alpha^k(y)),\theta(\alpha^k(z))]+$
$(-1)^{Dx}[\varphi(\alpha^k(x)),\delta(y),\theta(\alpha^k(z))]+$
$(-1)^{D(x+y)}[\varphi(\alpha^k(x)),\varphi(\alpha^k(y)),D(z)])$。

注:推论2也可由定理5或定理6得出。当D是广义Jordanθ-导子时,则对$\forall x,y,z\in T$,有$B(x,y,z)=B'(x,y,z)=B''(x,y,z)$成立。

3 结 语

本文推广了李超三系的(广义)(θ,φ)-导子和(广义)Jordan(θ,φ)-导子的研究方法,研究Hom-李超三系的(广义)(θ,φ)-导子和(广义)Jordan(θ,φ)-导子,得出了关于Hom-李超三系的(广义)Jordan (θ,φ)-导子与(广义)(θ,φ)-导子之间的关系。

参 考 文 献:

[1] JACOBSON N. Lie and Jordan Triple Systems[J]. American Journal of Mathematics, 1949(71): 149.

[2] HODGE L T. PARASHALL J B. On the Representation Theory of Lie Triple Systems[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2002, 354(11): 4359.

[3] NAIATI A. On Generalized Jordan Derivations of Lie Triple Systems[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2010, 60(2): 541.

[4] NAJATI A. Generalized Derivations on Lie Triple Systems[J]. Results in Mathematics, 2009, 54(1/2): 143.

[5] NAJATI A. Jordan θ Derivations on Lie Triple Systems[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2009, 46(3): 435.

[6] OKUBO S. Parastatistics as Lie-supertriple Systems[J]. Journal of Mathematical Physics, 1994, 35(6): 2785.

[7] 腾文, 金久林, 游泰杰. 李超三系的线性形变与阿贝尔扩张[J]. 山东大学学报, 2021, 56(4): 14.
TENG Wen, JIN Jiusen, YOU Taijie. Linear Deformations and Abelian Extensions of Lie Supertriple Systems[J]. Journal of Shandong University, 2021, 56(4): 14.

[8] 赵冠华, 朱玉龙, 刘洁. 李超三系的形心及其性质[J].安徽大学学报, 2014, 38(3): 12.
ZHAO Guanhua, ZHU Yulong, LIU Jie. The Centroid of Lie Super Triple Systems and Its Properties[J]. Journal of Anhui University, 2014, 38(3): 12.

[9] ZHANG Qingcheng, WEI Zhu, CHU Yingna, et al. Supersymmetric Invariance and Universal Central Extensions of Lie Supertriple Systems[J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 34(2): 313.

[10] PENG Jianrong, CHEN Liangyun, SUN Bing. Centroids of Lie Supertriple Systems[J]. Advances in Mathematical Physics, 2015, 2015(1): 1.

[11] 唐鑫鑫, 刘宁, 张庆成. 李超三系上带有权λ的导子[J].吉林大学学报(理学版), 2017, 55(4): 797.

TANG Xinxin, LIU Ning, ZHANG Qingcheng. Derivations of Weight λ on Lie Supertriple Systems[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2017, 55(4): 797.

[12] WANG Shengxiang, ZHANG Xiaohui, GUO Shuangjian. Derivations and Deformations of Jordan Lie Supertriple Systems[J]. Advances in Mathematical Physics, 2019(2019): 1.

[13] 马瑶, 陈良云, 刘东. 李超三系的广义导子[J]. 数学学报, 2013, 56(6): 961.
MA Yao, CHEN Liangyun, LIU Dong. On Generalized Derivations of Lie Supertriple Systems [J]. Acta Mathematica Sinica, 2013, 56(6): 961.

[14] 张庆成. 李 color 代数及其相关问题研究[D]. 长春: 东北师范大学, 2007.

[15] 张健, 曹燕. 李 Color 三系的广义导子[J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(6): 1403.
ZHANG Jian, CAO Yan. Generalized Derivations of Lie Color Systems[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2017, 55(6): 1403.

[16] ZHOU J, CHEN L Y, MA Y. Generalized Derivations of Hom-Lie Triple Systems[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2018, 41(2): 637.

[17] 孙冰. Hom – 型代数的导子、扩张及构造[D]. 长春: 东北师范大学, 2018.

[18] 周金森, 范广哲. Hom – 李超三系的广义导子[J]. 大学数学, 2016, 32(5): 18.
ZHOU Jinsen, FAN Guangzhe. Generalized Derivations of Hom-Lie Supertriple Systems [J]. College Mathematics, 2016, 32(5): 18.

[19] 曹燕, 张婉莹. 保积 Hom – 李 color 三系的广义导子[J]. 数学学报(中文版), 2023, 66(3): 425.
CAO Yan, ZHANG Wanying. Generalized Derivations of Multiplicative Hom-Lie Color Triple Systems[J]. Acta Mathematical Sinica: Chinese Series, 2023, 66(3): 425.

[20] 曹燕, 孙亚良. 保积 BiHom – 李 color 三系的广义导子[J]. 数学杂志, 2023, 43(6): 501.
CAO Yan, SUN Yaliang. Generalized Derivations of Multiplicative BiHom-Lie Color Systems[J]. Journal of Mathematics, 2023, 43(6): 501.

(编辑:温泽宇)