

铰接杆系结构静力分析的力法 基本方程统一形式

张 沛^{1,2}, 冯 健^{2,3}, 周继凯¹, 尚志兵¹

(1. 河海大学 土木与交通学院, 南京 210098; 2. 东南大学 混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室, 南京 211189; 3. 东南大学 土木工程学院, 南京 211189)

摘 要:以力法分析为基础,从平衡方程增量形式出发,考虑初始内力的影响,结合变形协调条件和本构关系,推导了小变形、线弹性条件下铰接杆系结构静力分析基本方程。运用线性代数及广义逆矩阵理论,实现内力增量和坐标增量的解耦,最终得到的力法基本方程组由广义平衡方程和广义协调方程两部分组成,二者的系数矩阵互为转置,形式上与静定动定结构力法分析基本方程一致。当研究对象为静定动定结构时,该方程组退化为传统力法基本方程,故可将其视为传统力法考虑初始内力刚化效应的直接推广,适用于各类铰接杆系结构的小变形、线弹性静力分析,其计算精度随预应力水平及结构刚度的提高而增大。

关键词:铰接杆系结构;静力分析;初始内力;力法;广义逆

中图分类号:TU323 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5497(2025)07-2333-10

DOI:10.13229/j.cnki.jdxbgxb.20231088

Unified form of basic equations of force method for static analysis of pin-bar assemblies

ZHANG Pei^{1,2}, FENG Jian^{2,3}, ZHOU Ji-kai¹, SHANG Zhi-bing¹

(1. College of Civil and Transportation Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Key Laboratory of Concrete and Pre-stressed Concrete Structures of Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 211189, China; 3. School of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 211189, China)

Abstract: On the basis of linear elasticity hypothesis and force method, an analytic theory for static analysis of pin-bar assemblies is developed from the incremental form of equilibrium equations, where the effect of initial internal forces, the compatibility equations and constitutive equations are taken into account. Then the displacements and the increments of axial force are decoupled by using linear algebra and Moore-Penrose generalized inverse theory. The basic formulas proposed finally consists of two parts — generalized equilibrium equations and generalized compatibility equations, both of which have square coefficient

收稿日期: 2023-10-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51878147); 中国博士后科学基金项目(2020M671319); 江苏省博士后科研项目(2020Z317); 东南大学混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室开放课题项目(CPCSME2022-01).

作者简介: 张沛(1983-), 男, 副教授, 博士. 研究方向: 新型预应力空间结构. E-mail: zhangpei250131@163.com

通信作者: 周继凯(1970-), 男, 教授, 博士. 研究方向: 混凝土动态力学性能及混凝土结构基本理论.

E-mail: zhoujikaihu@hotmail.com

matrices of full rank being transposed with each other. In other words, they are formally consistent with the basic equations using in traditional force method, and will degenerate into the latter ones in dealing with the statically and kinematically determinate structures. Therefore, the proposed theory can be regarded as an extended version of the traditional force method considering the stiffening effect of initial internal forces, which is applicable to any pin-bar assemblies with small deformation and linear elasticity static structural analysis. Its calculation accuracy is increasing with the increment of prestress level and structural stiffness.

Key words: pin-bar assemblies; static analysis; initial internal force; force method; generalized inverse

0 引言

Pellegrino^[1]以结构的自应力模态数 s 和机构位移模态数 d 为依据,对铰接杆系结构作如下分类:(Ⅰ) $s=0, d=0$ 为静定动定体系;(Ⅱ) $s>0, d=0$ 为静不定动定体系;(Ⅲ) $s=0, d>0$ 为静定动不定体系;(Ⅳ) $s>0, d>0$ 为静不定动不定体系。

预应力杆系结构限定为第Ⅱ和第Ⅳ类结构。在第Ⅱ类结构中适当引入预应力,可提高其刚度,并保证构件在荷载态下始终处于线弹性范围^[2]。而对于第Ⅳ类结构,预应力的施加过程即结构的施工成型过程,故预应力是其保持形状并获取刚度的必要条件^[3,4]。即使是无法引入预应力的第Ⅲ类体系,即通常意义下的“机构”,在正交于机构位移模态的外荷载作用下,杆件获取一定的初始内力,仍可承受外界扰动,成为几何意义上相对稳定的结构^[5,6]。这与预应力使第Ⅳ类体系刚化的机理非常相似。以上各种情况的共同特点在于,无论是自应力还是外荷载引起的初始内力,都使得结构的静力特性发生了显著改变,初始内力对结构刚度的影响不可忽略,否则无法准确计算荷载态下的结构响应^[7]。

目前,静力分析考虑初始内力的方法主要有两种:一是在矩阵位移法的基础上引入几何刚度考虑初始内力的刚化作用,进而对结构的切线刚度矩阵进行修正,使其成为可逆矩阵^[8];二是在力法的基础上增设“几何力”向量,修正结构的平衡矩阵,使其满足行满秩条件^[1]。由于矩阵位移法的计算过程易于实现程序化,可以方便地通过迭代考虑结构的几何非线性,因而得到了广泛的应用。与矩阵位移法建立的刚度矩阵为对称稀疏阵不同,力法建立的平衡矩阵是非对称长方阵,求解所用的奇异值分解对存储量及计算量的要求远高于刚度矩阵的三角分解,故力法分析在电算方面具有一定劣势^[9],但其优点亦十分突出,即计算过

程可有效揭示结构的力学特征,如体系的静动定性、自应力模态及机构位移模态等^[10],因此力学概念十分清晰。

本文首先以力法分析为基础,考虑初始内力的影响,从铰接杆系结构的平衡方程增量形式出发,结合变形协调条件和材料本构关系,推导了小变形、线弹性条件下铰接杆系结构静力分析的基本方程;其次,运用线性代数及广义逆矩阵理论,实现内力增量和坐标增量的解耦,从而得到一组在形式上与静定动定结构力法分析基本方程完全一致的控制方程新形式;最后,讨论了本文方法与现有方法间的联系及各自的适用性,并通过若干算例予以验证。

1 静力分析基本方程

假定铰接杆系结构的总节点自由度为 b 、单元数为 m ,其节点平衡方程可写成^[1,10]:

$$An = q \quad (1)$$

式中: $A \in \mathbf{R}^{b \times m}$ 为平衡矩阵; $n \in \mathbf{R}^m$ 为单元轴力向量; $q \in \mathbf{R}^b$ 为节点荷载向量。

将单元 k 的内力和长度分别记作 n_k 和 l_k ,定义对角矩阵 $L = \text{diag}(l_1, \dots, l_m) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 为单元长度矩阵, $t = \{n_k/l_k\} \in \mathbf{R}^m$ 为力密度向量,则 n 可表示为:

$$n = Lt \quad (2)$$

代入式(1)可得:

$$(AL)t = q \quad (3)$$

对式(3)两边关于节点坐标求一阶变分,可得平衡方程的增量表达式为:

$$\delta(AL) \cdot t + AL \cdot \delta t = \delta q \quad (4)$$

首先考察式(4)等号左边的第1项 $\delta(AL) \cdot t$,注意到铰接杆系结构平衡方程的另一形式^[11]:

$$(AL) \cdot t = (I \otimes \Omega)x \quad (5)$$

式中: I 为2阶(对平面结构)或3阶(对空间结构)单位矩阵; $x \in \mathbf{R}^b$ 为节点坐标向量;符号 $\otimes$ 代表矩

阵的张量积; Ω 为对称矩阵。 Ω 的元素构成符合以下规则:若 $i=j$,则 Ω_{ij} 取汇交于节点 i 的所有单元力密度之和;若 $i \neq j$,且节点 i, j 之间有单元相连,则 Ω_{ij} 取该单元力密度的相反数。否则取0,即:

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} \sum_k t_{ik}, i=j \text{ 且节点 } i \text{ 与 } k \text{ 之间有单元相连} \\ -t_{ij}, i \neq j \text{ 且节点 } i \text{ 与 } j \text{ 之间有单元相连} \\ 0, \text{ 其他} \end{cases} \quad (6)$$

注意到 $\delta(AL)$ 可通过在 AL 中用坐标增量 δx 替代相应的坐标 x 得到,由式(5)可知:

$$\delta(AL) \cdot t = (I \otimes \Omega) \delta x \quad (7)$$

式中: $I \otimes \Omega$ 通常称为几何刚度矩阵,用符号 K_G 表示,则式(7)改写为:

$$\delta(AL) \cdot t = K_G \cdot \delta x \quad (8)$$

显然 K_G 为对称矩阵。

其次考察式(4)等号左边的第2项 $(AL) \cdot \delta t$:

$$AL \cdot \delta t = AL \cdot \delta(L^{-1}n) = AL \cdot \delta(L^{-1}) \cdot n + A \cdot \delta n \quad (9)$$

其中:

$$AL \cdot \delta(L^{-1}) \cdot n = -A \cdot \delta L \cdot t \quad (10)$$

定义力密度矩阵 $T = \text{diag}(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$,显然下式成立:

$$\delta L \cdot t = T \cdot \delta l \quad (11)$$

式中: δl 为单元长度向量。

故式(10)可以写成:

$$AL \cdot \delta(L^{-1}) \cdot n = -A \cdot T \cdot \delta l \quad (12)$$

由虚功原理可得无穷小节点位移向量 δx 与单元伸长量向量 $\delta l \in \mathbb{R}^m$ 之间的关系为:

$$A^T \delta x = \delta l \quad (13)$$

代入式(12)可得:

$$AL \cdot \delta(L^{-1}) \cdot n = -(ATA^T) \cdot \delta x \quad (14)$$

将式(14)代入式(9),则有:

$$AL \cdot \delta t = -(ATA^T) \cdot \delta x + A \cdot \delta n \quad (15)$$

将式(8)和式(15)一起代入式(4)可得:

$$A \cdot \delta n + (K_G - ATA^T) \cdot \delta x = \delta q \quad (16)$$

为方便起见,令

$$J = K_G - ATA^T \quad (17)$$

则式(16)可改写为:

$$A \cdot \delta n + J \cdot \delta x = \delta q \quad (18)$$

显然 J 为对称矩阵。

式(18)表明,铰接杆系结构通过两种模式共

同抵抗外荷载增量 δq :其一是单元内力发生微小变化,而结构位形不变时产生的抗力,对应于等式左边第1项;其二是结构位形发生微小变化,而单元内力不变时产生的抗力,对应于等式左边第2项(若结构内部无初始内力,则此项贡献为零)。

假定材料本构关系满足线弹性条件,单元 k 的杨氏模量和截面面积分别记为 E_k 和 A_k 。定义单元柔度矩阵 $F = \text{diag}(l_1/E_1 A_1, \dots, l_m/E_m A_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$,则有:

$$\delta l = e_0 + F \cdot \delta n \quad (19)$$

式中: e_0 为包括温度变形、装配误差在内的强制单元伸长量向量。

将式(19)代入式(13)可将变形协调方程与本构关系合并,即:

$$A^T \delta x = e_0 + F \cdot \delta n \quad (20)$$

式(20)与平衡方程式(18)一同构成了小变形、线弹性条件下铰接杆系结构静力分析的基本方程组,即:

$$\begin{cases} A \cdot \delta n + J \cdot \delta x = \delta q \\ A^T \delta x = e_0 + F \cdot \delta n \end{cases} \quad (21)$$

2 力法方程的统一形式

在式(21)中,内力增量 δn 与坐标增量 δx 相互耦合,不便于求解。为不失一般性,本节以第IV类结构——静不定动不定体系为例,运用线性代数及广义逆矩阵理论,实现 δn 和 δx 的解耦,得到一种形如传统力法基本方程的新形式。

通过奇异值分解可同时获得平衡矩阵 A 零空间及左零空间的基底^[12]。前者排列组成自应力模态矩阵 S ,满足 $AS=0$;后者排列组成机构位移模态矩阵 H ,满足 $A^T H=0$ 。由此可得变形协调方程式(20)有解的充要条件为:

$$S^T(e_0 + F \cdot \delta n) = 0 \quad (22)$$

在式(22)成立的前提下,解得:

$$\delta x = (A^T)^+(e_0 + F \cdot \delta n) + H\beta \quad (23)$$

式中: β 为机构位移模态组合系数向量;符号 $^+$ 代表矩阵的 Moore-Penrose 广义逆,满足以下关系^[13]:

$$(A^T)^+ = (A^+)^T \quad (24)$$

故式(23)可改写为:

$$\delta x = (A^+)^T(e_0 + F \cdot \delta n) + H\beta \quad (25)$$

将式(25)代入平衡方程增量表达式式(18),整理后可得:

$$[A + J(A^+)^T F] \cdot \delta n + JH\beta = \delta q - J(A^+)^T e_0 \quad (26) \quad \text{及} \quad B \overline{\delta n} = \overline{\delta q} \quad (40)$$

为方便起见,令

$$\hat{A} = A + J(A^+)^T F \quad (27)$$

同时用式(17)替换,则有:

$$JH = K_G H - A T A^T H = K_G H \quad (28)$$

将式(27)和式(28)代入式(26)可得:

$$\hat{A} \cdot \delta n + K_G H \beta = \delta q - J(A^+)^T e_0 \quad (29)$$

将式(29)与式(22)联立,可合并为以下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & K_G H \\ -S^T F & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta n \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta q - J(A^+)^T e_0 \\ S^T e_0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

另外,将平衡方程式(18)改写为:

$$A \cdot \delta n = \delta q - J \cdot \delta x \quad (31)$$

则式(31)有解的充要条件为:

$$H^T J \cdot \delta x = H^T \cdot \delta q \quad (32)$$

由于 J 为对称矩阵,则:

$$H^T J = (JH)^T = (K_G H)^T = H^T K_G \quad (33)$$

代入式(32)可得:

$$H^T K_G \cdot \delta x = H^T \cdot \delta q \quad (34)$$

在式(34)成立的前提下,解得:

$$\delta n = A^+ \cdot (\delta q - J \cdot \delta x) + S \alpha \quad (35)$$

式中: α 为自应力模态组合系数向量。

将式(35)代入变形协调关系式(20),整理后可得:

$$(A^T + F A^+ J) \delta x = F A^+ \delta q + e_0 + F S \alpha \quad (36)$$

由式(27)等式两边同时转置可知 $\hat{A}^T = A^T + F A^+ J$,故式(36)可进一步写成:

$$\hat{A}^T \delta x = F A^+ \delta q + e_0 + F S \alpha \quad (37)$$

同理,将式(37)与式(32)联立,合并为以下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}^T & -FS \\ H^T K_G & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F A^+ \delta q + e_0 \\ H^T \cdot \delta q \end{pmatrix} \quad (38)$$

比较式(30)和式(38)发现,二者的系数矩阵互为转置。用符号 B 表征式(30)的系数矩阵,即:

$$B = \begin{bmatrix} \hat{A} & K_G H \\ -S^T F & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

同时,令 $\overline{\delta n} = \begin{pmatrix} \delta n \\ \beta \end{pmatrix}$, $\overline{\delta x} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\overline{\delta q} = \begin{pmatrix} \delta q - J(A^+)^T e_0 \\ S^T e_0 \end{pmatrix}$, $\overline{\delta l} = \begin{pmatrix} F A^+ \delta q + e_0 \\ H^T \cdot \delta q \end{pmatrix}$, 则式(30)和式(38)可分别简记为:

$$B^T \overline{\delta x} = \overline{\delta l} \quad (41)$$

若平衡矩阵 A 的秩为 R_A , 则 B 为 $(b+m-R_A)$ 阶方阵,其子块 $K_G H$ 和 $-S^T F$ 均具有明确的物理意义:前者各列为独立机构位移模态引起的几何力向量;后者各行为独立自应力模态引起的单元伸长量向量(取负号)。当初始内力可刚化所有内部机构时,矩阵 B 为可逆矩阵,由式(40)和式(41)直接求解 $\overline{\delta n}$ 及 $\overline{\delta x}$,即可同时得到 δn 、 β 、 δx 和 α 的解。

需要说明的是,式(40)和式(41)在形式上与第 I 类结构——静定动定体系力法分析基本方程完全一致,因此可分别将其视为广义平衡方程(B 为广义平衡矩阵)和隐含线弹性本构关系的广义协调方程。由于其推导过程并未涉及第 IV 类结构的特殊性质,故同样适用于 I、II、III 类结构的小变形、线弹性静力分析。特别地,当研究对象为第 I 类结构时,矩阵 B 退化为平衡矩阵 A ,而 $\overline{\delta q}$ 和 $\overline{\delta l}$ 则分别退化成节点荷载向量 δq 和单元伸长量向量 δl 。此时,式(40)和式(41)各自退化为静定动定体系的平衡方程 $A \delta n = \delta q$ 和变形协调方程 $A^T \delta x = \delta l$ 。

3 与现有方法的联系

3.1 矩阵位移法

第 2 节在推导广义平衡方程式(40)时,从变形协调方程式(20)出发,试图用内力增量 δn 表示位移增量 δx 。当平衡矩阵 A 不满足行满秩条件时,式(23)给出了 δx 的通解;当 A 不满足列满秩条件时,还衍生出保证 δx 有解的关系式(22)。若反过来用 δx 表示 δn ,由于单元柔度矩阵 F 可逆,故 δn 必然有解:

$$\delta n = G(A^T \delta x - e_0) \quad (42)$$

式中: $G = F^{-1}$ 为单元刚度矩阵。将式(42)代入平衡方程式(18),整理后可得:

$$A \hat{G} A^T \cdot \delta x + K_G \cdot \delta x = \delta q + A G e_0 \quad (43)$$

式中: $\hat{G} = G - T$ 为对角矩阵; $A \hat{G} A^T$ 通常称为弹性刚度矩阵,记为 K_E ,则式(43)可进一步写成:

$$(K_E + K_G) \cdot \delta x = K \cdot \delta x = \delta q + A G e_0 \quad (44)$$

式中: K 为结构的切线刚度矩阵。式(44)即矩阵位移法的基本方程。

对于非线性较强的结构,可按以下步骤迭代求解:①依据当前位形下(记为第 i 步)的节点坐

标 x^i 形成切线刚度矩阵 K , 按式(44)求得节点位移 δx^i ; ②由 $x^{i+1} = x^i + \delta x^i$ 获得下一步(记为第 $i+1$ 步)的节点坐标, 并求解对应的切线刚度矩阵及节点不平衡力, 代入式(44)求节点位移 δx^{i+1} 。重复上述步骤直到节点不平衡力足够小, 满足预设的精度要求为止。本文以非线性矩阵位移法的数值结果为依据, 对力法分析的准确性进行评估。

3.2 矩阵力法

如第2节所述, 在满足式(22)的前提下, 变形协调方程式(20)中 δx 的解可由式(23)给出。将式(23)进一步写成:

$$\delta x = \underbrace{(A^T)^+ (e_0 + F \cdot \delta n)}_{\delta x^I} + \underbrace{H \beta^I + H \beta^{II}}_{\delta x^{II}} \quad (45)$$

式中: β^I 、 β^{II} 均为待定向量, 满足 $\beta^I + \beta^{II} = \beta$; δx^I 引起单元长度的变化, 文献[1]称之为“伸长位移”; δx^{II} 为无穷小机构变位, 并不导致单元长度的改变, 文献[1]中称之为“非伸长机构位移”。

如前所述, 式(18)等号左边第2项“ $J \cdot \delta x$ ”为微小节点位移 δx 引起的抗力, 亦被称为“几何力”^[1]。假定 δx^I 对此项的贡献可以忽略, 同时注意到式(28), 则式(18)可改写为:

$$\begin{aligned} A \cdot \delta n + J \cdot \delta x &\approx A \cdot \delta n + J \cdot \delta x^{II} \\ &= A \cdot \delta n + K_G H \beta^{II} = \delta q \end{aligned} \quad (46)$$

将式(46)与式(22)联立, 并写成如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} A & K_G H \\ -S^T F & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta n \\ \beta^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta q \\ S^T e_0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

由式(47)即可解得 δn 和 β^{II} 。

最后确定式(45)中 β^I (或 δx^I) 的解。由式(20)可知, $A^T(\delta x^I + \delta x^{II}) = e_0 + F \cdot \delta n$, 其中 $A^T \delta x^{II} = A^T H \beta^{II} = 0$, 故有:

$$A^T \delta x^I = e_0 + F \cdot \delta n \quad (48)$$

在式(46)两边同时左乘 H^T 可得:

$$H^T K_G H \beta^{II} = H^T \delta q \quad (49)$$

又因为 δx 满足式(34), 即:

$$H^T K_G \cdot (\delta x^I + H \beta^{II}) = H^T \cdot \delta q \quad (50)$$

则式(49)和式(50)相减有:

$$H^T K_G \delta x^I = (K_G H)^T \delta x^I = 0 \quad (51)$$

式中: 矩阵 $K_G H$ 各列为机构位移模态引起的几何力向量。这与文献[1]通过虚功原理推导的结果相一致。将式(51)与式(48)联立, 并写成如下矩阵形式:

$$[A \quad K_G H]^T \delta x^I = \begin{pmatrix} e_0 + F \cdot \delta n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

由式(52)可解得 δx^I 。

式(47)和式(52)共同构成了矩阵力法的基本方程组。通过前述推导可以看出, 矩阵力法忽略了“伸长位移” δx^I 引起的几何力, 故主要适用于“非伸长机构位移” δx^{II} 对几何力的贡献居于主导的情况, 第IV类结构——静不定动不定体系多属于此种情形。

4 算例分析

算例1^[1]: 某平面铰接体系由3根拉索组成, 如图1所示。假定材料弹模与单元截面积乘积为 1.836×10^4 N, 左右两端均为铰支座, 在自由节点1、2处各悬挂质量为 W 的重物。此时, 索段①沿左端支点向外滑移10 mm, 计算 $W=30$ N 和 $W=3000$ N 时的单元内力和节点位移。

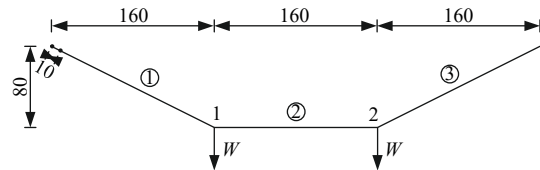


图1 3索段平面铰接体系

Fig. 1 A planar pin-jointed system with 3 cables

首先用本文方法进行求解, 根据平衡矩阵 A 的组成规则^[10], 结构初始态节点平衡方程可写作:

$$A n = q \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0.8944 & -1 & 0 \\ 0.4472 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.8944 \\ 0 & 0 & 0.4472 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ W \\ 0 \\ W \end{pmatrix}$$

式中: 平衡矩阵 A 的秩为3。由体系分析可知 $s=0$, $d=1$, 属静不定动不定结构。通过对矩阵 A 做奇异值分解可求得唯一机构位移模态为:

$$H = [0.3162 \quad -0.6325 \quad 0.3162 \quad 0.6325]^T$$

由于 A 满足列满秩条件, 故单元初始内力可直接由平衡矩阵解得:

$$n = A^+ q = \begin{pmatrix} 2.236W \\ 2W \\ 2.236W \end{pmatrix}$$

进一步求得力密度向量为:

$$t = L^{-1} n = 0.0125W [1 \quad 1 \quad 1]^T$$

几何刚度矩阵 K_G 按下式计算:

$$K_G = \begin{bmatrix} t_1 + t_2 & -t_2 \\ -t_2 & t_2 + t_3 \end{bmatrix} \otimes I_{2 \times 2}$$

则有:

$$K_G H = 0.003\,953 W [-1\ 6\ -1\ -6]^T$$

将 A 、 T 、 K_G 一并代入式(17)可得 J 。随后组装单元柔度矩阵,并将 F 与 J 代入式(27)可得 $\hat{A}$ 。

当 $W=30\text{ N}$ 时,广义平衡矩阵 B 可通过式(39)求得:

$$B = [\hat{A}\ K_G H] \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.892\,8 & -1.001\,6 & -0.001\,6 & 0.118\,6 \\ 0.452\,1 & 0.003\,3 & 0.001\,6 & -0.711\,5 \\ 0.001\,6 & 1.001\,6 & -0.892\,8 & 0.118\,6 \\ 0.001\,6 & 0.003\,3 & 0.452\,1 & 0.711\,5 \end{bmatrix}$$

不难验证, B 为可逆矩阵,而机构位移模态 H 与节点荷载向量 q 正交。这表明在正交于机构位移模态的外荷载作用下,通常意义下的“机构”被刚化,成为相对稳定且具有一定承载力的“结构”。

此时,索段①向外滑移 10 mm 引起强制单元伸长量 $e_0 = [-10\ 0\ 0]^T$,节点荷载增量 $\delta q = 0$,则广义节点荷载向量和广义单元伸长量向量分别为:

$$\overline{\delta q} = \delta q - J(A^+)^T e_0 = [-1.68\ 5.03\ 1.68\ 1.68]^T$$

$$\overline{\delta l} = \begin{pmatrix} FA^+ \delta q + e_0 \\ H^T \cdot \delta q \end{pmatrix} = [-10\ 0\ 0\ 0]^T$$

由式(40)和式(41)分别解得:

$$\overline{\delta n} = \begin{pmatrix} \delta n \\ \beta \end{pmatrix} = B^{-1} \overline{\delta q} = \begin{pmatrix} 7.621\,2 \\ 8.198\,5 \\ 7.044\,6 \\ -2.174\,5 \end{pmatrix}$$

及

$$\overline{\delta x} = \delta x = (B^T)^{-1} \overline{\delta l} \Rightarrow \delta x = [-5.193\,0\ -11.808\,7\ -55.121\,5\ -10.089\,6]^T$$

采用同样步骤亦可求得 $W=3\,000\text{ N}$ 时的结构响应。与此同时,分别运用第3节所述矩阵位移法迭代步骤及矩阵力法对同一问题进行求解,计算结果见表1和表2。

表1 算例1单元内力

Table 1 Internal forces of element in example 1 N					
外荷载	单元号	初始内力 n	内力增量 δn		
			矩阵位移法	矩阵力法	本文方法
$W=30\text{ N}$	①	67.082 0	9.431 1	0	7.621 2
	②	60	10.113 1	0	8.198 5
	③	67.082 0	8.927 3	0	7.044 6
$W=3000\text{ N}$	①	6 708.2	259.777 8	0	256.075 8
	②	6 000	259.930 3	0	255.766 9
	③	6 708.2	207.046 3	0	201.453 9

表2 算例1节点位移

Table 2 Displacements of nodes in example 1 mm

外荷载	节点号	位移 δx	矩阵位移法	矩阵力法	本文方法
$W=30\text{ N}$	节点1	X向分量	-5.163 6	-5.160 2	-5.193 0
		Y向分量	-12.331 6	-12.040 4	-11.808 7
	节点2	X向分量	-5.082 1	-5.160 2	-5.121 5
		Y向分量	-10.869 5	-10.320 3	-10.089 6
$W=3\,000\text{ N}$	节点1	X向分量	-6.009 3	-5.160 2	-6.000 0
		Y向分量	-4.697 4	-12.040 4	-4.781 7
	节点2	X向分量	-3.751 8	-5.160 2	-3.771 1
		Y向分量	-3.116 0	-10.320 3	-3.153 2

从表2中可以看出,当 $W=30\text{ N}$ 时,3种方法所得结果差别不大。然而,当 $W=3\,000\text{ N}$ 时,本文方法与非线性矩阵位移法吻合良好;矩阵力法的计算结果与 $W=30\text{ N}$ 时完全一样,误差较大。这是因为运用矩阵力法求解此问题时,式(47)退化为:

$$[A\ K_G H] \begin{pmatrix} \delta n \\ \beta \end{pmatrix} = \delta q$$

当 $\delta q=0$ 时,由上式解得 $\delta n=0, \beta=0$ (即 $\delta x=\delta x^I$),代入式(52)可得:

$$[A\ K_G H]^T \delta x = \begin{pmatrix} e_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由此解得 δx ,与初始荷载 W 的大小无关。

事实上,在节点1、2处悬吊重物将索段张紧,若悬吊物较轻,则其引起的弹性变形可以忽略,计算模型简化为3根刚性杆件组成的机构(见图2)。此时,索段①向外滑移仅引起节点1、2的变位,在杆件内部并不产生内力,这与矩阵力法的计算假定相符。然而当悬吊物较重时,将阻止索段①向支座外侧自由滑移,进而引起显著的弹性变形和内力变化。此时,图2给出的计算模型无法准确反映问题的实质,故矩阵力法不再适用。

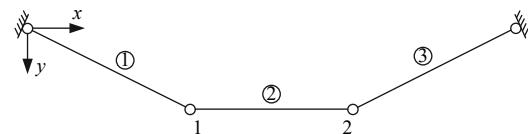


图2 矩阵力法计算模型

Fig. 2 Computational model used in matrix force method

算例2:图3所示棱台形预应力索杆结构由4根压杆(见图中粗实线)和8根拉索(见图中细实线)组成;该结构上层4节点自由,下层4节点铰支,结构总自由度数为12。计算表明,其平衡矩阵 A 的秩为11。由体系分析可知 $s=1, d=1$,属

第Ⅳ类结构,施加预应力可使内部机构刚化。将归一化的自应力模态乘以预应力水平系数 ϵ (本例取 $\epsilon=8\,000\text{ N}$),可确定预应力分布^[14]。假定材料弹模与单元截面积的乘积对拉索取 $1.836\times 10^4\text{ N}$,对压杆取 $5.796\times 10^6\text{ N}$,分别考察以下两

种工况。

工况 1:在该结构的自由节点上分别施加 4 个竖直向下的集中荷载,如图 3(b)所示。

工况 2:在原结构的基础上增设 4 道拉索,如图 4 所示。假定新增拉索的索长可通过花篮螺栓调节,现将它们同时缩短 10 mm。

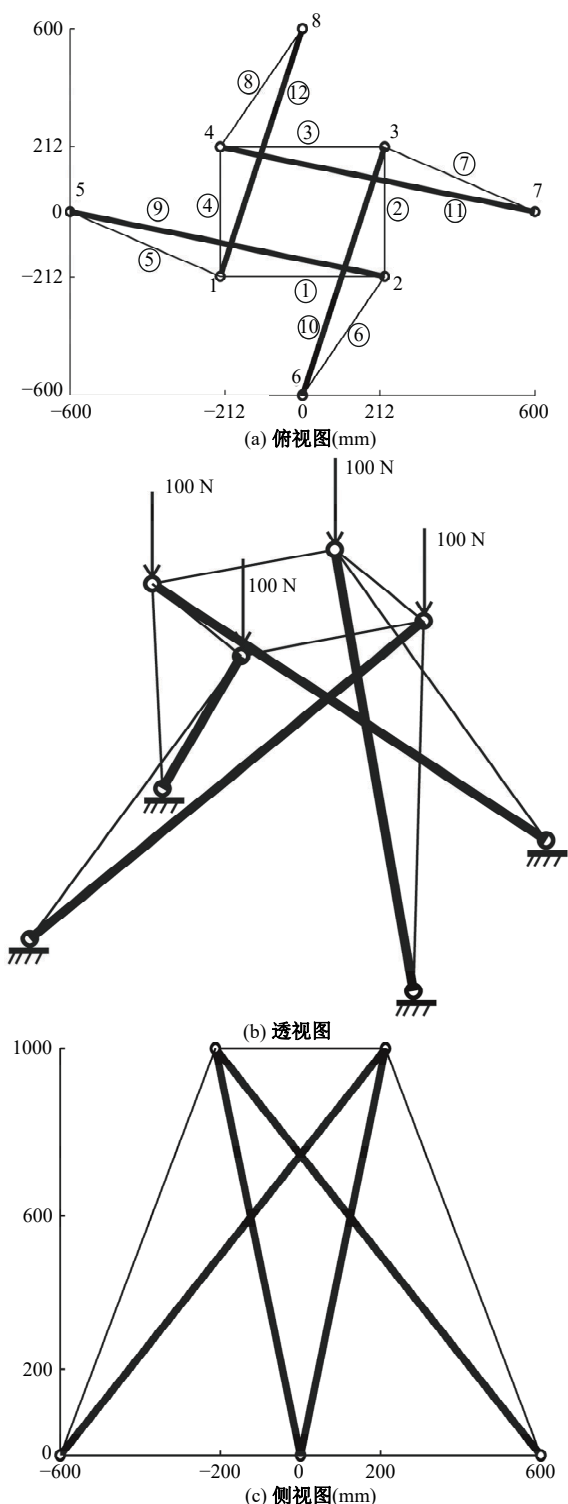


图 3 12 单元预应力索杆结构

Fig. 3 A prestressed cable-strut structure with 12 members

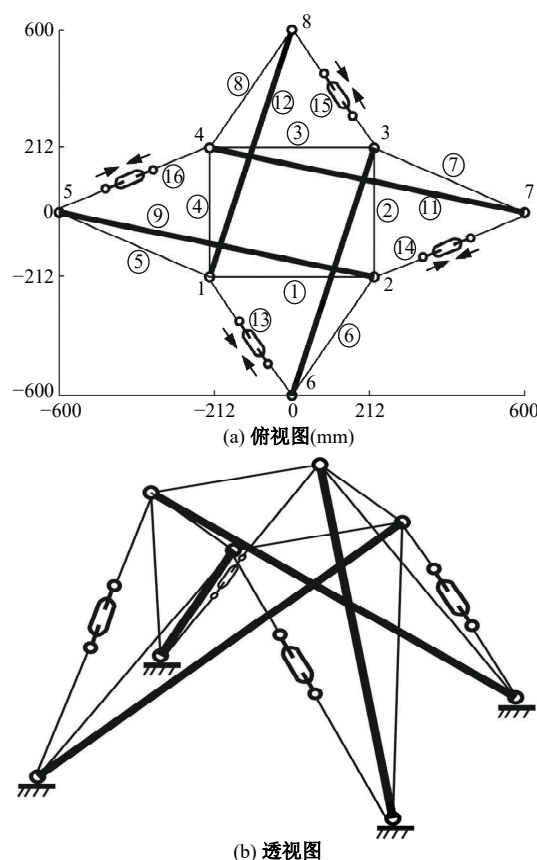


图 4 16 单元预应力索杆结构(新增拉索索长可控)

Fig. 4 A prestressed cable-strut structure with 16 members (lengths of four additional members are controllable)

对于工况 2,在增设拉索之后,结构的总自由度仍为 12,但单元数变为 16,平衡矩阵的秩为 12,故 $s=4, d=0$,结构体系已然发生变化,属第Ⅱ类结构。

用前述 3 种方法分别计算两种工况下的结构响应,表 3 和表 4 依次列出了单元内力增量和节点位移的计算结果。

表 3 和表 4 显示,对工况 1 而言,3 种方法所得结果相近,这是因为与“伸长位移” δx^I 相比,“非伸长机构位移” δx^{II} 对几何力的贡献居于主导,这一点易于验证,此处不作赘述。对工况 2 来说,本文方法仍满足精度要求,而矩阵力法与非线性矩阵位移法的计算结果偏差较大,其原因在于在求

表 3 算例 2 单元内力

Table 3 Internal forces of element in example 2 N

工况	单元编	初始内力	内力增量 δn		
号	号	n	矩阵位移法	矩阵力法	本文方法
工况 1	①~④	1 311.3	47.196 2	45.592 2	46.253 6
	⑤~⑧	2 389.5	-9.605 4	-10.242 9	-10.390 0
	⑨~⑫	-2 853.3	-120.965 2	-118.327 6	-119.707 8
工况 2	①~④	1 311.3	31.876 8	0	30.325 1
	⑤~⑧	2 389.5	-5.826 2	0	-6.755 3
	⑨~⑫	-2 853.3	-68.379 9	0	-65.954 2
	⑬~⑯	0	62.003 3	0	61.136 7

表 4 算例 2 节点位移

Table 4 Displacements of nodes in example 2 mm

工况号	节点编号	位移 δx	矩阵位移法	矩阵力法	本文方法
工况 1	节点 1	X 向分量	4.296 8	4.326 5	4.318 9
		Y 向分量	-5.279 6	-5.380 1	-5.387 7
		Z 向分量	-3.440 9	-3.486 3	-3.494 6
	节点 2	X 向分量	5.279 6	5.380 1	5.387 7
		Y 向分量	4.296 8	4.326 5	4.318 9
		Z 向分量	-3.440 9	-3.486 3	-3.494 6
	节点 3	X 向分量	-4.296 8	-4.326 5	-4.318 9
		Y 向分量	5.279 6	5.380 1	5.387 7
		Z 向分量	-3.440 9	-3.486 3	-3.494 6
	节点 4	X 向分量	-5.279 6	-5.380 1	-5.387 7
		Y 向分量	-4.296 8	-4.326 5	-4.318 9
		Z 向分量	-3.440 9	-3.486 3	-3.494 6
工况 2	节点 1	X 向分量	5.115 1	9.111 4	5.077 2
		Y 向分量	-5.713 8	-9.111 4	-5.778 0
		Z 向分量	-3.611 3	-5.466 8	-3.634 8
	节点 2	X 向分量	5.713 8	9.111 4	5.778 0
		Y 向分量	5.115 1	9.111 4	5.077 2
		Z 向分量	-3.611 3	-5.466 8	-3.634 8
	节点 3	X 向分量	-5.115 1	-9.111 4	-5.077 2
		Y 向分量	5.713 8	9.111 4	5.778 0
		Z 向分量	-3.611 3	-5.466 8	-3.634 8
	节点 4	X 向分量	-5.713 8	-9.111 4	-5.778 0
		Y 向分量	-5.115 1	-9.111 4	-5.077 2
		Z 向分量	-3.611 3	-5.466 8	-3.634 8

解此问题时,矩阵力法的基本方程组式(47)和式(52)分别退化为:

$$\begin{pmatrix} A \\ -S^T F \end{pmatrix} \delta n = \begin{pmatrix} \delta q \\ S^T e_0 \end{pmatrix}$$

及

$$A^T \delta x = e_0 + F \cdot \delta n$$

不难看出,以上两式为传统力法求解静不定动定结构的基本方程。换言之,矩阵力法应用于工况 2 时无法考虑预应力或初始内力的影响,其计算结果自然与预应力无关,可以预见其求解误差将随预应力水平的提高而增大。

在本算例中,由平衡矩阵奇异值分解可求得

一组线性无关的自应力模态 $S_i (i=1, 2, 3, 4)$:

$$S_i = [a_i^1 \cdots a_i^{12} a_i^{13} \cdots a_i^{16}]^T$$

S_i 包含 16 个元素:前 12 个元素对应原有单元,后 4 个元素对应新增拉索。经计算发现,后 4 个元素之和始终为零,即:

$$\sum_{j=13}^{16} a_i^j = 0$$

注意到 $e_0 = [\underbrace{0 \cdots 0}_{12} \underbrace{-10 \cdots -10}_4]^T$, 故

$S^T e_0 = 0$ 。又因为 $\delta q = 0$, 则有:

$$\begin{pmatrix} \delta q \\ S^T e_0 \end{pmatrix} = 0$$

由式(47)和式(52)的退化形式分别解得 $\delta n = 0$ 、 $\delta x = (A^T)^+ (e_0 + F \cdot \delta n) = (AA^T)^{-1} A \cdot e_0$, 该结果不随预应力水平系数 ϵ 的变化而变化。

为进一步验证上述结论,用 3 种方法求解不同预应力水平下 ($\epsilon \in [1, 10]$ kN) 工况 2 的单元内力增量,计算结果如图 5~图 8 所示。由图可知,矩阵力法解得各单元内力增量恒为零,这与考虑非线性的数值解并不吻合,且其误差随 ϵ 的增大而增大;本文方法则始终与非线性矩阵位移法的计算结果较为接近,且预应力水平越高、结构刚度越大,其精度越高。

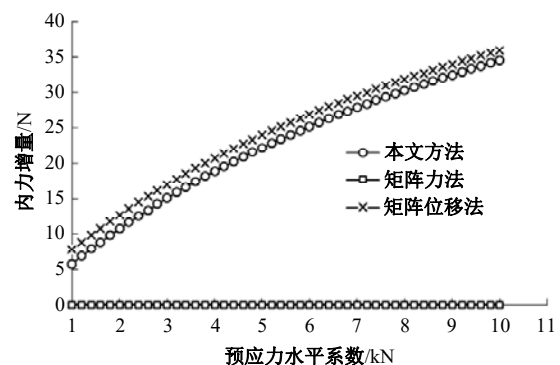


图 5 单元①~④内力曲线

Fig. 5 Force curves of ①~④ members

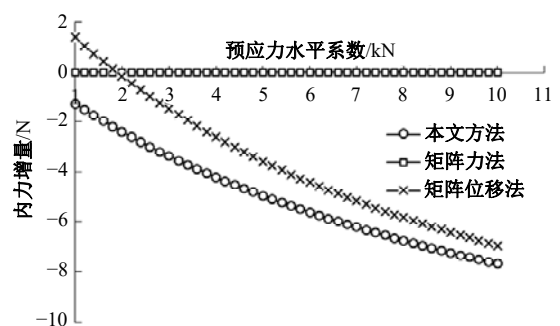


图 6 单元⑤~⑧内力曲线

Fig. 6 Force curves of ⑤~⑧ members

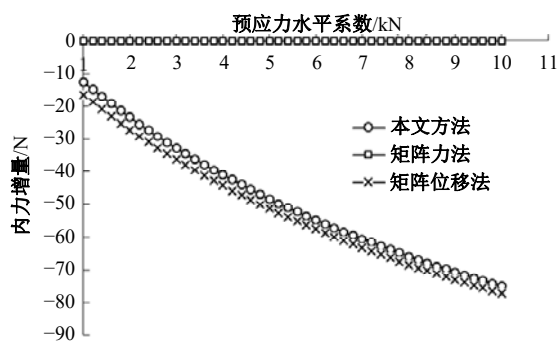


图7 单元⑨~⑫内力曲线

Fig. 7 Force curves of ⑨~⑫ members

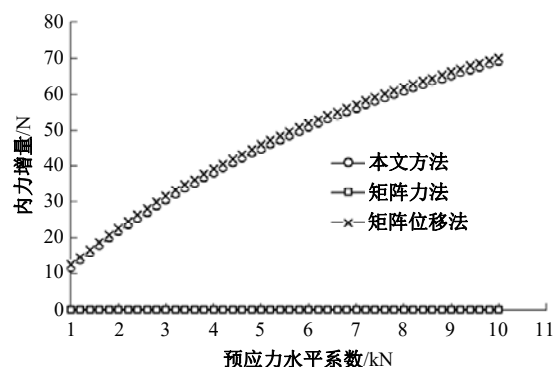


图8 单元⑬~⑯内力曲线

Fig. 8 Force curves of ⑬~⑯ members

5 结 论

(1)本文考虑初始内力的影响,推导了小变形、线弹性条件下铰接杆系结构静力分析基本方程组,包括广义平衡方程和广义协调方程两部分,二者的系数矩阵互为转置且可逆,形式上与静定动定结构力法分析基本方程一致。特别地,当研究对象为静定动定结构时,该控制方程组退化为传统力法基本方程。因此,本文方法是传统力法考虑初始内力刚化效应的直接推广。

(2)对于静不定或动不动结构,采用本文方法求解结构的静力响应,可同步获得自应力模态组合系数和机构位移模态组合系数,有助于从本质上理解铰接杆系结构抵抗外荷载的机理,力学概念明确。理论分析及算例均表明,本文给出的基本方程组比矩阵力法具有更广阔的适用范围,且结构刚度越大,其计算精度越高。

(3)就算法而言,本文方法基于奇异值分解及广义逆矩阵理论进行求解,对计算机的存储和计算能力有较高要求,但随着计算机算力的不断提升,同样可通过迭代对强几何非线性结构进行静力分析。

参考文献:

- [1] Pellegrino S. Analysis of prestressed mechanisms[J]. International Journal of Solids and Structures, 1990, 26(12): 1329-1350.
- [2] 张沛, 冯健. 张拉整体结构的稳定性判定及刚度分析[J]. 土木工程学报, 2013, 46(10): 48-57.
Zhang Pei, Feng Jian. Stability criterion and stiffness analysis of tensegrity structures[J]. China Civil Engineering Journal, 2013, 46(10): 48-57.
- [3] 王艳蒙, 刘贺平, 罗阿妮. 张拉整体基本单元几何稳定构型分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2022, 43(2): 268-273.
Wang Yan-meng, Liu He-ping, Luo A-ni. Analysis of geometrically stable configurations of the basic tensegrity unit[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2022, 43(2): 268-273.
- [4] 张沛, 冯健, 周继凯. 含冗余拉索的棱柱型张拉整体结构成形过程分析[J]. 东南大学学报:自然科学版, 2022, 52(5): 848-855.
Zhang Pei, Feng Jian, Zhou Ji-kai. Analysis on forming process of prismatic tensegrity structures with redundant cables[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2022, 52(5): 848-855.
- [5] 陈耀, 冯健, 马瑞君. 对称型动不定杆系结构的可动性判定准则[J]. 建筑结构学报, 2015, 36(6): 101-107.
Chen Yao, Feng Jian, Ma Rui-jun. A unified criterion for movability of kinematically indeterminate frameworks with symmetry[J]. Journal of Building Structures, 2015, 36(6): 101-107.
- [6] 冯晓东, 戴冠鸥, 杨伟家, 等. 基于向量式结构力学的张拉整体结构可展性能研究[J]. 西安建筑科技大学学报:自然科学版, 2021, 53(3): 350-357.
Feng Xiao-dong, Dai Guan-ou, Yang Wei-jia, et al. Research on developable property of tensegrity structures based on vector mechanics of structures[J]. Journal of Xi'an University of Architecture & Technology(Natural Science Edition), 2021, 53(3): 350-357.
- [7] 马烁, 袁行飞, 杨柳. 预应力索杆结构模型相似理论及其验证[J]. 建筑结构学报, 2021, 42(7): 95-103.
Ma Shuo, Yuan Xing-fei, Yang Liu. Validation of similitude laws for prestressed cable-strut structures [J]. Journal of Building Structures, 2021, 42(7): 95-103.

- [8] Guest S. The stiffness of prestressed frameworks: a unifying approach[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(3-4): 842-854.
- [9] 龙驭球, 包世华, 袁驷. 结构力学 II ——专题教程[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [10] 张沛, 冯健. 一种求解索杆张力结构整体自应力模态的能量方法[J]. *土木工程学报*, 2013, 46(6): 62-68.
Zhang Pei, Feng Jian. An energy method for overall self-stress modes calculation of cable-strut tension structures[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2013, 46(6): 62-68.
- [11] Zhang P, Kawaguchi K, Feng J. Prismatic tensegrity structures with additional cables: Integral symmetric states of self-stress and cable-controlled reconfiguration procedure[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, 51(25-26): 4294-4306.
- [12] Pellegrino S. Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1993, 30(21): 3025-3035.
- [13] 涂桂刚, 崔昌禹, 江红, 等. 基于广义逆矩阵理论的杆系结构形态创构方法[J]. *土木工程学报*, 2020, 53(5): 25-31.
Tu Gui-gang, Cui Chang-yu, Jiang Hong, et al. A structural morphogenesis method for frame structure based on generalized inverse matrix theory[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2020, 53(5): 25-31.
- [14] 薛素铎, 鲁建, 李雄彦, 等. 跳格布置对环形交叉索桁结构静动力性能的影响[J]. *吉林大学学报:工学版*, 2019, 50(5): 1687-1697.
Xue Su-duo, Lu Jian, Li Xiong-yan, et al. Influence of grid-jumping arrangement on static and dynamic performance of annular crossed cable-truss structure [J]. *Journal of Jilin University(Engineering and Technology Edition)*, 2019, 50(5): 1687-1697.