

引用格式:霍晓彤,王宏磊,吴开谔. Rotenberg 方程解对非光滑边界参数的连续依赖性[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2026, 53(4): 131-136.

HUO XiaoTong, WANG HongLei, WU KaiSu. The continuous dependence of the Rotenberg equation's solution on the parameters of non-smooth boundary[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science), 2026, 53(4): 131-136.

Rotenberg 方程解对非光滑边界参数的连续依赖性

霍晓彤 王宏磊 吴开谔*

(北京化工大学 数理学院, 北京 100029)

摘要: 在 L^1 空间上考虑带有非光滑边界条件的 Rotenberg 方程, 证明了方程的主算子是稠定的预解正算子, 进而得到其共轭算子定义域的正锥在全共轭空间的正锥中共尾, 由此证明了主算子所生成半群的谱界等于增长阶, 并进而证明了方程解对边界参数的连续依赖性。

关键词: Rotenberg 方程; 迁移算子; 共尾; 边界参数连续依赖性

中图分类号: O175. 21; O177. 92 **DOI:** 10. 13543/j. bhexbzr. 2026. 04. 015

引言

Rotenberg^[1]于 1983 年引入如下的积-微分方程描述了种群细胞的生长

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mu, v, t) = -v \frac{\partial \psi}{\partial \mu}(\mu, v, t) - \sigma(\mu, v(\psi)\mu, v, t) + \\ \int_a^b r(\mu, v, v'(\psi)\mu, v', t) dv' \\ \psi(\mu, v, 0) = \psi_0(\mu, v) \\ \psi(0, v, t) = (H\psi)(1, v, t) \end{cases} \quad (1)$$

式中, 变量 $\mu \in (0, 1)$ 表示细胞成熟度, $\mu = 0$ 表示细胞出生, $\mu = 1$ 表示细胞凋亡; 变量 $v = \frac{d\mu}{dt} \in (a, b)$ ($0 \leq a < v < b \leq +\infty$) 表示细胞的成熟速率; 未知函数 $\psi(\mu, v, t)$ 表示在 t 时刻成熟度为 μ 、成熟速率为 v 的细胞种群密度; 函数 $r(\mu, v, v')$ 表示成熟度为 μ 的种群细胞成熟速率由 v 转变为 v' 的速率; 函数 $\sigma(\mu, v)$ 表示种群细胞的总转变截面, 具体表达

式为^[1]

$$\sigma(\mu, v) = \int_a^b r(\mu, v, v') dv' \in L_\infty[(0, 1) \times (a, b)]$$

边界条件中的算子 H 是一个正的线性算子, 根据不同种群细胞的遗传规律, H 有不同的数学表示式, 常见的有非局部边界条件、积分边界条件以及非光滑边界条件等。

方程(1)是一类 Boltzmann 方程, 其研究对于其他 Boltzmann 型方程具有重要的参考价值, 如线性中子输运方程、大气辐射转移方程等。因此, 方程(1)引起了广泛的关注并产生了大量的相关研究成果。Boulanouar^[2-3]研究了方程的主算子生成半群及谱分析的相关问题, Jeribi 等^[4]研究了 Rotenberg 方程主算子生成 C_0 半群及半群的不可约性, 从而得到主算子的谱由至多有限离散本征值组成等结果。Boulanouar^[2]证明了 Rotenberg 方程是全局稳定的, 并证明了生成半群的正则性和不可约性。Lebowitz 等^[5]证明了若边界算子正则, 其方程主算子生成的半群不可约。吴红星等^[6]考虑了无碰撞项的模型并在 L^p 空间上得到了本质谱稳定的结论。王胜华等^[7-8]考虑去除方程的积分项, 讨论了方程主算子的谱及占优本征值的存在性。Boulanouar^[9-10]考虑带有积分边界条件的结构化 Rotenberg 方程, 得到了方程主算子生成半群的不可约性以及方程解的渐进性, 之后吴红星等^[11]将上述结果推广到 L^p 空

收稿日期: 2024-12-24

第一作者: 男, 1999 年生, 硕士生

* 通信联系人

E-mail: wuks@mail. buct. edu. cn

间上去。

不同情况的边界算子 H 表示细胞在分裂和成长过程中出现的不同生物遗传规则,在数学上表示不同的转移规则。实际上对于不同的边界条件模型结果也有所不同,例如如下所示的非局部边界条件^[2]

$$\psi(0, v, t) = \alpha\psi(1, v, t) + \frac{\beta}{v} \int_a^b k(v, v') \psi(1, v', t) v' dv'$$

其中的正核函数 $k(v, v')$ 为有界可测函数,并且满足归一化条件

$$\int_a^b k(v, v') dv = 1$$

以及如下所示的积分边界条件^[8-9]

$$h(v) \psi(0, v, t) = p \int_a^b k(v, v') h(v') \psi(1, v', t) dv'$$

上述列出的边界条件对应不同的生物学转移规则,考虑的现实因素侧重点也不尽相同,所以不同边界条件中参数的含义也有差别。例如非光滑边界条件考虑到细胞分裂中环境等因素导致子细胞变异的情况,将继承亲代细胞周期 v 的子细胞个数记为 α ,变异细胞成熟速率 v' 的子细胞个数记为 β 。事实上在种群细胞增殖的过程中伴随着细胞凋亡,但这部分死亡细胞并不会考虑进 $\sigma(\mu, v)$ 中,而是会计入边界条件的参数当中;另外在具体应用中,这些参数有时需要实验测定(如细胞分裂指数法测绘细胞繁殖曲线),有时需要做理论估计。考虑到上述两种情况,参数的变化对解的影响需加以注意。这也正是本文研究的主要动机。

本文研究具有如下形式的非局部边界条件^[12-13]的 Rotenberg 方程

$$(H_\beta \psi)(1, v, t) = \frac{\beta}{v} \int_a^b k(v, v') \psi(1, v', t) v' dv'$$

式中 β 表示能够分裂的每一有丝分裂子细胞的平均数, $\beta = 1$ 保证了细胞通量的连续性。记正核函数 $k(v, v')$ 的本性上确界为 $\tilde{k}$ 。

1 空间与算子

本节将给出工作空间,并给出所研究的 Rotenberg 方程主算子的定义。

定义空间 $X = L^1([0, 1] \times [a, b]; d\mu dv)$, 用 X^* 表示 X 的共轭空间, $X_+ = \{\varphi \in X | \varphi \geq 0\}$ 表示 X 的正锥。

定义边界空间如下。

$$X^0 = L^1(\{0\} \times [a, b]; v dv)$$

$$X^1 = L^1(\{1\} \times [a, b]; v dv)$$

定义 Sobolev 空间

$$W = \left\{ \varphi \in X \left| v \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \in X \right. \right\}$$

边界算子定义为

$$H_\beta: X^1 \rightarrow X^0 \quad \varphi^1 \rightarrow \varphi^0 = H_\beta \varphi^1$$

其中, $\varphi^0 = \varphi(0, v, t)$, $\varphi^1 = \varphi(1, v, t)$ 表示函数的边值。

定义算子 A_β 为

$$A_\beta \varphi = -v \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(\mu, v, t)$$

定义域 $D(A_\beta) = \{\varphi \in W | \varphi^0 = H_\beta \varphi^1\}$ 。

流算子定义为

$$B\varphi = A_\beta \varphi - \sigma(\mu, v) \varphi(\mu, v, t)$$

其中, $D(B_\beta) = D(A_\beta)$ 。

定义碰撞算子

$$C\varphi = \int_a^b k(\mu, v, v') \varphi(\mu, v', t) dv'$$

则 Rotenberg 方程的主算子为 $P = B_\beta + C$ 。

定义域 $D(P) = D(B_\beta) = D(A_\beta)$ 。

于是,方程(1)可以转化为如下的 Cauchy 问题。

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mu, v, t) = P\psi \\ \psi(\mu, v, 0) = \psi_0(\mu, v) \end{cases} \quad (2)$$

2 算子的性质

定义 1^[14] 若 X 中的元素 x, y 满足 $x - y \in X_+$ 就称 $x \geq y$, 这样的关系“ $\geq$ ”为一种序关系。

定义 2^[14] 对 E 的某个子集 C 满足对任意 $f \in E$, 存在 $g \in C$, 使得 $f \leq g$, 则称 E 的子集 C 在 E 中共尾。

定理 1 算子 A_β 是闭稠定算子。

证明: 注意到 A_β 是微分算子, 显然是闭算子。

下面证明 $D(A_\beta) = X$ 。

对 $\forall \psi \in X$, 存在 $D(A_\beta)$ 中的函数列 ψ_n 满足 $(H_\beta \psi_n)(1, v) = \psi_n(0, v)$, 首先取 ψ_n 为如下形式。

$$\psi_n = \begin{cases} 0, & 0 < \mu < \frac{1}{n} \\ \psi(\mu, v), & \frac{1}{n} \leq \mu < 1 - \frac{1}{n} \\ 0, & 1 - \frac{1}{n} \leq \mu < 1 \end{cases}$$

$$J_{\varepsilon} \psi_n(\mu, v) = (j_{\varepsilon} \psi_n)(\mu, v) = \int_{\mathbb{R}^n} j_{\varepsilon}(\mu - \gamma) \psi_n(\gamma, v) d\gamma$$

这里 J_{ε} 为磨光算子, 取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, 则

$$\psi_{nn} = J_{\varepsilon} \psi_n(\mu, v)$$

为一列光滑函数, 显然 $\psi_{nn} \in D(A_{\beta})$, 并且利用磨光性有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_{nn} - \psi_n\| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|\psi_{nn} - \psi_n\|_{L^1} = 0$$

那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_{nn} - \psi\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n - \psi_{nn}\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n - \psi\| = 0$$

证毕。

定理2 算子 A_{β} 是预解正算子。

证明: 对任意给定的 $g(\mu, v, t) \in X$, 算子 A_{β} 的预解方程为

$$(\lambda I - A_{\beta})\psi = g$$

求解上述方程可以得到

$$\psi(\mu, v, t) = \psi(0, v, t) e^{-\frac{\lambda \mu}{v}} + \frac{1}{v} \int_0^{\mu} g(\mu', v, t) \cdot e^{-\frac{\lambda(\mu' - \mu)}{v}} d\mu' \quad (3)$$

取 $\mu = 1$, 则式(3)变为

$$\psi(1, v, t) = \psi(0, v, t) e^{-\frac{\lambda}{v}} + \frac{1}{v} \int_0^1 g(\mu', v, t) \cdot e^{-\frac{\lambda(\mu' - 1)}{v}} d\mu' \quad (4)$$

定义如下算子。

$$E_{\lambda} \varphi = \varphi(0, v, t) e^{-\frac{\lambda \mu}{v}}$$

$$F_{\lambda} g = \frac{1}{v} \int_0^{\mu} g(\mu', v, t) e^{-\frac{\lambda(\mu' - \mu)}{v}} d\mu'$$

$$G_{\lambda} \varphi = \varphi(0, v, t) e^{-\frac{\lambda}{v}}$$

$$K_{\lambda} g = \frac{1}{v} \int_0^1 g(\mu', v, t) e^{-\frac{\lambda(\mu' - 1)}{v}} d\mu'$$

对 $\forall \operatorname{Re} \lambda > 0$ 利用 Hölder 不等式可以证明算子 E_{λ} 、 F_{λ} 、 G_{λ} 、 K_{λ} 是有界正算子^[12], 并且 $\|E_{\lambda}\| \leq$

$$\frac{b}{\operatorname{Re} \lambda}, \|F_{\lambda}\| \leq \frac{b-a}{\operatorname{Re} \lambda}, \|G_{\lambda}\| \leq b e^{-\frac{\operatorname{Re} \lambda}{b}}, \|K_{\lambda}\| \leq b-a。$$

那么式(3)、(4)可以简化为

$$\psi = E_{\lambda} H \psi^1 + F_{\lambda} g \quad (3')$$

$$\psi^1 = G_{\lambda} H \psi^1 + K_{\lambda} g \quad (4')$$

记 $\lambda_0 = b \ln(\beta k b(b-a))$, $\operatorname{Re} \lambda > \max\{\lambda_0, 0\}$ 时 $G_{\lambda} H$ 一致有界。由此利用式(3')与(4')及边界条件可得

$$\psi^1 = (I - G_{\lambda} H)^{-1} K_{\lambda} g$$

$$\psi = E_{\lambda} H (I - G_{\lambda} H)^{-1} K_{\lambda} g + F_{\lambda} g$$

因此

$$(\lambda I - A_{\beta})^{-1} = E_{\lambda} H (I - G_{\lambda} H)^{-1} K_{\lambda} + F_{\lambda} = \sum_{n \geq 0} E_{\lambda} H (G_{\lambda} H)^n K_{\lambda} + F_{\lambda} \quad (5)$$

当 $\operatorname{Re} \lambda > \max\{\lambda_0, 0\}$, 式(5)中的每一项都是正的。 L^1 空间中的函数范数 $f(x, y)$ 定义如下: 若 $f(x, y) \in L^1([x_1, x_2] \times [y_1, y_2])$, 则

$$\|f\| = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)| dx dy$$

根据 L^1 空间中范数的定义

$$\|\psi(\mu, v, t)\| = \int_0^1 \int_a^b |\psi(\mu, v, t)| d\mu dv \leq \int_0^1 \int_a^b \left| \left(\sum_{n \geq 0} E_{\lambda} H (G_{\lambda} H)^n K_{\lambda} \right) g \right| d\mu dv + \int_0^1 \int_a^b |F_{\lambda} g| d\mu dv$$

由此当 $\operatorname{Re} \lambda > \max\{\lambda_0, 0\}$ 时有^[12]

$$\|E_{\lambda} H\| \leq \frac{\beta b(b-a)}{\lambda}, \|G_{\lambda} H\| \leq c < 1$$

那么可以估算得到

$$\|\psi(\mu, v, t)\| \leq \frac{b-a}{\lambda} \left(\frac{b\beta}{1-c} (b-a) + 1 \right) \|g\| \quad (6)$$

即当 $\lambda > 0$ 时, 算子 $(\lambda I - A_{\beta})$ 可逆, 并且其逆算子有界, 所以 A_{β} 是预解正算子。

证毕。

另外记 $B_{\beta} = A_{\beta} - \Sigma$, 其中算子 Σ 是如下的乘法算子

$$\begin{cases} \Sigma \psi = \sigma(\mu, v) \psi(\mu, v, t) \\ D(\Sigma) = D(A_{\beta}) \end{cases}$$

根据 $\sigma(\mu, v)$ 实际生物学意义, $\sigma \leq \sigma(\mu, v) \leq \bar{\sigma}$, 即乘法算子 Σ 是正的有界算子。考虑到

$$\lambda I - P = \lambda I - (A_{\beta} - \Sigma + C) = (\lambda I - A_{\beta}) + (\Sigma + C)$$

其中 $\Sigma + C$ 是有界正算子, 由 A_{β} 是预解正算子可知主算子 P 是预解正算子。

定理3 A_{β} 的共轭算子 A_{β}^* 存在, 并且 $A_{\beta}^* \varphi = v \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$, 其中该共轭算子的定义域为

$$D(A_{\beta}^*) = \left\{ \varphi \left| v \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \in X, \varphi(1, v', t) = \int_a^b \beta k(v, v') \varphi(0, v, t) dv \right. \right\}$$

证明: $\forall \psi \in D(A_\beta), \forall \varphi \in D(A_\beta^*)$ 有

$$\langle A_\beta \psi, \varphi \rangle = \int_a^b \int_0^1 -v \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \cdot \varphi dv d\mu =$$

$$\int_a^b -v \left[\psi \varphi|_0^1 - \int_0^1 \psi \cdot v \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu \right] dv$$

代入边界条件有

$$\int_a^b -v [\psi \varphi]|_0^1 dv = \int_a^b -v [\psi(1, v) \varphi(1, v) -$$

$$\frac{\beta}{v} \varphi(0, v) \int_a^b k(v, v') \psi(1, v') v' dv'] dv =$$

$$\int_a^b v' \psi(1, v') \left[-\varphi(1, v') + \int_a^b \beta k(v, v') \varphi(0, v) dv \right] dv'$$

根据 v 及 ψ 的任意性可取

$$\varphi(1, v', t) = \int_a^b \beta k(v, v') \varphi(0, v, t) dv$$

此时 $\langle A_\beta \psi, \varphi \rangle = \langle \psi, A_\beta^* \varphi \rangle$ 。证毕。

定理 4 $D(A_\beta^*)_+$ 在 X_+^* 中共尾, 其中 $D(A_\beta^*)_+ = X_+^* \cap D(A_\beta^*)$ 表示 A_β 共轭算子定义域的正锥。

证明: 根据定理 3,

$$D(A_\beta^*) = \left\{ \varphi | v \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \in X, \varphi(1, v', t) = \right.$$

$$\left. \beta \int_a^b k(v', v) \varphi(0, v, t) dv \right\}$$

取 $\varphi(\mu, v, t) \in X_+^*$, 和

$$g(\mu, v) = M \left(\int_a^b \beta k(v, v') \varphi(0, v) e^{-\lambda(1-\mu)} dv + \right.$$

$$\left. \int_\mu^1 e^{-\lambda(\mu'-\mu)} d\mu' \right)$$

其中, $M = \|\varphi\| + \frac{1}{\|\varphi\|}$ 。首先验证 $g \in D(A_\beta^*)_+$ 。通

过简单计算可知

$$v \frac{\partial g}{\partial \mu} \in L^\infty$$

并且

$$(1, v, t) = M \varphi(1, v, t) = M \int_a^b \beta k(v, v') g(0, v, t) dv$$

而 $g(\mu, v, t) > 0$, 所以 $g \in D(A_\beta^*)_+$, 并且 $\varphi \leq g$, 所以结论成立。

由 $D(A_\beta) = D(B_\beta)$ 可得 $D(A_\beta^*)_+ = D(B_\beta^*)_+$ 。根据定理 4 可知 $D(B_\beta^*)_+$ 在 X_+^* 中共尾, 即对 $\forall \varphi \in X_+^*$, 存在 $g \in D(B_\beta^*)_+$, 有 $\varphi \leq g$ 。又因为 C 是一个正的有界算子, 那么存在 $f \in D((P)^*)_+$, 使得 $g \leq f$ 。则对

$\forall \varphi \in X_+^*$, 存在 $f \in D((P)^*)_+$, 有 $\varphi \leq g \leq f$ 。根据共尾的定义可知 $D((P)^*)_+$ 在 X_+^* 中共尾。结合 P 是预解正算子的结论可以得到下面的定理。

定理 5 Rotenberg 方程 (1) 的主算子 P 是一个正的 C_0 半群的生成元, 并且满足 $s(P) = w(P)$, 其中 $s(P) = \inf \{ w \in \mathbb{R} | (w, \infty) \subset \rho(P), \forall \lambda > w, R(\lambda; P) \geq 0 \}$ 表示算子的谱界, $w(P) = \inf \{ w \in \mathbb{R} | \exists M \geq 1, \text{使得} \forall t \geq 0, \|T(t)\| \leq M e^{wt} \}$ 表示算子的增长阶。

定理 6 当 $\beta_1 \rightarrow \beta_2$ 时,

$$\|R(\lambda, A_{\beta_1}) - R(\lambda, A_{\beta_2})\| \rightarrow 0$$

证明: 由式 (5) 可得

$$\psi_{\beta_1}(\mu, v) - \psi_{\beta_2}(\mu, v) = \left(\sum_{n \geq 0} E_\lambda H (G_\lambda H)^n k_\lambda \right)_{\beta_1} g - \left(\sum_{n \geq 0} E_\lambda H (G_\lambda H)^n k_\lambda \right)_{\beta_2} g \quad (7)$$

类似于预解正算子的证明过程, 式 (7) 通过三角不等式可得

$$\| [R(\lambda, A_{\beta_1}) - R(\lambda, A_{\beta_2})] g(\mu, v) \| =$$

$$\| \psi_{\beta_1}(\mu, v) - \psi_{\beta_2}(\mu, v) \| =$$

$$\int_a^b \int_0^1 |\psi_{\beta_1}(\mu, v) - \psi_{\beta_2}(\mu, v)| d\mu dv \leq$$

$$2 \frac{b-a}{\lambda} \frac{b(\beta_1 - \beta_2)}{1-c} (b-a) \|g\|$$

由此可以看出当 $\beta_1 \rightarrow \beta_2$ 时, 有 $\| [R(\lambda, A_{\beta_1}) - R(\lambda, A_{\beta_2})] g(\mu, v) \| \rightarrow 0$ 。考虑到 g 是任意的, 那么结论成立。

证毕。

定理 7 (I) 当 $\beta_1 \rightarrow \beta_2$ 时,

$$\|R(\lambda, B_{\beta_1} + C) - R(\lambda, B_{\beta_2} + C)\| \rightarrow 0$$

(II) Rotenberg 方程 (1) 的解对边界参数 β 连续依赖。

证明: (I) 已知算子 $\Sigma + C$ 是有界正算子, 那么存在 $M > 0$ 使得 $\|\Sigma + C\| \leq M$ 。

因此当 $\lambda > (b-a)M \left(\frac{b\beta}{1-c} (b-a) + 1 \right)$ 时, 有

$$\|(\lambda I - A_\beta)^{-1}\| \leq \frac{b-a}{\lambda} M \left(\frac{b\beta}{1-c} (b-a) + 1 \right) < 1$$

令

$$\sum_{n=0}^N \left\| \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n - \left[(\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n \right\| = \sum_{n=0}^N \|a_n\|$$

$\forall \varepsilon_n > 0, \exists \delta_n > 0$, 当 $|\beta_1 - \beta_2| < \delta_n (n = 1, 2, \dots, N)$

时,有

$$n = 0, \|a_0\| = 0;$$

$$n = 1,$$

$$\|a_1\| = \left\| (\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) - (\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right\| \leq$$

$$\left\| (\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} - (\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} \right\| \|\Sigma + C\| < M\varepsilon = \varepsilon_1$$

假设当 $n = N - 1$ 时,

$$\|a_{N-1}\| = \left\| \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^{N-1} - \right.$$

$$\left. \left[(\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right]^{N-1} \right\| < \varepsilon_{N-1}$$

则当 $n = N$ 时,

$$\|a_N\| = \left\| \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^{N-1} \cdot \right.$$

$$\left. \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right] - \left[(\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right]^{N-1} \cdot \right.$$

$$\left. \left[(\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right] \right\| \leq \left\| \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^{N-1} \right\| \cdot$$

$$\left\| (\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} - (\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} \right\| \cdot \|\Sigma + C\| +$$

$$\left\| \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^{N-1} - \left[(\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right]^{N-1} \right\| \cdot$$

$$\left\| (\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right\| < \varepsilon_N$$

$$\text{取 } \frac{\varepsilon}{3(N-1)} = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\}, \delta_N = \min\{\delta_1,$$

$\delta_2, \dots, \delta_N\}$, 当 $|\beta_1 - \beta_2| < \delta$ 时

$$\sum_{n=0}^N \left\| \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n - \right.$$

$$\left. \left[(\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n \right\| < (N-1) \frac{\varepsilon}{3(N-1)} = \frac{\varepsilon}{3}$$

根据数学归纳法, 对任意正整数 $n \leq N$

$$\left\| \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n - \right.$$

$$\left. \left[(\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n \right\| \rightarrow 0$$

那么对上述 $\varepsilon > 0, \exists N$ 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left\| \left[(\lambda I - A_{\beta})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n \right\| < \frac{\varepsilon}{6M_0}$$

$\exists \delta > 0$, 当 $|\beta_1 - \beta_2| < \delta$ 时有

$$\left\| R(\lambda, B_{\beta_1} + C) - R(\lambda, B_{\beta_2} + C) \right\| =$$

$$\left\| (\lambda I - A_{\beta_1} + \Sigma + C)^{-1} - (\lambda I - A_{\beta_2} + \Sigma + C)^{-1} \right\| =$$

$$\left\| \left[I - (\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^{-1} (\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} - \right.$$

$$\left. \left[I - (\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right]^{-1} (\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} \right\| =$$

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n (\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} - \right.$$

$$\left. \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n (\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} \right\| \leq$$

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n \right\| \times$$

$$\left\| (\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} - (\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} \right\| +$$

$$\left\{ \sum_{n=0}^N \left\| \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n - \left[(\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n \right\| \right\} \times$$

$$\left\| (\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} \right\| + \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\| \left[(\lambda I - A_{\beta_1})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n \right\| + \right.$$

$$\left. \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\| \left[(\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} (\Sigma + C) \right]^n \right\| \right\} \times$$

$$\left\| (\lambda I - A_{\beta_2})^{-1} \right\| < \varepsilon$$

根据定理6可得结论成立;

(II) 由结论(I)知, Rotenberg方程(1)的主算子 P 的预解式对边界参数连续依赖, 所以主算子 P 生成的 C_0 正半群对边界参数连续依赖, 则迁移方程解对边界参数连续依赖。

证毕。

参考文献:

- [1] ROTENBERG M. Transport theory for growing cell populations [J]. Journal of Theoretical Biology, 1983, 103 (2): 181-199.
- [2] BOULANOUAR M. A mathematical study for a Rotenberg model [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 265: 371-394.
- [3] BOULANOUAR M. A model of proliferating cell populations with infinite cell cycle length: semigroup existence [J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2010, 109: 949-971.

- [4] JERIBI A, MEGDICHE H, MOALLA N. On a transport operator arising in growing cell populations II. Cauchy problem [J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2005, 28(2): 127–145.
- [5] LEBOWITZ J L, RUBINOW S I. A theory for the age and generation time distribution of a microbial population [J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1974, 1: 17–36.
- [6] 吴红星, 马江山. Rotenberg 模型中迁移半群的本征谱 [J]. *应用泛函分析学报*, 2014, 16(4): 315–321.
WU H X, MA J S. The essential spectrum of transport semigroup in Rotenberg model [J]. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 2014, 16(4): 315–321. (in Chinese)
- [7] 王胜华, 潘世富. 细菌种群中一类迁移算子的占优本征值问题 [J]. *上饶师范学院学报*, 2015, 35(6): 1–5.
WANG S H, PAN S F. Dominant eigenvalue's problem of a transport operators in bacterial population [J]. *Journal of Shangrao Normal University*, 2015, 35(6): 1–5. (in Chinese)
- [8] 王胜华, 吴红星. Rotenberg 模型中一类迁移算子的谱分析 [J]. *数学物理学报*, 2016, 36A(5): 821–831.
WANG S H, WU H X. Spectral analysis of a transport operators in Rotenberg model [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2016, 36A(5): 821–831. (in Chinese)
- [9] BOULANOUAR M. Mathematical analysis of structured bacterial population with aggregate transition rule (I) [J]. *Journal of Computational and Theoretical Transport*, 2015, 44: 175–197.
- [10] BOULANOUAR M. Mathematical analysis of structured bacterial population with aggregate transition rule (II) [J]. *Journal of Computational and Theoretical Transport*, 2015, 44: 69–93.
- [11] 吴红星, 程国飞, 王胜华. 细菌种群增生中 Rotenberg 模型解的渐近稳定性研究 [J]. *系统科学与数学*, 2020, 40(9): 1539–1549.
WU H X, CHENG G F, WANG S H. Asymptotic stability of Rotenberg model solutions in bacterial population growth [J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2020, 40(9): 1539–1549. (in Chinese)
- [12] 童雅阁, 吴开谔. 非光滑边界条件下具时滞的 Rotenberg 方程主算子的谱分析 [J]. *数学物理学报*, 2022, 42A(5): 1320–1331.
TONG Y G, WU K S. Spectral analysis of the main operator of Rotenberg equation with time delay under non-smooth boundary conditions [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2022, 42A(5): 1320–1331. (in Chinese)
- [13] 王胜华, 翁云芳, 阳名珠. 人体细胞增生中一类迁移算子的谱分析 [J]. *数学物理学报*, 2010, 30A(4): 1055–1061.
WANG S H, WENG Y F, YANG M Z. Spectrum analysis of transport operators in the growing cell populations [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2010, 30A(4): 1055–1061. (in Chinese)
- [14] ARENDT W. Resolvent positive operators [J]. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1987, 54(3): 321–349.

The continuous dependence of the Rotenberg equation's solution on the parameters of non-smooth boundary

HUO XiaoTong WANG HongLei WU KaiSu*

(College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: This paper investigates the Rotenberg equation with non-smooth boundary conditions in L^1 space. We prove that the main operator of the equation is densely defined and resolvent-positive. Furthermore, it is shown that the positive cone in the domain of its adjoint operator is cofinal within the positive cone of the entire adjoint space. Consequently, the spectral bound of the semigroup generated by the main operator is demonstrated to coincide with its growth order. Additionally, the continuous dependence of solutions on boundary parameters is rigorously established.

Key words: Rotenberg equation; transport operators; cofinal; boundary parameter continuous dependence

(责任编辑: 吴万玲)