doi：10. 12068/j. issn. 1005－3026. 2026. 20269007

耦合细胞神经网络的网格多涡卷吸引子生成与调控

武花干，王文涛，唐海刚
（常州大学 王诤微电子学院，江苏 常州 213164）

摘 要：网格多涡卷吸引子的动力学特性为混沌保密通信和图像加密等信息安全应用提供了重要支撑. 本文将具有余弦激活函数的细胞神经网络与具有忆阻激活函数的细胞神经网络进行耦合，并引入忆阻模拟电磁辐射效应，构建了1种新型耦合细胞神经网络. 该耦合网络可生成复杂的网格多涡卷吸引子. 理论分析与数值仿真表明，网格多涡卷吸引子的数量及空间位置分布由SNF（stable node-focus）平衡点的个数及其空间位置分布决定，可通过调节忆阻参数控制SNF平衡点的生成，实现对网格多涡卷吸引子数量的精确调控. 此外，基于FPGA（field-programmable gate array）硬件平台完成了系统的电路实验验证，从硬件层面实现了网格多涡卷吸引子的生成与调控，实验结果与数值仿真结果一致. 最后，基于所提出的系统设计了1种图像加密方案，并通过密钥敏感性、信息熵和像素相关性等安全性指标的测试，验证了该方案具有良好的安全性能.

关 键 词：细胞神经网络；忆阻；网格多涡卷；FPGA实现；图像加密
中图分类号：TN 711.4 **文献标志码：**A **文章编号：**1005-3026（2026）07-0020-11

Generation and Regulation of Grid Multi-scroll Attractors in Coupled Cellular Neural Networks

WU Hua-gan，*WANG Wen-tao*，*TANG Hai-gang*
（Wang Zheng Microelectronics College，Changzhou University，Changzhou 213164，China. Corresponding author：WU Hua-gan，E-mail：wuhg@cczu.edu.cn）

Abstract：Dynamic characteristics of grid multi-scroll attractors provide important support for information security applications such as chaotic secure communication and image encryption. A novel coupled cellular neural network was constructed by coupling a cellular neural network with a cosine activation function and a cellular neural network with a memristor activation function and introducing a memristor to simulate the electromagnetic radiation effect. The coupled network could generate complex grid multi-scroll attractors. Theoretical analysis and numerical simulation indicate that the number and spatial distribution of grid multi-scroll attractors are determined by the number and spatial distribution of stable node-focus（SNF）equilibrium points，and the generation of SNF equilibrium points can be controlled by adjusting memristor parameters to achieve precise regulation of the number of grid multi-scroll attractors. In addition，circuit experiment verification of the system was completed based on the field-programmable gate array（FPGA）hardware platform，achieving the generation and regulation of grid multi-scroll attractors at the hardware level. The experimental results are consistent with the numerical simulation results. Finally，an image encryption scheme is designed based on the proposed system，and its good security performance is verified through tests of security indicators such as key sensitivity，information entropy，and pixel correlation.

Key words：cellular neural network；memristor；grid multi-scroll；FPGA implementation；

收稿日期：2026-01-26
基金项目：国家自然科学基金资助项目（62371073）.
作者简介：武花干（1987—），女，江苏泰州人，常州大学副教授，硕士生导师.
通信作者：武花干，E-mail：wuhg@cczu.edu.cn.

image encryption

多涡卷吸引子因其复杂的拓扑结构和高度的不可预测性而受到广泛关注.相较于一般混沌系统,多涡卷混沌系统在动力学行为上更为复杂,且通常表现出更强的抗干扰能力以及更高的可控性与可调性[1-2],这使其成为研究复杂非线性动力学行为的重要模型.针对多涡卷生成系统的设计与实现研究有助于深化对复杂非线性系统内在演化机制的理解,同时其生成的类噪声信号在保密通信、伪随机数生成等信息安全领域中亦展现出重要的应用潜力[3-5].因此,构建具有多涡卷吸引子的混沌系统已成为当前非线性动力学与混沌领域的研究热点之一.

近年来,多涡卷吸引子混沌系统的构建方法主要为分段线性函数替代法[6]、子系统切换法[7]以及周期/饱和函数调制法[8].其中,分段线性函数替代法由于其良好的物理可实现性而应用得最为广泛.该方法通过将系统中的非线性项替换为特定的非线性函数(如阶跃函数、饱和函数等)以实现多涡卷吸引子的生成[9-10].例如,利用多级逻辑脉冲函数,实现了多种对称多涡卷吸引子及周期奇异吸引子的生成[11];在Jerk系统中引入嵌套的sin-PWL(sin-piecewise linear)函数,设计了一类多涡卷混沌系统[12];基于改进的Jerk系统构建了具有多涡卷吸引子的正弦混沌系统[13].与之类似,由特殊非线性项描述的忆阻也被视为多涡卷吸引子生成的理想选择[14-16].例如,将由特殊非线性项描述的忆阻引入神经网络,从而实现多涡卷吸引子的生成与调控[17-18].且相较于直接在系统中引入非线性函数的方法,引入忆阻的方法在生物合理性方面更具优势,因而在神经网络的多涡卷生成研究中具有更高的研究价值.

细胞神经网络是一类具有局部连接特性和并行处理能力的非线性动力系统[19-20],其数学模型灵活,具有良好的硬件实现可行性[21-22],在复杂动力学分析及信息安全应用方面已有相关研究[23-26].然而,现有研究中基于细胞神经网络生成多涡卷吸引子的相关工作仍然较为有限,其动力学机理与可控调节方式尚缺乏系统性的研究.鉴于此,本文构建了1种新型耦合细胞神经网络模型.围绕该模型,研究了多涡卷吸引子的生成机理及其精确调控方法,并基于FPGA硬件平台进行了验证.最后,基于所提出的系统设计了1种图像加密方案,并通过多项安全性测试验证了其有效性与可行性.

1　系统描述

1.1　耦合细胞神经网络模型

本文提出的耦合细胞神经网络(cellular neural network,CNN)如图1所示,其中CNN-A是具有余弦激活函数的细胞神经网络,CNN-B是具有忆阻(分段线性)激活函数的细胞神经网络.图1中实线表示状态控制权重;虚线表示输出控制权重;压控忆阻$T(\varphi)$(φ为忆阻内部磁通量,无量纲)用于表征细胞之间的电磁辐射效应;EMR(electromagnetic resonance)表示电磁共振.

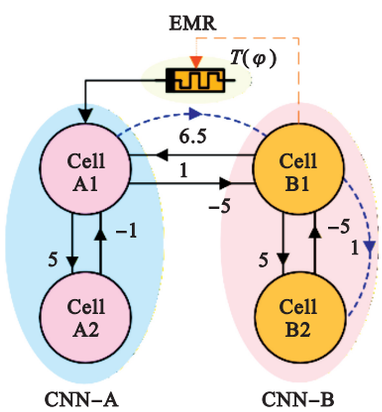


图1　耦合细胞神经网络结构图

Fig. 1　Structure diagram of coupled cellular neural networks

细胞神经网络CNN-A第j个细胞的电路图如图2所示,其包含1个独立的电流源I_j、1个电容C、1个线性电阻R_x、几个电压控制的电流源(voltage-controlled current sources,VCCSs)和1个线性电阻R_y. x_j和y_j分别表示第j个细胞的状态变量和输出变量.

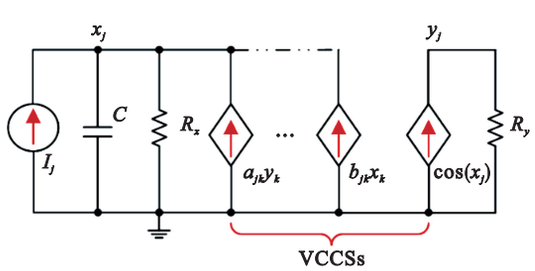


图2　CNN-A的第j个细胞的电路图

Fig. 2　Circuit diagram of jth cell in CNN-A

其中,第j个细胞的输出变量可以表示为

$$y_j=\cos\left(x_j\right). \tag{1}$$

因此，1 个含有双细胞的细胞神经网络 CNN−A 的数学模型可以描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{A1}\\ \dot{x}_{A2}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}x_{A1}\\ x_{A2}\end{bmatrix}+\boldsymbol{A}_1\begin{bmatrix}y_{A1}\\ y_{A2}\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}_1\begin{bmatrix}x_{A1}\\ x_{A2}\end{bmatrix}. \tag{2}$$

其中：系数矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_1$ 分别为输出变量和状态变量的权重矩阵，可以表示为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}. \tag{3}$$

细胞神经网络 CNN−B 第 l 个细胞的电路图如图 3 所示，整体结构与 CNN−A 基本一致，其中激活函数由压控忆阻 G_l 所描述 .x_l 和 y_l 分别表示第 l 个细胞的状态变量和输出变量 .

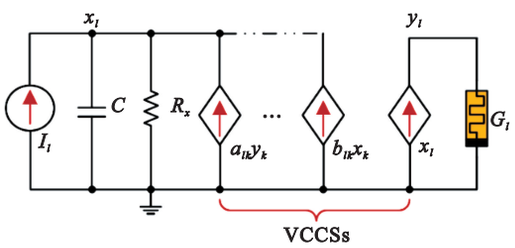


图 3 CNN−B 的第 l 个细胞的电路图

Fig. 3 Circuit diagram of lth cell in CNN−B

故双细胞神经网络 CNN−B 可以描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{B1}\\ \dot{x}_{B2}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}x_{B1}\\ x_{B2}\end{bmatrix}+\boldsymbol{A}_2\begin{bmatrix}y_{B1}\\ y_{B2}\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}_2\begin{bmatrix}x_{B1}\\ x_{B2}\end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 5 & 1\end{bmatrix}. \tag{5}$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 分别为输出变量和状态变量的权重矩阵 .

因此，耦合细胞神经网络的数学模型可以描述为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_{A1}=-x_{A2}+x_{B1};\\ &\dot{x}_{A2}=5x_{A1};\\ &\dot{x}_{B1}=-5x_{B2}-5x_{A1}+6.5y_{A1};\\ &\dot{x}_{B2}=y_{B1}+5x_{B1}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

1.2 忆阻模型

本文采用 1 个压控忆阻 $G(\varphi)$[27] 表示神经网络 CNN−B 中的激活函数，其数学模型为

$$\left.\begin{aligned}&i=G(\varphi)v=0.001\varphi^2v;\\ &\dot{\varphi}=-4.97v-8f(\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中：v，i 和 φ 分别为忆阻的电压、电流和磁通量 . 由于忆阻内部状态函数的零点结构会直接影响系统的平衡点分布及动力学行为，本文将 $f(\varphi)$ 分为 $f_N(\varphi)$，$f_M(\varphi)$ 两种形式 . 其中 $f_N(\varphi)$ 为

$$f_N(\varphi)=\begin{cases}\varphi, & N_1=0;\\ \varphi-\sum\limits_{n=1}^{N_1}\big[\mathrm{sgn}(\varphi+(2n-1))+\\ \quad \mathrm{sgn}(\varphi-(2n-1))\big], & N_1=1,2,3,\cdots.\end{cases} \tag{8}$$

$f_M(\varphi)$ 为

$$f_M(\varphi)=\begin{cases}\varphi-\mathrm{sgn}(\varphi), & M_1=0;\\ \varphi-\mathrm{sgn}(\varphi)-\sum\limits_{n=1}^{M_1}[\mathrm{sgn}(\varphi+2n)+\\ \quad \mathrm{sgn}(\varphi-2n)], & M_1=1,2,3,\cdots.\end{cases} \tag{9}$$

为验证模型 (7) 的忆阻特性，在其两端施加 1 个交流电压作为激励，观察其伏安关系曲线的变化规律 . 这里外加激励设为 $v=V_m\sin(2\pi ft)$. 保持电压振幅 V_m 为 1 V，绘制出在频率 f 分别为 1，2，3 Hz 时的紧磁滞回线，如图 4a 所示 . 由图 4a 可见，随着激励频率的增加，紧磁滞回线的旁瓣面积逐渐缩小，表明该模型确实具有忆阻特性 .

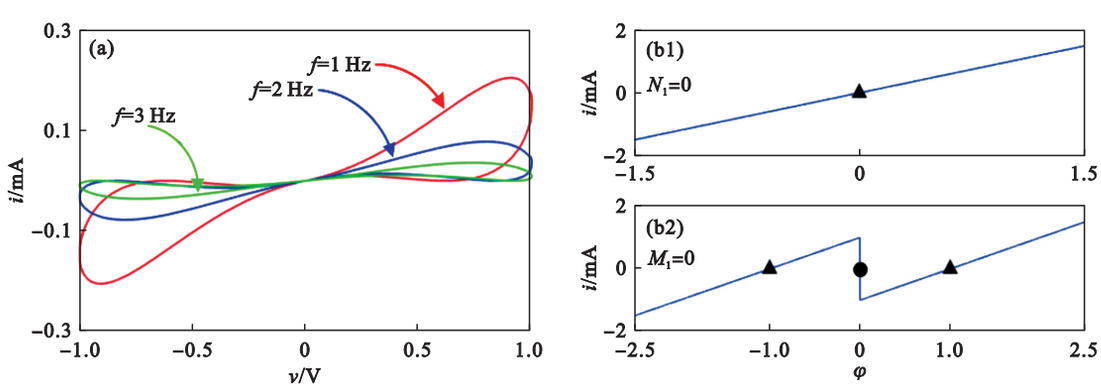


图 4 忆阻 $G(\varphi)$ 的特性曲线及内部函数波形图

Fig. 4 Characteristic curve of memristor $G(\varphi)$ and internal function waveform diagram

(a)—不同频率下忆阻的紧磁滞回线；(b1)—N_1=0 时 $f_N(\varphi)$ 的波形；(b2)—M_1=0 时 $f_M(\varphi)$ 的波形 .

图 4b1 和 4b2 分别展示了忆阻参数 N_1=0 和 M_1=0 时内部状态函数 $f_N(\varphi)$ 和 $f_M(\varphi)$ 的波形 . 可以看出，当 N_1=0 时，$f_N(\varphi)$=0 有 1 个解，对应曲线斜率为 1；当 M_1=0 时，$f_M(\varphi)$=0 有 3 个解，其中有 2 个解对应曲线斜率为 1. 在图 4b1 和 4b2 中，这类对应曲线斜率为 1 的解用“▲”进行标识，曲线斜率不为 1 的解用“●”进行标识 .

电磁辐射作用于细胞神经网络时，会以感应

电流的形式影响细胞活动.压控忆阻器的本构关系能够有效描述细胞膜上磁通量的累积与释放过程,这一机制与电磁辐射作用下细胞表现出的响应特性在机理上具有一致性.因此,本文引入用于模拟电磁辐射的压控忆阻 $T(\varphi)$[12],其数学模型为

$$\left.\begin{aligned} i&=T(\varphi)v=0.001\varphi^2 v;\\ \dot{\varphi}&=-4.97v-8.5g(\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中:$g(\varphi)$是1个由函数$h(\varphi)$控制的正弦函数,其数学模型描述为

$$g(\varphi)=\sin\left[h(\varphi)\right]. \tag{11}$$

由式(11)可知,函数$h(\varphi)$直接决定正弦函数$g(\varphi)$的周期范围及零点分布.为了方便调控耦合细胞神经网络的平衡点数量与位置分布,这里将$h(\varphi)$设计为2种分段线性形式$h_N(\varphi)$和$h_M(\varphi)$.其中,$h_N(\varphi)$为

$$h_N(\varphi)=\frac{3}{2}\left(\left|\varphi+\frac{E}{3}\right|-\left|\varphi-\frac{E}{3}\right|\right). \tag{12}$$

其中:参数E由N_2决定,其表达式为$E=(2N_2+0.5)\pi$,且$N_2=0,1,2,\cdots$.

$h_M(\varphi)$为

$$h_M(\varphi)=-\frac{3}{2}\left(\left|\varphi+\frac{E}{3}\right|-\left|\varphi-\frac{E}{3}\right|\right). \tag{13}$$

其中:参数E由M_2决定,其表达式为$E=(2M_2+1.5)\pi$,且$M_2=0,1,2,\cdots$.

为验证模型(10)的忆阻特性,在其两端施加1个交流电压作为激励,观察其伏安关系曲线的变化规律.这里外加激励设为$v=V_m\sin(2\pi ft)$.保持电压振幅V_m为3 V,绘制出在频率f分别为1,5,10 Hz时的紧磁滞回线,如图5a所示.由图5a可见,随着激励频率的增加,紧磁滞回线的旁瓣面积逐渐缩小,表明该模型确实具有忆阻特性.

图5b1和5b2分别展示了忆阻参数$N_2=0$和$M_2=0$时正弦函数$g(\varphi)$的波形.可以看出,函数$h_N(\varphi)$限制了正弦函数$g(\varphi)$的输入幅值.换句话说,正弦函数$g(\varphi)$的输入存在上限,而参数N_2/M_2决定了正弦函数$g(\varphi)$的周期数量,也就是正弦函数$g(\varphi)$零点的数量.当$N_2=0$时,正弦函数$g(\varphi)=0$有1个解,对应曲线斜率为1;当$M_2=0$时,正弦函数$g(\varphi)=0$有3个解,其中有2个解对应曲线斜率为1.在图5b1和5b2中,这类对应曲线斜率为1的解用“◆”进行标识,曲线斜率不为1的解用“●”进行标识.

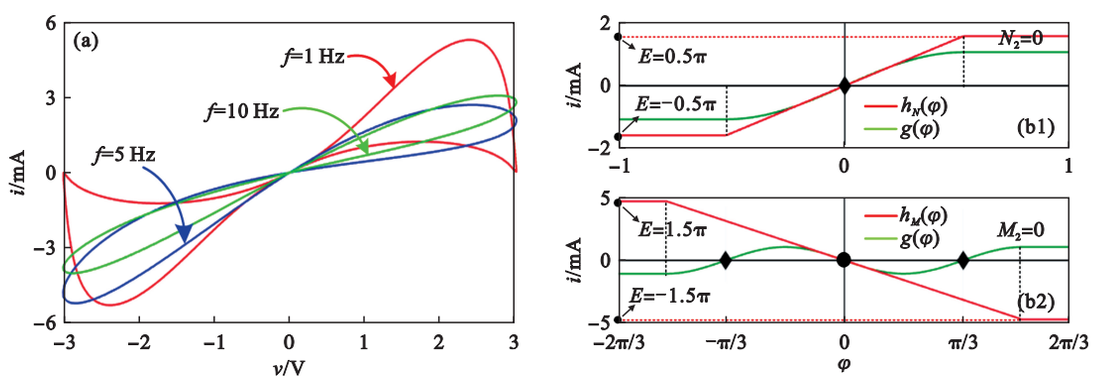


图5　忆阻 $T(\varphi)$的特性曲线及内部函数波形图

Fig. 5　Characteristic curve of memristor $T(\varphi)$ and internal function waveform diagram

(a)—不同频率下忆阻的紧磁滞回线;(b1)—$N_2=0$时$g(\varphi)$的波形;(b2)—$M_2=0$时$g(\varphi)$的波形.

综上,耦合细胞神经网络的数学模型可以重写为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_{A1}&=-x_{A2}+x_{B1}+T(\varphi_2)x_{B1};\\ \dot{x}_{A2}&=5x_{A1};\\ \dot{x}_{B1}&=-5x_{B2}-5x_{A1}+6.5y_{A1};\\ \dot{x}_{B2}&=y_{B1}+5x_{B1};\\ \dot{\varphi}_1&=-4.97x_{B1}-8f(\varphi_1);\\ \dot{\varphi}_2&=-4.97x_{B1}-8.5g(\varphi_2). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

通过切换$G(\varphi_1)$和$T(\varphi_2)$的模型,可以改变系统(14)的动力学行为.

2　平衡点稳定性分析

将系统(14)左侧设置为零,即

$$\left.\begin{aligned} 0&=-x_{A2}+x_{B1}+T(\varphi_2)x_{B1};\\ 0&=5x_{A1};\\ 0&=-5x_{B2}-5x_{A1}+6.5y_{A1};\\ 0&=y_{B1}+5x_{B1};\\ 0&=-4.97x_{B1}-8f(\varphi_1);\\ 0&=-4.97x_{B1}-8.5g(\varphi_2). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

求解方程(15),可得系统(14)的平衡点.根据分

析结果可知,系统平衡点可以描述为

$$P_{\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2}=\left(0,0,0,1.3,\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2\right). \tag{16}$$

其中:$\hat{\varphi}_1$和$\hat{\varphi}_2$分别是方程$f(\varphi_1)=0$和$g(\varphi_2)=0$的解.

可以推导出系统在平衡点$P=\left(\hat{x}_{A1},\hat{x}_{A2},\hat{x}_{B1},\hat{x}_{B2},\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2\right)$的雅可比矩阵$\boldsymbol{J}$为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1+0.001\hat{\varphi}_2^2 & 0 & 0 & 0.002\hat{x}_{B1}\hat{\varphi}_2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5-6.5\sin(\hat{x}_{A1}) & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5+0.001\hat{\varphi}_1^2 & 0 & 0.002\hat{x}_{B1}\hat{\varphi}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -4.97 & 0 & -8\dot{f}\left(\hat{\varphi}_1\right) & 0 \\ 0 & 0 & -4.97 & 0 & 0 & -8.5\dot{g}\left(\hat{\varphi}_2\right) \end{bmatrix}. \tag{17}$$

本文采用MATLAB的'eig'函数直接计算矩阵(17)的特征根,从而判断平衡点的稳定性.需要注意的是,由于函数$f(\varphi_1)$存在不可导的符号函数$\mathrm{sign}(\varphi_1)$,这里利用近似函数$\tanh(10^4\varphi_1)$替换$\mathrm{sign}(\varphi_1)$,以方便数值求解.为了更清晰地展示系统平衡点在涡卷中的分布,将初值固定为(1,1,1,1,1,1),并设置参数$M_1=0$,$M_2=0$,绘制出图6所示的$\varphi_1-\varphi_2$平面平衡点分布图,以及函数$f(\varphi_1)$和$g(\varphi_2)$的波形图.

图6中"■"表示稳定点(stable node-focus,SNF),"∗"表示不稳定点(unstable saddle-focus,USF),"★"表示临界不稳定点(critical unstable node,CUN).表1列出了图6中的平衡点及其对应的特征值与稳定性.

可以看出,系统(14)能够生成网格状的多涡卷吸引子,其涡卷数量与SNF平衡点的数量直接相关,且该SNF平衡点位于$f(\varphi_1)=0$且斜率为1的曲线与$g(\varphi_2)=0$且斜率为1的曲线的交点处.这一结果揭示了该系统生成多涡卷吸引子的内在机制.

在传统多涡卷生成机制中,涡卷个数通常与指数为2的不稳定点(USF-2)的数量有关,而在本文所研究的系统中,多涡卷吸引子的数量则由SNF平衡点的生成所影响.这一差异表明,该系统的多涡卷生成过程遵循一种不同于传统生成机制的新路径,进一步体现了多涡卷生成机制的多样性.

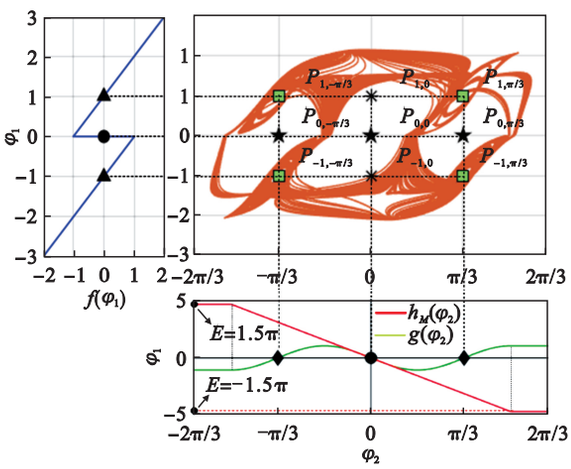


图6 $\varphi_1-\varphi_2$平面平衡点分布图

Fig. 6 Distribution of equilibrium points in $\varphi_1-\varphi_2$ plane

3 可控多涡卷吸引子的生成

本章介绍了不同方向上的分岔路径以及不同忆阻参数下网格多涡卷吸引子的生成过程及其空间分布.

表1 平衡点、特征值及其稳定性

Table 1 Equilibrium points, eigenvalues, and their stability

参数M	平衡点	特征值	稳定性
M_1=0,M_2=0.	$P_{1,-\pi/3}=\left(0,1.3,0,0,1,\frac{-\pi}{3}\right)$,$P_{1,\pi/3}=\left(0,1.3,0,0,1,\frac{\pi}{3}\right)$ $P_{-1,-\pi/3}=\left(0,1.3,0,0,-1,\frac{-\pi}{3}\right)$,$P_{-1,\pi/3}=\left(0,1.3,0,0,-1,\frac{\pi}{3}\right)$	−8, −25.5, 0±2.009 1i, 0±5.565 4i	SNF
	$P_{1,0}=(0,1.3,0,0,1,0)$,$P_{-1,0}=(0,1.3,0,0,-1,0)$	−8, 25.5, 0±2.009 3i, 0±5.564 9i	USF
	$P_{0,-\pi/3}=\left(0,1.3,0,0,0,\frac{-\pi}{3}\right)$,$P_{0,0}=(0,1.3,0,0,0,0)$,$P_{0,\pi/3}=\left(0,1.3,0,0,0,\frac{\pi}{3}\right)$	$7.999\,2\times10^4$, 0.002 6, 0±0.000 2i, 0±0.000 6i	CUN

3.1　*N*/*M*分岔路径

初始条件为ICs=[1,1,1,1,ξ,1].根据第2章的平衡点稳定分析可知,平衡点$P_{\varphi1,\varphi2}$位于随N_1和M_1变化的φ_1方向上.因此,采用标记为φ_{1max}的φ_1局部最大值来描述系统动力学行为.系统(14)关于φ_1的一维分岔图通过基于MATLAB的'ode45Ps'算法绘制,参数设置为'timestep=0.01'和'time-end=4 000',如图7a所示.为清晰呈现轨迹的变化趋势,每个N_1或M_1值均重复300次实验,每次ξ值均随机选取[0,1]区间内的数值.图7a中红色轨道表示使用$f_N(\varphi)$函数(N_1=0,1,2,3,4)求解的系统(14)的φ_{1max},蓝色轨道则对应使用$f_M(\varphi)$函数(M_1=0,1,2,3,4)求解的系统(14)的φ_{1max}.

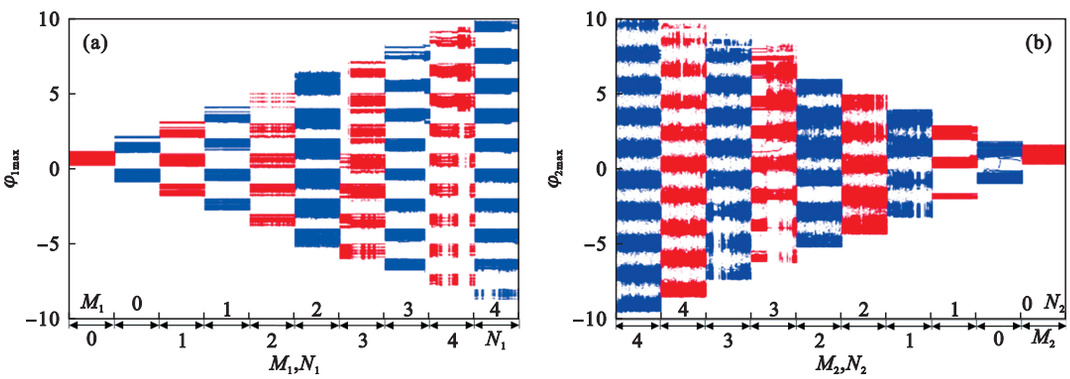


图7　由φ的局部最大值描绘的关于*N*/*M*的一维分岔图

Fig. 7　One-dimensional bifurcation diagram with respect to *N*/*M* depicted by local maximum value of φ

(a)—不同N_1或M_1值时的φ_{1max};(b)—不同N_2或M_2值时的φ_{2max}.

初始条件为ICs=[1,1,1,1,1,&].分析可知平衡点P_{φ_1,φ_2}位于随N_2和M_2变化的φ_2方向上.采用标记为φ_{2max}的φ_2局部最大值来描述系统动力学行为.通过MATLAB绘制关于φ_2的一维分岔图,如图7b所示.每个N_2或M_2值均重复300次实验,每次&值均随机选取[0,1]区间内的数值.图7b中红色轨道表示使用$h_N(\varphi)$函数(N_2=0,1,2,3,4)求解的φ_{2max},蓝色轨道则对应使用$h_M(\varphi)$函数(M_2=0,1,2,3,4)求解的φ_{2max}.

3.2　网格多涡卷吸引子的生成

为了更直观地展示网格多涡卷吸引子的复杂动态特性,绘制了如图8所示的φ_1-φ_2平面和φ_1-φ_2-x_{B1}三维空间的涡卷分布图,并标明其SNF平衡点的位置.在该耦合细胞神经网络模型中,忆阻参数通过调控SNF平衡点的数量和空间分布,进而决定网格多涡卷吸引子的生成数量和位置.随着忆阻参数取值的变化,SNF平衡点在φ_1和φ_2方向上的分布发生重构,从而促使涡卷吸引子在相应方向上重新组织并生成.

通过改变忆阻参数,可以进一步观察涡卷数量的变化及其空间分布的特性.当参数M_1=0,M_2=0时,耦合细胞神经网络模型生成2×2的网格多涡卷吸引子,如图8a1所示;图8a2给出了对应条件下的φ_1-φ_2-x_{B1}三维空间的涡卷分布图.当参数调整为N_1=1,M_2=0时,该模型生成3×2的网格多涡卷吸引子,如图8b1所示;图8b2给出了对应条件下的φ_1-φ_2-x_{B1}三维空间的涡卷分布图.进一步将参数调整为N_1=1,M_2=1,该模型可以生成3×4的网格多涡卷吸引子,如图8c1所示,图8c2给出了对应条件下φ_1-φ_2-x_{B1}三维空间的涡卷分布图.综上可知,通过调整忆阻参数,能在系统的φ_1-φ_2平面上实现网格多涡卷吸引子的可控生成.

4　FPGA硬件实验

网格多涡卷能够生成复杂的混沌信号,其在保密通信和伪随机数生成等领域具有重要的应用价值.FPGA硬件平台是实现信息安全系统终端原型的首选平台,基于FPGA平台实现的硬件实验能为后续的加密应用奠定基础.本文采用了ZYNQ系列的XC7Z010CLG400芯片来实现耦合细胞神经网络模型的硬件实验.

首先,采用四阶龙格-库塔算法对式(14)描述的数学模型进行离散化处理,从而获得其离散模型.随后在Vivado软件环境下通过Verilog语言对该离散模型进行编译.为输出迭代数据,采用双通道AN9767数模转换器芯片,并通过四通道示波器对信号进行采集,在显示屏上呈现生成的相轨图.

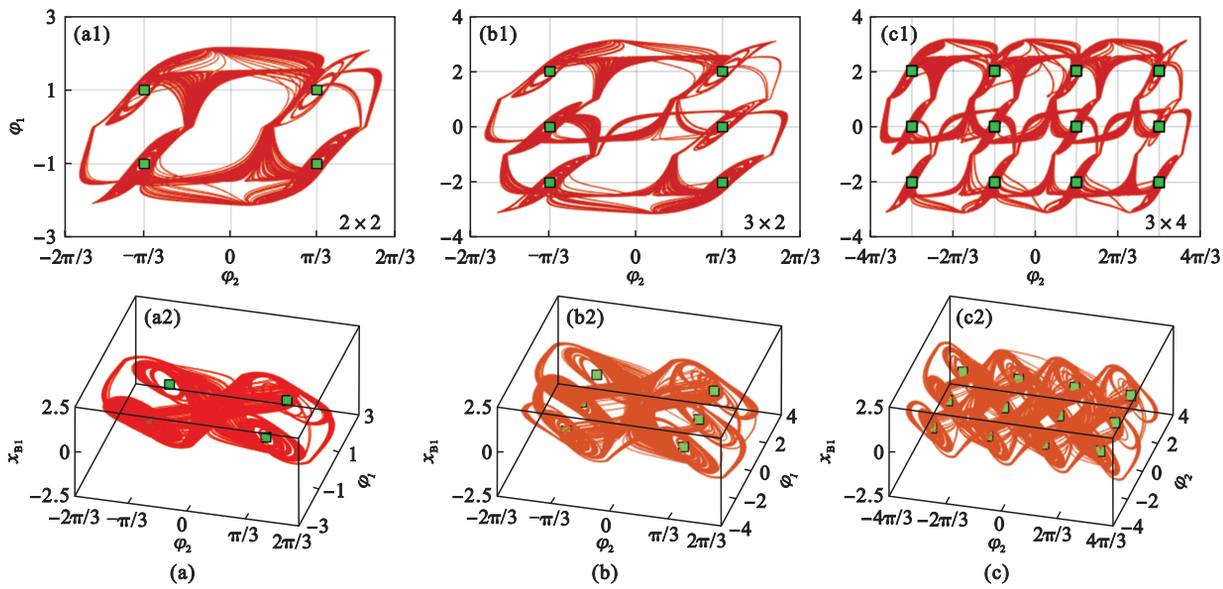


图 8　不同参数下的 $\varphi_1-\varphi_2$ 平面(上)和 $\varphi_1-\varphi_2-x_{B1}$ 三维空间(下)的涡卷分布图

Fig. 8　Scroll distributions in $\varphi_1-\varphi_2$ plane(top) and three-dimensional space of $\varphi_1-\varphi_2-x_{B1}$(bottom) under different parameters

(a)—$M_1=0, M_2=0$; (b)—$N_1=1, M_2=0$; (c)—$N_1=1, M_2=1$.

将系统参数与初始条件通过程序预置，设定参数 $k_1=k_2=1$ 及初始条件[1,1,1,1,1,1]，并将其上传至FPGA平台.调整忆阻参数，生成不同的涡卷数量，当忆阻参数 $M_1=0, M_2=0$ 时，可以生成2×2涡卷吸引子，如图9a所示；当 $N_1=1, M_2=0$ 时，可以生成3×2涡卷吸引子，如图9b所示；当 $N_1=1, M_2=1$ 时，可以生成3×4涡卷吸引子，如图9c所示.显然，图9的实验结果与数值模拟高度吻合，充分验证了该FPGA硬件实验的正确性和可行性.

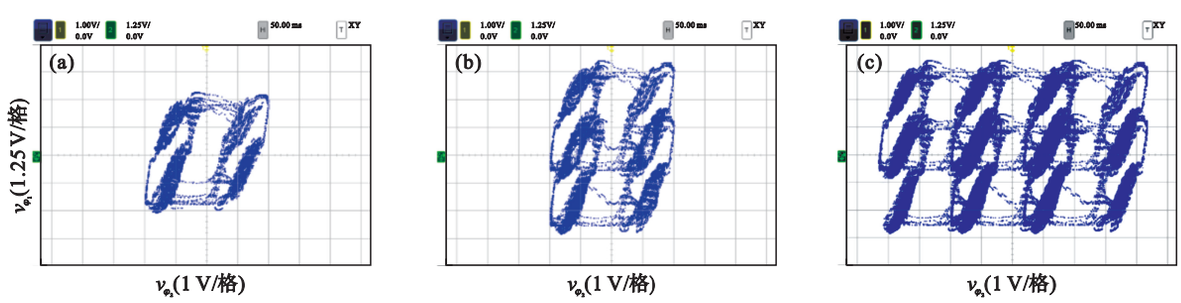


图 9　多涡卷实验结果

Fig. 9　Experimental results of multi-scrolls

(a)—$M_1=0, M_2=0$; (b)—$N_1=1, M_2=0$; (c)—$N_1=1, M_2=1$.

5　图像加密及性能测试

在如今的大数据时代，图像信息的安全传输与存储日益重要.本文提出的耦合细胞神经网络能够生成具有高复杂性和良好随机性的多涡卷混沌序列，且该序列对初始条件和系统参数具有高度敏感性，因此适合作为加密密钥流.基于此，选取系统状态变量($x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, \varphi_1, \varphi_2$)生成混沌序列，并通过归一化与量化处理构造伪随机序列，设计了1种图像加密方案.该方案以系统初始条件作为安全密钥，充分利用混沌序列的随机性与非线性特性，实现了对图像信息的有效加密，并对其性能进行了系统评估.

5.1　图像加密方案

加密过程主要包括混沌序列生成、伪随机序列转换、异或操作、扩散处理以及非重复置换操作.具体步骤如下：

步骤1　读取原始灰度图像，将二维图像矩阵转换为一维向量 $\boldsymbol{P}$($\boldsymbol{P}=\{P_j, j=0,1,2,\cdots,L-1\}$)，获取的图像像素总数为 L.

步骤2　固定典型控制参数，并将初始条件

设为安全密钥.使用忆阻CNN映射生成3个混沌序列(CNN_S_1,CNN_S_2,CNN_S_3),每个序列长度都为L.

步骤3　将混沌序列(CNN_S_1,CNN_S_2,CNN_S_3)分别转换为伪随机序列(Key1,Key2,Key3),伪随机序列的取值范围均为[0,255].转换关系如下:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Key1}=\text{floor}[(\text{CNN_S}_1+100)\times 10^{10}]\bmod 256;\\&\text{Key2}=\text{floor}[(\text{CNN_S}_2+100)\times 10^{10}]\bmod 256;\\&\text{Key3}=\text{floor}[(\text{CNN_S}_3+100)\times 10^{10}]\bmod 256.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

步骤4　为提高加密的安全性,使用多层异或加密,3个伪随机密钥序列分别对图像数据进行像素异或操作,得到像素序列P_L.

步骤5　利用3个伪随机密钥序列进行扩散操作,包括前向扩散和后向扩散2个步骤,增强了密文数据的扩散特性.前向扩散是将像素序列P_L的第1个元素与3个密钥序列的第1个元素相加后取模256,更新序列.然后,将像素序列P_L从第2个元素到最后1个元素,每个元素都与其前1个元素(更新后)以及3个密钥序列的对应位置元素相加后取模256,更新序列.前向扩散过程如下:

$$\left.\begin{aligned}P_L(i)=&\left[P_L(i)+\text{Key1}(i)+\text{Key2}(i)+\right.\\&\left.\text{Key3}(i)\right]\bmod 256,\ i=1;\\P_L(i)=&\left[P_L(i)+P_L(i-1)+\text{Key1}(i)+\text{Key2}(i)+\right.\\&\left.\text{Key3}(i)\right]\bmod 256,\ i=2,\cdots,L.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

后向扩散是将P_L的最后1个元素与3个密钥序列的最后1个元素相加后取模256,更新序列.然后,从倒数第2个元素到第1个元素,每个元素都与其后1个元素(已更新)以及3个密钥序列的对应位置元素相加后取模256,更新序列.后向扩散过程如下:

$$\left.\begin{aligned}P_L(i)=&\left[P_L(i)+\text{Key1}(i)+\text{Key2}(i)+\right.\\&\left.\text{Key3}(i)\right]\bmod 256,\ i=L;\\P_L(i)=&\left[P_L(i)+P_L(i+1)+\text{Key1}(i)+\text{Key2}(i)+\right.\\&\left.\text{Key3}(i)\right]\bmod 256,\ i=L-1,\cdots,1.\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

其中,$P_L(i)$表示P_L的第i个元素.

步骤6　最后再次运用三重异或操作,增强加密强度,确保加密结果的随机性,并将加密后的向量重新整理为图像矩阵.图像解密操作是图像加密的逆过程.

5.2　加密性能测试

使用256像素×256像素的灰度时钟图像测试该图像加密系统.将耦合细胞神经网络模型的初始条件(K_0)设置为K_0=(1,1,1,1,1,1).

为验证密钥敏感性,对原始密钥K_0进行了细微调整后用于解密加密后的图像.表2中列出了原始密钥K_0及6个存在细微差异的密钥K_1至K_6.如图10所示,使用微调后的密钥K_1至K_6解密的图像分别如图10b至10g所示;图10a和图10h分别是原图和使用原始密钥K_0解密后的图像.观察图10可知,使用密钥K_1至K_6解密后的6幅图像均未包含明文图像的任何有效信息,唯有采用原始密钥K_0解密后的图像才成功破译了加密内容.由此可见,该耦合细胞神经网络模型构建的图像加密系统具备显著的密钥敏感性.

表2　原始密钥与6种微调后的密钥

Table 2　Original key and six fine-tuned keys

密钥	x_{A1}	x_{A2}	x_{B1}	x_{B2}	φ_1	φ_2
K_0	1	1	1	1	1	1
K_1	$1+10^{-10}$	1	1	1	1	1
K_2	1	$1+10^{-10}$	1	1	1	1
K_3	1	1	$1+10^{-10}$	1	1	1
K_4	1	1	1	$1+10^{-10}$	1	1
K_5	1	1	1	1	$1+10^{-10}$	1
K_6	1	1	1	1		$1+10^{-10}$

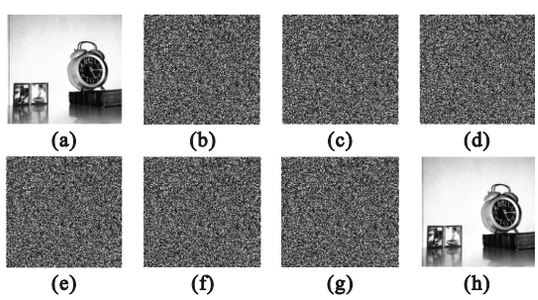


图10　密钥敏感性测试结果

Fig. 10　Key sensitivity test results

(a)—原始图像;(b)—使用K_1解密的图像;(c)—使用K_2解密的图像;(d)—使用K_3解密的图像;(e)—使用K_4解密的图像;(f)—使用K_5解密的图像;(g)—使用K_6解密的图像;(h)—使用K_0解密的图像.

直方图用于表征图像像素强度的分布特性,在图像加密分析中具有重要作用.理想的密文图像应具备高度均匀的直方图分布,以消除统计特征,从而有效抵御基于统计分析的攻击.图11展示了明文图像与密文图像的直方图对比结果:明文图像的直方图方差为283 167.686 3,而密文图像仅为283.905 9,这一显著差异表明密文图像的像素分布更为均匀,有效掩盖了原始统计信息.此外,信息熵作为评估图像信息随机性的关键指

标,对于8 b灰度图像而言,理想值为8.本实验中密文图像的信息熵实测值为7.996 904,与理想值高度接近,验证了加密方案在消除明文图像统计特征方面的有效性.

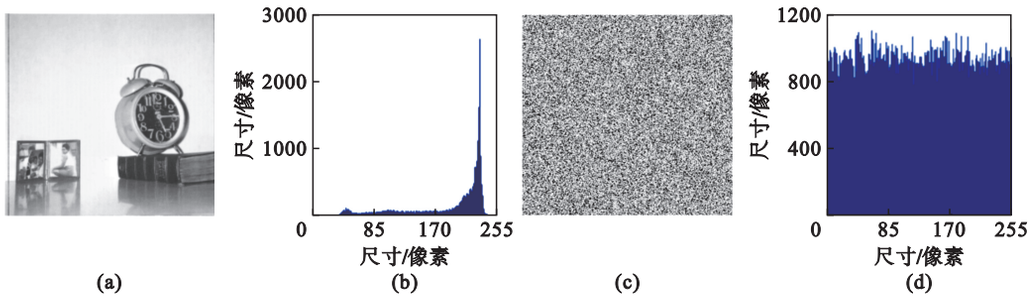


图11 明文与密文图像及其对应直方图

Fig. 11 Plaintext and ciphertext images and their corresponding histograms

(a)—明文图像;(b)—明文图像直方图;(c)—密文图像;(d)—密文图像直方图.

对于自然图像而言,相邻像素的相关系数通常更接近-1或+1;而理想密文图像的相关系数则接近于0.为验证加密效果,本文随机选取5 000对相邻像素,分别计算了明文与密文图像在水平、垂直及对角线方向上的相关系数.结果如图12所示:明文图像的像素集中分布于平面对角线附近,如图12a所示,显示出强烈的线性相关性,其3个方向的相关系数均高达0.9以上;与之形成鲜明对比的是,密文图像的像素均匀散布于整个平面,如图12b所示,且在3个方向上的相关系数均降至接近0的水平.这一结果充分表明,本文的加密算法不仅能有效消除原始图像中的强关联性,还能有效抵御统计攻击.表3展示了文献中相关系数的对比结果,与现有研究相比,本文的加密安全性表现相对优异.

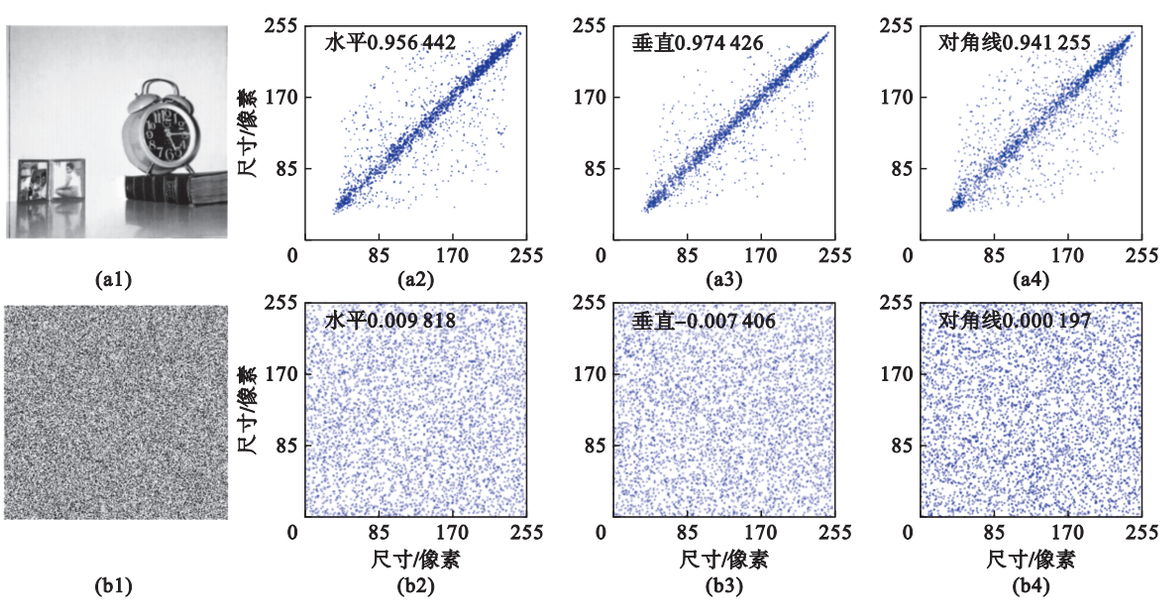


图12 明文和密文图像的像素散点图

Fig. 12 Pixel scatter plots of plaintext and ciphertext images

(a1)—明文图像;(a2)—明文图像水平方向上的散点图;(a3)—明文图像垂直方向上的散点图;(a4)—明文图像对角线方向上的散点图;(b1)—密文图像;(b2)—密文图像水平方向上的散点图;(b3)—密文图像垂直方向上的散点图;(b4)—密文图像对角线方向上的散点图.

明文图像与密文图像之间的差异可以通过像素变化率(NPCR)和统一平均变化强度(UACI)来量化.对于灰度图像,理想的NPCR和UACI值分别为99.609 4%和33.463 5%.本文选取了8组具有代表性的图像位置,分别对原始图像和仅有1个像素差异的修改图像进行加密分析,结果如表4所示.实验数据表明,本文采用的加密方案对像素微小变化表现出优异的敏感性,所有测试位置的NPCR值均超过99.5%,UACI值均在理想值33.463 5%的合理波动范围内.这充

分证明了该算法对明文微小变化的高度敏感性,能够有效抵抗差分密码分析攻击,具备良好的安全特性.

表3　不同算法间相关系数的比较

Table 3　Comparison of correlation coefficients among different algorithms

参考文献	相关系数		
	水平	垂直	对角线
本文	0.009 8	−0.007 4	0.000 2
[28]	−0.003 1	−0.019 6	−0.011 0
[29]	0.003 6	−0.010 0	0.010 5
[30]	0.006 5	0.003 1	0.007 8

表4　明文与密文图像中8个位置的NPCRs和UACIs

Table 4　NPCRs and UACIs at eight locations in plaintext and ciphertext images

位置(行,列)	NPCR/%	UACI/%
(85, 170)	99.603 3	34.360 5
(138, 256)	99.610 9	33.448 3
(246, 248)	99.517 8	33.480 2
(108, 235)	99.545 3	33.579 9
(218, 240)	99.574 3	33.454 3
(210, 223)	99.533 1	33.682 1
(28, 247)	99.580 4	33.395 2
(90, 241)	99.574 3	33.421 1

6　结　　语

本文围绕网格多涡卷吸引子的生成与调控问题,构建了1种新型耦合细胞神经网络模型.该模型通过将具有余弦激活函数的CNN−A与具有忆阻激活函数的CNN−B进行耦合,并引入忆阻模拟电磁辐射效应,从而生成了可控的网格多涡卷.通过理论分析与数值仿真,揭示了网格多涡卷吸引子的数量及空间分布可由SNF平衡点的个数及其分布决定,且通过调节忆阻参数可以控制SNF平衡点的生成,实现对涡卷数量的精确调控.此外,基于FPGA硬件平台完成了系统的电路实验验证,实验结果与数值仿真结果高度一致,进一步证明了该多涡卷生成方法的有效性.最后,基于该耦合细胞神经网络模型的复杂动力学特性,设计了1种图像加密方案.通过密钥敏感性、信息熵和像素相关性等安全性指标的测试,证实了该加密方案具有良好的安全性能和应用潜力.综上所述,本文的研究为网格多涡卷吸引子的生成机理分析与可控调制提供了1种新的思路,也为其在信息安全和混沌工程等领域的应用奠定了理论与实验基础.

参考文献:

[1] Lai Q, Wan Z Q, Kuate P D K. Generating grid multi-scroll attractors in memristive neural networks [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2023, 70(3): 1324−1336.

[2] Yu F, Shen H, Yu Q L, et al. Privacy protection of medical data based on multi-scroll memristive Hopfield neural network [J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2023, 10(2): 845−858.

[3] 安新磊, 李治甫, 薛睿, 等. 多涡卷保守混沌系统的构建及在图像加密中的应用[J]. 电子与信息学报, 2025, 47(11): 4470−4481.
(An Xin-lei, Li Zhi-fu, Xue Rui, et al. Construction of multi-scroll conservative chaotic system and its application in image encryption [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2025, 47(11): 4470−4481.)

[4] Yu F, Zhang Z N, Shen H, et al. FPGA implementation and image encryption application of a new PRNG based on a memristive Hopfield neural network with a special activation gradient[J]. *Chinese Physics B*, 2022, 31(2): 020505.

[5] Qin M H, Lai Q. Expanded multi-scroll attractor system analysis and application for remote sensing image encryption [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2024, 125: 125−146.

[6] Ding P F, Li K, Wang Z X. Generation multi-scroll chaotic attractors using composite sine function and its application in image encryption[J]. *Physica Scripta*, 2024, 99(4): 045221.

[7] He P, Liu H W, Li G D, et al. A general method for generating multi-scroll and multi-wing chaotic systems and its implementation of attractor reproduction [J]. *Physica Scripta*, 2023, 98(8): 085232.

[8] Yan D W, Ji'e M S, Wang L D, et al. Generating novel multi-scroll chaotic attractors via fractal transformation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 107(4): 3919−3944.

[9] Yu F, Kong X, Mokbel A A M, et al. Complex dynamics, hardware implementation and image encryption application of multiscroll memristive Hopfield neural network with a novel local active memristor[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2023, 70(1): 326−330.

[10] Yu F, Wu C R, Lin Y, et al. Dynamic analysis and hardware implementation of multi-scroll Hopfield neural networks with three different memristor synapses [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(14): 12393−12409.

[11] Wan Q Z, Li F, Chen S M, et al. Symmetric multi-scroll attractors in magnetized Hopfield neural network under pulse controlled memristor and pulse current stimulation[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2023, 169(4): 113259.

[12] Wang N, Zhang G S, Li H Z. Parametric control for multi-scroll attractor generation via nested sine−PWL function[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 68(3): 1033−1037.

[13] Yang Y, Huang L L, Xiang J H, et al. Three-dimensional sine chaotic system with multistability and multi-scroll attractor[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, 69(3): 1792−1796.

[14] Lin H R, Wang C H, Sun Y C, et al. Generating n-scroll chaotic attractors from a memristor-based magnetized Hopfield neural network[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2023, 70(1): 311−315.

[15] Zhang S, Li C B, Zheng J H, et al. Generating any number of initial offset-boosted coexisting Chua's double-scroll attractors via piecewise-nonlinear memristor [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(7): 7202−7212.

(下转第47页)