

李元燮,刘财. 基于理性扩展热力学的 L-S 热声弹性理论框架. 吉林大学学报(地球科学版), 2024, 54(2): 655-687. doi: 10.13278/j.cnki.jjuese.20230002.

Li Yuanxie, Liu Cai. Theoretical Framework of L-S Thermoacoustoelasticity Based on Rational Extended Thermodynamics. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2024, 54 (2): 655-687. doi:10.13278/j.cnki.jjuese.20230002.

基于理性扩展热力学的 L-S 热声弹性理论框架

李元燮, 刘 财

吉林大学地球探测科学与技术学院, 长春 130026

摘要:本文基于连续介质力学和理性扩展热力学分析流程,将 L-S(Lord and Shulman)热弹性理论与声弹性理论相结合,建立 L-S 热声弹性理论的基本框架,包括运动学、力学与热力学、本构方程与演化方程、基本场方程四部分。在运动学部分,区分了 Lagrange 描述和 Euler 描述,以及 3 种不同的状态和构形,同时针对热声弹性情况定义了两类从自然状态到初始状态的转变过程;在力学与热力学部分,给出了质量守恒定律、动量守恒定律、角动量守恒定律、能量守恒定律以及熵产不等式,从而引出经典不可逆热力学的局限性;在本构方程与演化方程部分,介绍了扩展不可逆热力学原理,并基于理性扩展热力学流程,推导了从自然状态到初始状态、从初始状态到最终状态的热声弹性本构方程与演化方程,将热流作为本构自变量并考虑了热流与应变和温度的相关性;在最后一部分给出了基本场方程的运动方程形式和适用于数值模拟的一阶速度-应力-热流-温度微分方程。

关键词: L-S 理论;热弹性;声弹性;连续介质力学;理性扩展热力学

doi: 10.13278/j.cnki.jjuese.20230002

中图分类号: P631.4

文献标志码: A

Theoretical Framework of L-S Thermoacoustoelasticity Based on Rational Extended Thermodynamics

Li Yuanxie, Liu Cai

College of GeoExploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China

Abstract: This paper combines L-S thermoelasticity with acoustoelasticity based on continuum mechanics and analysis process of rational extended thermodynamics to establish the basic framework of L-S thermoacoustoelasticity, including four components: kinematics, mechanics and thermodynamics, constitutive equations and evolution equations, and fundamental field equations. In the kinematic part, Lagrangian description and Eulerian description are distinguished, as well as three different states and

收稿日期: 2023-01-06

作者简介: 李元燮(1994-), 男, 朝鲜族, 博士研究生, 主要从事热弹性介质地震波场正演模拟方面的研究, E-mail: 1170848847@qq.com

基金项目: 国家自然科学基金项目(41874125, 41430322); 国家重点研发计划项目(2018YFC0603701, 2017YFC06061301)

Supported by the National Natural Science Foundation of China (41874125, 41430322) and the National Key Research and Development Program of China (2018YFC0603701, 2017YFC06061301)

configurations, while two types of transition processes from the natural state to the initial state are defined for the case of thermoacoustoelasticity; In the mechanics and thermodynamics part, the laws of conservation of mass, conservation of momentum, conservation of angular momentum, conservation of energy, and the entropy production inequality are given, which lead to the limitations of classical irreversible thermodynamics; In the part of the constitutive equations and evolution equations, the principle of extended irreversible thermodynamics is introduced, and the constitutive equations and evolution equations of thermoacoustoelasticity from the natural state to the initial state and those from the initial state to the final state are derived based on the process of rational extended thermodynamics, taking heat flux as the constitutive independent variable and considering the correlation of heat flux with strain and temperature; In the last part, the equations of motion and the first-order velocity-stress-heat flux-temperature differential equations for numerical simulations are given.

Key words: L - S theory; thermoelasticity; acoustoelasticity; continuum mechanics; rational extended thermodynamics

0 引言

随着对地球深层^[1]非常规油气资源、深部矿产资源以及深部地热资源^[2]勘探需求和开采深度的增加,复杂介质中地震波传播的物理机制研究所要考虑的因素也越来越多。在这些因素之中,温度和压力的变化对地震波传播特性的影响一直是研究的热点^[3-5]。前人为了分别研究弹性波传播特性与温度变化、压力变化的关系,引入了热弹性理论^[6-11]和声弹性理论^[12-16]。

热弹性理论研究物体在弹性范围内温度变化和应力、应变之间的关系。对于热弹性理论而言,热传导过程自发且不可逆,与熵产有关,等温和绝热条件假设不复存在,本构关系除了应力和应变之外还需要考虑温度和熵之间的关系;因为经典热力学理论仅对热平衡状态有效,不足以描述热弹性过程,所以需要利用不可逆过程的热力学^[17-21]来描述^[6]。Biot^[6]基于不可逆热力学原理和傅里叶热传导定律,开创了耦合热弹性理论,为热弹性理论的快速发展和应用奠定了坚实的基础。然而,由于傅里叶热传导定律是扩散方程,导致热传输方程是抛物型方程,从而产生热传播速度无穷大的悖论。为克服这一悖论,实现有限的热传播速度(即第二声效应^[22]),一些学者提出了广义热弹性理论,如对 L - S(Lord-Shulman)理论^[7]、G - L(Green-Lindsay)理论^[8]、G - N(Green-Naghdi)理论^[9]等进行研究。其中,L - S 理论^[7]基于修正的傅里叶定律,即 Maxwell-Cattaneo-Vernotte(MCV)方程^[22-27],通过引入一个时间常数(热流弛豫时间)来表示建立热传

导稳态所需的时间延迟,使对应的热传输方程是一个双曲型方程,热传播具有了波动性质。尽管 MCV 方程是允许第二声效应的最简单、最经典的方程,然而,它从抛物型方程到双曲型方程的转变过程并不严格;这是因为不可逆热力学沿用了可逆热力学的局部平衡假设,即热力学过程的任一时刻熵产都为正。但在实际情况中,熵是以振荡的形式表现的,而非单调递增^[28]。当热力学过程时间与分子碰撞中的弛豫时间或电子、声子之间微尺度热化时间相当时,热力学状态的转变以快速瞬态形式发生,在此过程中热力学“状态”在移动之前,可能没有足够的时间达到热力学平衡。结果,热力学过程变得不可逆,因此局部平衡假设失去依据,必须扩展经典不可逆热力学的框架,从宏观扩展到介观状态,来解释快速瞬态效应和短时响应的不可逆性^[29],从根本上消除傅里叶热传导定律导致的悖论。

20 世纪 60 年代以来,处理连续介质的理性热力学(rational thermodynamics, RT)提出^[30-31],要求 Clausius-Duhem 不等式必须对质量守恒定律、动量守恒定律、能量守恒定律和本构方程的所有解成立,通过 Coleman-Noll 流程,Clausius-Duhem 不等式可以作为本构函数通用性的约束,局部平衡不再需要作为先验假设。理性热力学充分利用了连续介质力学的物质标架无差异原则,使本构函数必须不包含惯性项^[32],热力学只需确定传输系数的不等式(如热导率)。Truesdell^[33-34]视理性热力学为非平衡热力学的真正开端。理性热力学用良好的论据和对基本原理的澄清丰富了热力学,适当强调了熵不等式对本构函数形式起到的限制性作用。还有一个

明确的声明,即熵不等式必须对所有的热力学过程(即场方程的解)都成立,从而,通过将熵流视为先验的、与热流无关的本构量,为将 Clausius-Duhem 不等式修改为真正的熵不等式提供了动力^[35-36],并且通过引入 Lagrange 乘子来利用熵不等式^[37]。这种改进,即 Müller-Liu 流程,成为理性扩展热力学(rational extended thermodynamics, RET)的重要组成部分。Müller 和 Liu 的理性扩展热力学填补了理性热力学与气体动力学之间的空白^[38]。

扩展不可逆热力学(extended irreversible thermodynamics, EIT)^[39-40]是在经典不可逆热力学的传统之下,用耗散通量作为独立变量的热力学理论。对于热弹性固体,经典不可逆热力学变量包括内能、密度、变形张量、绝对温度、熵等,而扩展不可逆热力学添加了热流以及热流通量(flux of heat-flux)作为独立变量。Machlup 等^[41]发展了取决于通量的广义熵假设,这构成了扩展不可逆热力学的基本假设。Nettleton^[42]提出了一种更直接应用于流体的公式。Müller^[35-36]受分子运动论的启发,独立地提出了类似的模型。随后, Lambermont 等^[43]重新发现了热传导的广义 Gibbs 方程。1976 年以后,广义熵假设开始得到广泛认可和接受,激发了许多研究^[44-48], Jou 等^[49-50]和 Sieniutycz 等^[51]对这些后续的研究进行了综述。Jou 等^[40]提出了扩展不可逆热力学的理性版本,也称之为理性扩展热力学,这与 Müller 和 Liu 提出的理性扩展热力学存在密切联系。

声弹性理论基于有限变形连续介质力学^[52-54],从宏观唯象角度研究固体应力状态与弹性波速度之间的关系。在存在初始应力的固体中,弹性波速度不仅取决于材料的密度、二阶和三阶弹性常数,还与固体的初始应力状态有关^[55]。声弹性理论的发展源于测量晶体三阶弹性常数^[56]和多晶材料残余应力的需要,后来,随着超声波原理与技术应用于测量三阶弹性常数,声弹性理论逐渐成形^[12-16,57]。

已经有一些学者研究过应力场和热场的耦合作用。早期的研究基于有限变形弹性理论和耦合热弹性理论,不涉及高阶弹性常数^[58-66]。后来 Iesan^[67-69]基于这些研究发展了预应力作用下的线性热弹性理论和非线性热弹性理论。之后又有一些学者发展了预应力热弹性动力学理论^[70-74]。随着三阶弹性理论和声弹性理论的发展成形,一些学者在这些理论框架下考虑热效应^[16,75-78]。最近,Chen 等^[4]基于声弹性理论和 G-L 热弹性理论,建立了

声热弹性模型。但截至目前,尚未有学者将扩展不可逆热力学原理引入预应力作用下的热弹性理论。

本文基于连续介质力学和理性扩展热力学分析流程,将 L-S 热弹性理论与声弹性理论相结合,建立 L-S 热声弹性(thermoacoustoelasticity, TAE)理论的基本框架,包括运动学、力学与热力学、本构方程与演化方程、基本场方程四部分。基于理性扩展热力学流程,推导了从自然状态到初始状态、从初始状态到最终状态的热声弹性本构方程与演化方程,将热流作为本构自变量并考虑了热流与应变和温度的相关性;给出了基本场方程的运动方程形式和适用于数值模拟的一阶速度-应力-热流-温度微分方程,包括等温形式的方程和绝热形式的方程,并基于基本场方程进行了平面波分析。

1 L-S 热声弹性理论框架

在声弹性理论中,根据弹性体机械变形状态,可以定义 3 种状态:自然状态、初始状态和最终状态^[16],关于问题的描述,详见附录 A.1。在热声弹性情况下,我们除了考虑 3 种机械变形状态之外,还需考虑与之耦合的热状态,即温度、熵、热流的状态。Gurtin 等^[79]指出,如果温度为 $T^{[R]}$ (上标[R]代表参考状态)的参考构形对所有扰动渐进稳定,则物体最终应该在 $T^{[R]}$ 松弛到未变形的状态,而 $T^{[R]}$ 同时也是热力学平衡态温度,即 $E \rightarrow 0$, $T \rightarrow T^{[R]}$ (E 为应变, T 为温度)。此时的参考构形中没有应力,弹性张量是对称半正定张量,比热容非负。这一参考构形被称为自然参考构形。在接下来的热声弹性理论中,我们定义自然状态为无初始应力和初始应变、无初始热流、系统处于热平衡、温度保持为自然温度 $T^{[N]}$ 的状态。从自然状态到初始状态的过程可以暂且分为比较简单的两类,而初始状态也相应地存在两类情况。

第一类过程(Type I):加载热弹性力(固定大小和方向的纯机械力和/或输入热源),由于在热弹性模型中机械作用和热作用耦合,因此产生初始应力、应变、熵变、温度梯度、热流,系统构形改变;假设在初始状态已经达到热平衡,温度梯度和热流消失。因此可以定义第一类初始状态:只有初始应力、初始应变、初始熵和恒定初始温度已知,没有初始热流和温度梯度分布的初始状态。这个定义有些类似于传热学的第一类边界条件,即在边界上给定了温度值。

第二类过程(Type II):加载热弹性力,产生初

始应力、应变、熵变、温度梯度、热流,系统构形改变;但在初始状态,新的热平衡尚未建立。因此可以定义第二类初始状态:具有初始应力、初始应变、初始熵、初始温度和初始热流的初始状态。同样,这类类似于传热学的第二类边界条件,即在边界上给定了热流值。

以地球深部作为所要研究的连续体,如果选取某一时刻作为初始时刻,选取该时刻的状态为初始状态,则从自然状态到初始状态的预变形过程实际上是第二类过程,因为地球内部总是存在热流和地温梯度。

我们在此约定,变量的上标[N]、[I]、[F]分别表示所处的自然状态、初始状态和最终状态。向量 $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{x}$ 分别代表质点位置的自然坐标表示、初始坐标表示和最终坐标表示;3个向量在各自构形中的分量分别用希腊文下标、大写罗马文下标和小写罗马文下标表示。在本文中,除非特别强调,对物理量和物理定律一致使用 Lagrange 描述。

1.1 运动学关系和守恒定律

连续介质力学理论框架主要分为三部分:运动学、守恒定律和本构关系。热弹性理论、声弹性理论和热声弹性理论都是在该理论框架下构建的,并且在运动学部分和守恒定律中的质量守恒定律、动量守恒定律以及角动量守恒定律部分,热声弹性理论与声弹性理论一致。我们将 L-S 热声弹性理论的运动学和守恒定律的相关方程写出如下,其推导过程参见附录 A.2、A.3。

应变-位移关系:

$$\begin{cases} [N] \rightarrow [I], E_{\alpha\beta}^{[I]} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^{[I]} + u_{\beta,\alpha}^{[I]} + u_{\gamma,\alpha}^{[I]}u_{\gamma,\beta}^{[I]}); \\ [I] \rightarrow [F], \Delta E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^{[F]} - E_{\alpha\beta}^{[I]} \approx \\ \frac{1}{2}(\Delta u_{\alpha,\beta} + \Delta u_{\beta,\alpha} + u_{\gamma,\alpha}^{[I]}\Delta u_{\gamma,\beta} + \Delta u_{\gamma,\alpha}u_{\gamma,\beta}^{[I]}). \end{cases} \quad (1)$$

式中:[N]→[I]表示从自然状态到初始状态;[I]→[F]表示从初始状态到最终状态; $\alpha, \beta, \gamma = \chi, \varphi, \zeta$,为自然参考构形的坐标轴;“ α ”、“ β ”表示对参考坐标的偏导数; $u_{\alpha}^{[I]}$ 为初始位移分量; $E_{\alpha\beta}^{[I]}$ 为初始应变分量; $E_{\alpha\beta}^{[F]}$ 为最终应变分量; $\Delta E_{\alpha\beta}$ 为增量应变分量; Δu_{α} 为增量位移分量。采用爱因斯坦重复指标隐式求和的约定。

质量守恒定律:

$$[N] \rightarrow [I], \quad \rho^{[I]} \cong \frac{\rho^{[N]}}{1 + e_{\eta\eta}^{[I]}} \approx \rho^{[N]}(1 - e_{NN}^{[I]}). \quad (2)$$

式中: $\rho^{[N]}$ 、 $\rho^{[I]}$ 分别为物体在自然状态、初始状态的密度; $e_{\eta\eta}^{[I]}$ 和 $e_{NN}^{[I]}$ 分别为 $e_{\alpha\beta}^{[I]}$ 和 $e_{IJ}^{[I]}$ 的体积应变分量。 $e_{\alpha\beta}^{[I]}$ 为 $E_{\alpha\beta}^{[I]}$ 的线性项,即 $e_{\alpha\beta}^{[I]} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^{[I]} + u_{\beta,\alpha}^{[I]})$; $e_{IJ}^{[I]}(I, J = X, Y, Z)$ 为 $E_{IJ}^{[I]}$ 的线性项,即 $e_{IJ}^{[I]} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{[I]} + u_{J,I}^{[I]})$ 。由于采用重复指标求和约定,因此有 $e_{\eta\eta}^{[I]} = e_{\chi\chi}^{[I]} + e_{\varphi\varphi}^{[I]} + e_{\zeta\zeta}^{[I]}$, $e_{NN}^{[I]} = e_{XX}^{[I]} + e_{YY}^{[I]} + e_{ZZ}^{[I]}$ 。

动量守恒定律:

$$\begin{cases} [N] \rightarrow [I], \sigma_{IJ}^{[I]} + \rho^{[I]}f_I^{[I]} = 0; \\ [I] \rightarrow [F], (\Delta T_{IJ}^{PK2} + \delta_{IK}\sigma_{IJ}^{[I]}\Delta u_{I,K})_{,J} + \rho^{[I]}\Delta f_I = \\ \Delta T_{IJ}^{PK1} + \rho^{[I]}\Delta f_I = \rho^{[I]}\Delta \ddot{u}_I. \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\sigma_{IJ}^{[I]}$ 为 Cauchy 初始应力分量; $f_I^{[I]}$ 为初始状态下单位质量的体力分量; $\rho^{[I]}f_I^{[I]}$ 为初始状态下单位体积的体力分量; ΔT_{IJ}^{PK1} 、 ΔT_{IJ}^{PK2} 分别为增量第一类 Piola-Kirchhoff 应力分量、增量第二类 Piola-Kirchhoff 应力分量; δ_{IK} 为克罗内克张量分量; Δf_I 为导致叠加运动的动态体力分量; $I, J, K = X, Y, Z$;变量上方两点表示二阶时间导数。

角动量守恒定律:

$$\begin{cases} [N] \rightarrow [I] \text{ (或 } [I] \rightarrow [F]) : \\ \sigma_{IJ} = \sigma_{JI}; \\ T_{IJ}^{PK2} = T_{JI}^{PK2}; \\ T_{IJ}^{PK1}F_{JI} = F_{IJ}T_{JI}^{PK1}. \end{cases} \quad (4)$$

式中, F_{IJ} 为任意两种构形之间的变形梯度分量。式(4)忽略了表示状态的上标,因为它对所有状态都成立。

热力学第一定律(能量平衡方程):

$$\begin{cases} \text{Type I: } [I], \rho^{[I]}\dot{U}_s^{[I]} = \sigma_{IJ}^{[I]}\dot{e}_{IJ}^{[I]}. \\ \text{Type II: } [I], \rho^{[I]}\dot{U}_s^{[I]} = \sigma_{IJ}^{[I]}\dot{e}_{IJ}^{[I]} - q_{K,K}^{[I]} + \rho^{[I]}R_s^{[I]}; \\ [F], \rho^{[F]}\dot{U}_s^{[F]} = T_{IJ}^{PK2[F]}\dot{E}_{IJ}^{[F]} - q_{K,K}^{[F]} + \rho^{[F]}R_s^{[F]}. \end{cases} \quad (5)$$

式中:Type I 表示第一类过程;Type II 表示第二类过程; $U_s^{[I]}$ 、 $U_s^{[F]}$ 分别为初始状态、最终状态的比内能;变量上方一点表示一阶时间导数; $q_K^{[I]}$ 、 $q_K^{[F]}$ 分别为初始状态、最终状态下,以初始参考构形表面单位面积为量度的热流分量; $R_s^{[I]}$ 为从自然状态到初始状态变化过程中单位时间内单位质量的热供(比热供); $R_s^{[F]}$ 为最终状态单位时间内单位质量的热供。

热力学第二定律(Clausius-Duhem 不等式):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Type II: } [I], \rho^{[I]} (\dot{\psi}_s^{[I]} + S_s^{[I]} \dot{T}^{[I]}) - \sigma_{IJ}^{[I]} \dot{e}_{IJ}^{[I]} + \\ \frac{1}{T^{[I]}} q_K^{[I]} T_{,K}^{[I]} = -T^{[I]} \zeta_s^{[I]} \geq 0; \\ [F], \rho^{[F]} (\dot{\psi}_s^{[F]} + S_s^{[F]} \dot{T}^{[F]}) - T_{IJ}^{PK2[F]} \dot{E}_{IJ}^{[F]} + \\ \frac{1}{T^{[F]}} q_K^{[F]} T_{,K}^{[F]} = -T^{[F]} \zeta_s^{[F]} \geq 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

式中: $\psi_s^{[I]}$ 、 $\psi_s^{[F]}$ 分别为初始状态、最终状态的比亥姆霍兹自由能,满足 $\psi_s^{[I]} = U_s^{[I]} - T^{[I]} S_s^{[I]}$ 、 $\psi_s^{[F]} = U_s^{[F]} - T^{[F]} S_s^{[F]}$; $S_s^{[I]}$ 、 $S_s^{[F]}$ 分别为初始状态、最终状态的比熵; $T^{[I]}$ 、 $T^{[F]}$ 分别为初始状态、最终状态的温度; $\zeta_s^{[I]}$ 、 $\zeta_s^{[F]}$ 分别为初始状态、最终状态的熵产。

1.2 基于理性扩展热力学的L-S热声弹性本构方程和演化方程

L-S热弹性理论基于热传导的MCV方程:

$$q_I + \tau_{IJ} \dot{q}_J = -K_{IJ} T_{,J}. \quad (7)$$

式中: τ_{IJ} 为热流弛豫时间张量分量; K_{IJ} 为热导率张量分量。式(7)忽略了状态和构形变化。MCV方程通过引入热流弛豫时间,克服了傅里叶热传导定律导致的热扰动传播速度无穷大的悖论;但得到了电报形式的双曲型热传输方程,从而导致熵产不再保持非负性。问题原因在于 MCV 方程违反了经典不可逆热力学的基本假设——局部平衡假设,从而未能超越经典不可逆热力学的局限性。详见附录 A.4。

由于经典不可逆热力学的局限性,一些学者将其从宏观扩展到介观状态,称为扩展不可逆热力学^[39-40]。扩展不可逆热力学原理参见附录 A.5.1。其主要思想是用耗散通量作为本构关系中的额外自变量。因为在高频情况下,耗散通量一般是快速变量,经过短暂的弛豫时间之后恢复到局部平衡值,因此在小时间尺度内将其作为自变量是合理的。对于热弹性理论而言,耗散通量即热流和热流的通量。Jou 等^[40]基于扩展不可逆热力学的标准描述,采用理性热力学^[80-81]方法,提出了理性描述,即理性扩展热力学。理性扩展热力学提供了基于扩展不可逆热力学推导连续介质本构方程的流程,由于使用了Lagrange乘数,使得公式形式更为优雅。

我们根据 Jou 等^[39]的流程,基于理性扩展热力学推导热声弹性本构方程和演化方程,流程参见附录 A.5.2。对此,我们只关注从初始状态到最终状态的过程。在各向同性情况下,可以得到以下本构方程。

应力本构方程:

$$T_{IJ}^{PK2[F]} = T_{IJ}^{PK2}(t = t^{[F]}) =$$

$$\rho^{[F]} \frac{\partial \psi_s[E_{IJ}(t), \theta(t), q_K(t), t]}{\partial E_{IJ}(t)} \Big|_{\substack{t=t^{[F]} \\ \dot{\theta}(t)=0 \\ \dot{q}_K(t)=0}}. \quad (8)$$

式中: t 为时间; θ 为非平衡温度。当 $t = 0$ 时, $\theta(0) = T^{[I]}$, $q_K(0) = q_K^{[I]}$, $\psi_s[E_{IJ}(0), \theta(0), q_K(0), 0] = \psi_s^{[I]}$; 当 $t = t^{[F]}$ 即最终时刻时, $\theta(t^{[F]}) = T^{[F]}$, $q_K(t^{[F]}) = q_K^{[F]}$, $\psi_s[E_{IJ}(t^{[F]}), \theta(t^{[F]}), q_K(t^{[F]}), t^{[F]}] = \psi_s^{[F]}$ 。式(8)右端的偏导项表示在非平衡温度不变、热流不变的情况下的最终时刻的值。

熵本构方程:

$$S_s^{[F]} = S_s(t = t^{[F]}) = - \frac{\partial \psi_s(E_{IJ}(t), \theta(t), q_K(t), t)}{\partial \theta(t)} \Big|_{\substack{t=t^{[F]} \\ \dot{E}_{IJ}(t)=0 \\ \dot{q}_K(t)=0}}. \quad (9)$$

熵流本构方程:

$$J_K^{S[F]} = J_K^{S_s}(t = t^{[F]}) = \frac{q_K^{[F]}}{\theta^{[F]}}. \quad (10)$$

式中, $J_K^{S_s}$ 为广义熵流向量的分量。

热流产本构方程:

$$\zeta_K^{q[F]} = - \frac{q_K^{[F]}}{\tau^{[F]}}. \quad (11)$$

式中, $\zeta_K^{q[F]}$ 为热流产(production of heat-flux)向量的分量; $\tau^{[F]}$ 为各向同性热流弛豫时间。

而如果考虑压热效应,即热流与应变相关,则有热流的演化方程为

$$\dot{q}_I^{[F]} = - \frac{da_{[RET]}(t)}{d\theta(t)} \Big|_{t=t^{[F]}} \theta_{,I}^{[F]} - b^{[F]} q_I^{[F]} - \frac{\partial q_I(t)}{\partial E_{JK}(t)} \Big|_{t=t^{[F]}} E_{JK}^{[F]} - \frac{\partial q_I(t)}{\partial \theta(t)} \Big|_{t=t^{[F]}} \theta^{[F]}. \quad (12)$$

其中:

$$b^{[F]} = \frac{1}{\tau^{[F]}}; \frac{da_{[RET]}(t)}{d\theta(t)} \Big|_{t=t^{[F]}} = b^{[F]} K^{[F]}. \quad (13)$$

式中, $K^{[F]}$ 为各向同性热导率。

如果初始非平衡温度梯度为0,即 $\theta_{,I}^{[I]} =$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X_I} \Big|_{t=0} = T_{,I}^{[I]} = 0, \text{ 则有 } \left\{ \begin{array}{l} q_I^{[I]} = q_I(t=0) = 0; \\ \frac{\partial q_I(t)}{\partial E_{JK}(t)} \Big|_{t=0} = 0; \\ \frac{\partial q_I(t)}{\partial \theta(t)} \Big|_{t=0} = 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

1.3 本构方程和演化方程的线性化

线性热弹性本构方程基于以下假设:1)参考构形的温度为 $T^{[R]}$;2) T 处处接近 $T^{[R]}$;3)位移梯度

和 $\nabla T / T^{[R]}$ 处处趋于 0;4) 考虑到快速瞬态过程, 参考构形中 $\dot{\mathbf{q}}_R^{[R]} = \dot{\mathbf{q}}_R^{[R]} = 0$ (下标 R 代表参考构形(自然、初始或最终构形)坐标轴)。对于热声弹性情况, 假定物体在初始状态和最终状态都是热超弹性的, 移除外部载荷后, 会恢复到自然状态。而且, 泰勒展开式应当保留应变三阶项。

1.3.1 从自然状态到初始状态

对于从自然状态到初始状态的过程, 我们假定存在一个基于耦合热弹性理论的静态变形过程, 服从傅里叶定律, 不涉及扩展不可逆热力学。于是, 以自然构形为参考构形, 初始状态下亥姆霍兹自由能的本构方程可以表示为

$$\rho^{[N]} \psi_s^{[I]} = \frac{1}{2} C_{a\beta\gamma\delta}^{[iso][N]} E_{a\beta}^{[I]} E_{\gamma\delta}^{[I]} + M_{a\beta}^{[N]} (T^{[I]} - T^{[N]}) - \frac{1}{2} \rho^{[N]} \frac{c_s^{[E][N]}}{T^{[N]}} (T^{[I]} - T^{[N]})^2 + \frac{1}{6} C_{a\beta\gamma\delta\epsilon\eta}^{[iso][N]} E_{a\beta}^{[I]} E_{\gamma\delta}^{[I]} E_{\epsilon\eta}^{[I]} + \dots \quad (15)$$

其中:

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_s^{[I]} &= \psi_s(E_{a\beta}^{[I]}, T^{[I]}) - \psi_s(0, T^{[N]}) = \psi_s(E_{a\beta}^{[I]}, T^{[I]}) - 0; \\ C_{a\beta\gamma\delta}^{[iso][N]} &= \rho^{[N]} \frac{\partial^2 \psi_s(E_{a\beta}^{[I]}, T^{[I]})}{\partial E_{a\beta}^{[I]} \partial E_{\gamma\delta}^{[I]}} \bigg|_{\substack{E_{a\beta}^{[I]} = 0 \\ T^{[I]} = T^{[N]} \\ \dot{T}^{[I]} = 0}}; \\ C_{a\beta\gamma\delta\epsilon\eta}^{[iso][N]} &= \rho^{[N]} \frac{\partial^2 \psi_s(E_{a\beta}^{[I]}, T^{[I]})}{\partial E_{a\beta}^{[I]} \partial E_{\gamma\delta}^{[I]} \partial E_{\epsilon\eta}^{[I]}} \bigg|_{\substack{E_{a\beta}^{[I]} = 0 \\ T^{[I]} = T^{[N]} \\ \dot{T}^{[I]} = 0}}; \\ M_{a\beta}^{[N]} &= \rho^{[N]} \frac{\partial^2 \psi_s(E_{a\beta}^{[I]}, T^{[I]})}{\partial T^{[I]} \partial E_{a\beta}^{[I]}} \bigg|_{\substack{E_{a\beta}^{[I]} = 0 \\ T^{[I]} = T^{[N]} \\ \dot{E}_{a\beta}^{[I]} = 0}} = -C_{a\beta\gamma\delta}^{[iso][N]} \alpha_{\gamma\delta}^{[S][N]}; \\ c_s^{[E][N]} &= -T^{[N]} \frac{\partial^2 \psi_s(E_{a\beta}^{[I]}, T^{[I]})}{\partial T^{[I]} \partial T^{[I]}} \bigg|_{\substack{E_{a\beta}^{[I]} = 0 \\ T^{[I]} = T^{[N]} \\ \dot{E}_{a\beta}^{[I]} = 0}}. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

式中: $C_{a\beta\gamma\delta}^{[iso][N]}$ 为自然状态下参考自然坐标系的等温二阶弹性张量分量; $M_{a\beta}^{[N]}$ 为自然状态下的热应力张量分量; $C_{a\beta\gamma\delta\epsilon\eta}^{[iso][N]}$ 为自然状态下的等温三阶弹性张量分量; $c_s^{[E][N]}$ 为自然状态下的定容比热容; $\alpha_{\gamma\delta}^{[S][N]}$ 为定压热膨胀张量分量, 上标 $[S]$ 表示恒定应力条件(定压)。

等温三阶弹性张量具有类似于等温二阶弹性张量的对称性。为了简单起见, 可以用 Voigt 缩写符

号来表示 $C_{a\beta\gamma\delta}^{[iso][N]}$ 和 $C_{a\beta\gamma\delta\epsilon\eta}^{[iso][N]}$, 即 $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 32(23) \rightarrow 4, 13(31) \rightarrow 5, 21(12) \rightarrow 6$ 。一些三阶弹性常数给出如下^[15-16, 82]:

$$\left\{ \begin{aligned} C_{123}^{[iso][N]} &= \nu_1 = 2C; \\ C_{144}^{[iso][N]} &= C_{255}^{[iso][N]} = C_{366}^{[iso][N]} = \nu_2 = B; \\ C_{456}^{[iso][N]} &= \nu_3 = \frac{A}{4}; \\ C_{122}^{[iso][N]} &= C_{233}^{[iso][N]} = C_{112}^{[iso][N]} = C_{223}^{[iso][N]} = C_{133}^{[iso][N]} = C_{113}^{[iso][N]} = \nu_1 + 2\nu_2 = 2B + 2C; \\ C_{166}^{[iso][N]} &= C_{266}^{[iso][N]} = C_{244}^{[iso][N]} = C_{344}^{[iso][N]} = C_{155}^{[iso][N]} = C_{355}^{[iso][N]} = \nu_2 + 2\nu_3 = B + \frac{A}{2}. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

式中: ν_1, ν_2, ν_3 为 Thurston 等^[15] 采用的表示三阶弹性常数的符号; A, B, C 为 Winkler 等^[82] 采用的表示三阶弹性常数的符号。

根据式(16)(17), 可以写出以自然构形为参考构形的初始应力本构方程:

$$T_{a\beta}^{PK2[I]} = C_{a\beta\gamma\delta}^{[iso][N]} e_{\gamma\delta}^{[I]} + M_{a\beta}^{[N]} (T^{[I]} - T^{[N]}). \quad (18)$$

声弹性理论中只保留线性项, 忽略初始应力表达式中的三阶弹性常数项, 并将初始应变视为小应变。我们在热声弹性理论中沿用这些假设, 用 $e_{\gamma\delta}^{[I]}$ 代替 $E_{\gamma\delta}^{[I]}$ 。而以初始构形作为参考构形的本构方程对我们而言更为重要, 它可以写成

$$\sigma_{IJ}^{[I]} = C_{IJKL}^{[iso][N]} e_{KL}^{[I]} + M_{IJ}^{[N]} (T^{[I]} - T^{[N]}). \quad (19)$$

式中, $C_{IJKL}^{[iso][N]}$ 为自然状态下参考初始坐标系的等温二阶弹性张量分量, 与 $C_{a\beta\gamma\delta}^{[iso][N]}$ 之间的关系由 Pao 等^[16] 给出:

$$C_{IJKL}^{[iso][N]} = \delta_{Ia} \delta_{Jb} \delta_{K\gamma} \delta_{L\delta} \cdot C_{a\beta\gamma\delta}^{[iso][N]}. \quad (20)$$

而自然状态下参考初始坐标系的热应力张量分量 $M_{IJ}^{[N]}$ 表示为

$$M_{IJ}^{[N]} = \frac{1}{J^{[N-1]}} F_{Ia}^{[N-1]} F_{J\beta}^{[N-1]} M_{a\beta}^{[N]} = -C_{IJKL}^{[iso][N]} \alpha_{KL}^{[S][N]}. \quad (21)$$

式中, $J^{[N-1]}$ 为自然状态—初始状态变形梯度的 Jacobi 行列式, 上标 $[N-1]$ 表示从自然参考构形到初始参考构形的变形过程。

以初始构形为参考构形, 初始熵的本构方程为

$$\rho^{[I]} S_s^{[I]} = -M_{IJ}^{[N]} e_{IJ}^{[I]} + \frac{\rho^{[I]} c_s^{[E][N]}}{T^{[I]}} (T^{[I]} - T^{[N]}). \quad (22)$$

由于基于耦合热弹性模型建立本构方程,初始热流作为状态函数而非自变量,对于第一类过程而言,不存在初始热流,因此只有在第二类过程中存在初始热流的本构方程。以自然构形为参考构形,第二类过程中初始热流的本构方程可以表示为

$$q_a^{[1]} = \mathbf{T}_{a\beta\gamma}^{[\text{iso}][\text{N}]} e_{\beta\gamma}^{[1]} + \Pi_a^{[\text{E}][\text{N}]} (T^{[1]} - T^{[\text{N}]}) - K_{a\beta}^{[\text{N}]} (T^{[1]} - T^{[\text{N}]})_{,\beta} \quad (23)$$

式中: $\mathbf{T}_{a\beta\gamma}^{[\text{iso}][\text{N}]}$ 为自然状态下的等温热流-应变模量张量的分量; $\Pi_a^{[\text{E}][\text{N}]}$ 自然状态下的定容热流-温度模量向量的分量。它们分别定义为:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{a\beta\gamma}^{[\text{iso}][\text{N}]} = \frac{\partial q_a^{[1]}}{\partial E_{\beta\gamma}^{[1]}} \Big|_{T^{[1]} = T^{[\text{N}]}}; \\ \Pi_a^{[\text{E}][\text{N}]} = \frac{\partial q_a^{[1]}}{\partial T^{[1]}} \Big|_{E_{\beta\gamma}^{[1]} = 0} \end{cases} \quad (24)$$

关于这两个模量,还有待于日后在物理模拟方面开展更多研究。

式(23)表明考虑了压热效应,即初始热流导致的非均匀初始温度分布(初始温度梯度)与应变相关。如果初始温度分布是均匀的,则不存在热流,式(24)中的两个模量都为0,式(23)退化为傅里叶热传导定律。而关于地温梯度/热流密度与地层压力之间的关系,还有待于今后开展深入研究。

1.3.2 从初始状态到最终状态

从初始状态到最终状态,我们视为基于L-S理论的热弹性动态变形过程。最终状态处于热力学非平衡态,因此使用非平衡温度作为本构变量。而且我们承认快速瞬态热力学过程存在的可能性,基于扩展不可逆热力学原理,将增量热流作为本构变量。

以初始构形作为参考构形,参照式(15),得到增量亥姆霍兹自由能的本构方程:

$$\begin{aligned} \rho^{[1]} \psi_s &= \rho^{[1]} \psi_s^{[\text{F}]} - \rho^{[1]} \psi_s^{[1]} = \\ & \frac{1}{2} C_{IJKL}^{[\text{iso}][1]} \Delta E_{IJ} \Delta E_{KL} + M_{IJ}^{[1]} \Delta E_{IJ} \Delta \vartheta - \\ & \frac{1}{2} \rho^{[1]} \frac{c_s^{[\text{E}][1]}}{T^{[1]}} \Delta \vartheta^2 + \Xi_{RIJ}^{[1]} \Delta E_{IJ} \Delta q_R + \\ & \rho^{[1]} \frac{\partial^2 \psi_s^{[1]}}{\partial \theta^{[F]} \partial q_I^{[F]}} \Delta \vartheta \Delta q_I + \\ & \frac{1}{2} \rho^{[1]} \frac{\partial^2 \psi_s^{[1]}}{\partial q_I^{[F]} \partial q_J^{[F]}} \Delta q_I \Delta q_J + \\ & \frac{1}{6} C_{IJKLMN}^{[\text{iso}][1]} \Delta E_{IJ} \Delta E_{KL} \Delta E_{MN} + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

式中: $C_{IJKL}^{[\text{iso}][1]}$ 为初始状态下参考初始坐标系的等温

二阶弹性张量分量; $\Delta E_{IJ} = E_{IJ}^{[\text{F}]} - E_{IJ}^{[1]}$, 为从初始状态到最终状态的增量应变分量; $\Delta \vartheta = \theta^{[\text{F}]} - T^{[1]}$, 为从初始状态到最终状态的增量温度; $c_s^{[\text{E}][1]}$ 为初始状态下的定容比热容; $\Xi_{RIJ}^{[1]} (I, J, R = X, Y, Z)$ 为初始状态下的一个模量张量的分量; $\Delta q_I = q_I^{[\text{F}]} - q_I^{[1]}$, 为从初始状态到最终状态的增量热流分量; $C_{IJKLMN}^{[\text{iso}][1]}$ 为初始状态下参考初始坐标系的等温三阶弹性张量分量。它们分别定义为:

$$\begin{cases} C_{IJKL}^{[\text{iso}][1]} = \rho^{[1]} \frac{\partial^2 \psi_s(E_{IJ}^{[\text{F}]}, \theta^{[\text{F}]})}{\partial E_{IJ}^{[\text{F}]} \partial E_{KL}^{[\text{F}]}} \Big|_{\substack{E_{IJ}^{[\text{F}]} = E_{IJ}^{[1]} \\ \theta^{[\text{F}]} = T^{[1]} \\ \dot{\theta}^{[\text{F}]} = 0}}; \\ M_{IJ}^{[1]} = \rho^{[1]} \frac{\partial^2 \psi_s(E_{IJ}^{[\text{F}]}, \theta^{[\text{F}]})}{\partial \theta^{[\text{F}]} \partial E_{IJ}^{[\text{F}]}} \Big|_{\substack{E_{IJ}^{[\text{F}]} = E_{IJ}^{[1]} \\ \theta^{[\text{F}]} = T^{[1]}}} = \\ \quad - C_{IJKL}^{[\text{iso}][1]} \alpha_{KL}^{[\text{S}][1]}; \\ \alpha_{KL}^{[\text{S}][1]} = \frac{\partial E_{IJ}^{[\text{F}]}}{\partial \theta^{[\text{F}]}} \Big|_{\dot{\theta}^{[\text{F}]} = 0}; \\ c_s^{[\text{E}][1]} = -T^{[1]} \frac{\partial^2 \psi_s(E_{IJ}^{[\text{F}]}, \theta^{[\text{F}]})}{\partial \theta^{[\text{F}]} \partial \theta^{[\text{F}]}} \Big|_{\substack{E_{IJ}^{[\text{F}]} = E_{IJ}^{[1]} \\ \theta^{[\text{F}]} = T^{[1]} \\ \dot{E}_{IJ}^{[\text{F}]} = 0}}; \\ \Xi_{RIJ}^{[1]} = \rho^{[1]} \frac{\partial^2 \psi_s(E_{IJ}^{[\text{F}]}, \theta^{[\text{F}]})}{\partial E_{IJ}^{[\text{F}]} \partial q_R^{[\text{F}]}} \Big|_{\substack{E_{IJ}^{[\text{F}]} = E_{IJ}^{[1]} \\ \theta^{[\text{F}]} = T^{[1]} \\ \dot{\theta}^{[\text{F}]} = 0}}; \\ C_{IJKLMN}^{[\text{iso}][1]} = \rho^{[1]} \frac{\partial^2 \psi_s(E_{IJ}^{[\text{F}]}, \theta^{[\text{F}]})}{\partial E_{IJ}^{[\text{F}]} \partial E_{KL}^{[\text{F}]} \partial E_{MN}^{[\text{F}]}} \Big|_{\substack{E_{IJ}^{[\text{F}]} = E_{IJ}^{[1]} \\ \theta^{[\text{F}]} = T^{[1]} \\ \dot{\theta}^{[\text{F}]} = 0}} \end{cases} \quad (26)$$

增量应力的本构方程为

$$\Delta T_{IJ}^{\text{PK2}} = C_{IJKL}^{[\text{iso}][1]} \Delta E_{KL} + M_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta + \Xi_{RIJ}^{[1]} \Delta q_R + \frac{1}{2} C_{IJKLMN}^{[\text{iso}][1]} \Delta E_{KL} \Delta E_{MN} \quad (27)$$

考虑动量守恒定律(式(3)),我们可以得到

$$\begin{aligned} \rho^{[1]} \Delta \ddot{u}_I &\approx (\Delta T_{IJ}^{\text{PK2}} + \delta_{IK} \sigma_{IJ}^{[1]} \Delta u_{I,K})_{,J} + \rho^{[1]} \Delta f_I = \\ & [(C_{IJKL}^{[\text{iso}][\text{eqv}][1]} + \delta_{IK} \sigma_{JL}^{[1]}) \Delta u_{K,L} + \\ & (M_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta + \Xi_{RIJ}^{[1]} \Delta q_R)]_{,J} + \rho^{[1]} \Delta f_I \end{aligned} \quad (28)$$

其中^[16],

$$\begin{aligned} C_{IJKL}^{[\text{iso}][\text{eqv}][1]} &= C_{IJKL}^{[\text{iso}][1]} + C_{IJKLMN}^{[\text{iso}][1]} \approx \\ & C_{IJKL}^{[\text{iso}][\text{N}]} (1 - e_{NN}^{[1]}) + C_{IJKLMN}^{[\text{iso}][\text{N}]} e_{MN}^{[1]} + \\ & C_{MIKL}^{[\text{iso}][\text{N}]} u_{I,M}^{[1]} + C_{IMKL}^{[\text{iso}][\text{N}]} u_{J,M}^{[1]} + \\ & C_{IJML}^{[\text{iso}][\text{N}]} u_{K,M}^{[1]} + C_{IJKM}^{[\text{iso}][\text{N}]} u_{L,M}^{[1]} \end{aligned} \quad (29)$$

我们可以用式(29)定义初始状态下的等效热应力张量分量 $M_{IJ}^{[\text{eqv}][1]}$:

$$M_{IJ}^{[eqv][1]} = -C_{IJKL}^{[iso][eqv][1]} \alpha_{KL}^{[S][1]}. \quad (30)$$

上标 [eqv] 表示“等效”。这一张量将在熵本构方程的线性化过程中发挥重要作用。值得注意的是, $M_{IJ}^{[eqv][1]}$ 是对称正定张量分量,但并不一定是对角张量分量,只有当弹性系数矩阵对称性高于正交各向异性(包括正交各向异性)时,可以将其视为对角张量分量。

$C_{IJKL}^{[iso][eqv][1]}$ 的对称性与等温弹性张量分量相同,满足 $C_{IJKL}^{[iso][eqv][1]} = C_{JIKL}^{[iso][eqv][1]} = C_{IJLK}^{[iso][eqv][1]} = C_{KLJI}^{[iso][eqv][1]}$ 。它在声弹性理论中发挥重要的作用,被称为(等温)等效声弹性刚度张量分量,在等温情况下,等效声弹性刚度张量将使应力-应变本构关系式变为线性本构关系式。于是,式(27)在热声弹性理论中通常写成以下形式,以与热弹性力学相类比:

$$\Delta T_{IJ}^{PK2} = C_{IJKL}^{[iso][eqv][1]} \Delta u_{K,L} + M_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta + \Xi_{RIJ}^{[1]} \Delta q_R. \quad (31)$$

也可以得到第一类 Piola-Kirchhoff 增量应力的本构方程:

$$\Delta T_{IJ}^{PK1} = (C_{IJKL}^{[iso][eqv][1]} + \delta_{IK} \sigma_{JL}^{[1]}) \Delta u_{K,L} + M_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta + \Xi_{RIJ}^{[1]} \Delta q_R = A_{IJKL}^{[iso][1]} \Delta u_{K,L} + M_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta + \Xi_{RIJ}^{[1]} \Delta q_R. \quad (32)$$

式中, $A_{IJKL}^{[iso][1]}$ 为初始状态下的等温波传播系数张量分量。注意, T_{IJ}^{PK1} 并非对称张量分量^[83], 因为 $A_{IJKL}^{[iso][1]}$ 包含初始应力项,并不具有 $C_{IJKL}^{[iso][1]}$ 和 $\Gamma_{IJKL}^{[iso][1]}$ 的对称性,只有 $A_{IJKL}^{[iso]} = A_{KLJI}^{[iso]}$ 。因此使用通常的 Voigt 缩写符号严格来讲是不合适的, Pao 等^[57] 扩展了 Voigt 表示法,为 11→1, 22→2, 33→3, 23→4, 31→5, 12→6, 32→7, 13→8, 21→9。在推广到各向异性的情况时需要剪切应力加以区分。如果使用对称张量分量 T_{IJ}^{PK2} 来表示,则需要额外计算位移的梯度来表示变形梯度。

增量熵的本构方程可以表示为

$$\rho^{[1]} \Delta S_s = -M_{IJ}^{[1]} \Delta E_{IJ} + \frac{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}}{T^{[1]}} \Delta \vartheta + \rho^{[1]} \left(\frac{\partial S_s(t)}{\partial q_R(t)} \right) \bigg|_{\substack{E_{IJ}^{[F]} = E_{IJ}^{[1]} \\ \theta^{[F]} = T^{[1]}}} \Delta q_R. \quad (33)$$

从初始状态到最终状态,热流由 MCV 方程控制,同时考虑了热流与应变和温度的相关性;但是热流作为本构变量而非本构响应函数。增量热流表示为

$$\Delta q_I + \tau_{IJ}^{[1]} \dot{\Delta q}_J =$$

$$- (\Upsilon_{IMN}^{[iso][1]} \Delta E_{MN} + \Pi_I^{[E][1]} \Delta \vartheta + K_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta_{,J}). \quad (34)$$

温度的演化方程为

$$\rho^{[1]} c_s^{[E][1]} \Delta \dot{\vartheta} = -\Delta q_{I,I} + T^{[1]} M_{IJ}^{[1]} \Delta \dot{E}_{IJ} + \rho^{[1]} \Delta R_s. \quad (35)$$

式中, ΔR_s 为从初始状态到最终状态的比热供。利用 $M_{IJ}^{[eqv][1]}$, 式(35)可以改写为

$$\rho^{[1]} c_s^{[E][1]} \Delta \dot{\vartheta} = -\Delta q_{I,I} + T^{[1]} M_{IJ}^{[eqv][1]} \Delta \dot{u}_{I,J} + \rho^{[1]} \Delta R_s. \quad (36)$$

1.4 热声弹性基本场方程

根据式(32)(34)(36), 基于 L-S 理论的热声弹性场方程组表示为:

$$\begin{cases} A_{IJKL}^{[iso][1]} \Delta u_{K,LJ} + M_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta_{,J} + \Xi_{RIJ}^{[1]} \Delta q_{R,J} + \rho^{[1]} \Delta f_I = \rho^{[1]} \Delta \ddot{u}_I; \\ \rho^{[1]} c_s^{[E][1]} \Delta \dot{\vartheta} = -\Delta q_{I,I} + T^{[1]} M_{IJ}^{[eqv][1]} \Delta \dot{u}_{I,J} + \rho^{[1]} \Delta R_s; \\ \Delta q_I + \tau_{IJ}^{[1]} \Delta \dot{q}_J = -(\Upsilon_{IMN}^{[iso][1]} \Delta u_{M,N} + \Pi_I^{[E][1]} \Delta \vartheta + K_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta_{,J}). \end{cases} \quad (37)$$

根据式(37), 消去热流, 可以得到热传输方程, 如果忽略 $\Xi_{RIJ}^{[1]}$ 、 $\Upsilon_{IMN}^{[iso][1]}$ 和 $\Pi_I^{[E][1]}$, 其各向同性形式即 L-S 理论中的热传输方程。我们将其各向异性形式写为:

$$\begin{cases} A_{IJKL}^{[iso][1]} \Delta u_{K,LJ} + M_{IJ}^{[eqv][1]} \Delta \vartheta_{,J} + \rho^{[1]} \Delta f_I = \rho^{[1]} \Delta \ddot{u}_I; \\ K_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta_{,IJ} = \rho^{[1]} c_s^{[E][1]} (\delta_{IJ} \Delta \dot{\vartheta} + \tau_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta) - T^{[1]} M_{IJ}^{[eqv][1]} (\Delta \dot{u}_{I,J} + \tau_{IJ}^{[1]} \Delta \ddot{u}_{I,J}) + \rho^{[1]} \Delta R_s. \end{cases} \quad (38)$$

但是在本文中热流扮演重要的角色, 应在基本方程中体现出来。

由于 $\Xi_{RIJ}^{[1]}$ 、 $\Upsilon_{IMN}^{[iso]}$ 和 $\Pi_I^{[E][1]}$ 物理意义尚不明确, 如果将其忽略, 式(37)将简化为:

$$\begin{cases} A_{IJKL}^{[iso][1]} \Delta u_{K,LJ} + M_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta_{,J} + \rho^{[1]} \Delta f_I = \rho^{[1]} \Delta \ddot{u}_I; \\ \rho^{[1]} c_s^{[E][1]} \Delta \dot{\vartheta} = -\Delta q_{I,I} + T^{[1]} M_{IJ}^{[eqv][1]} \Delta \dot{u}_{I,J} + \rho^{[1]} \Delta R_s; \\ \Delta q_I + \tau_{IJ}^{[1]} \Delta \dot{q}_J = -K_{IJ}^{[1]} \Delta \vartheta_{,J}. \end{cases} \quad (39)$$

对于地震波场正演模拟而言, 一阶速度-应力微分方程相比于二阶热声弹性运动方程, 计算效率更高。在正演模拟过程中我们得到的是 Lagrange 描述的物理量, 但对于实际应用而言, Euler 描述的物

理量更有价值,因此可能需要视情况在两种物理量之间进行转换。在热声弹性情况中,具有潜在应用价值的演化方程包括热流和温度演化方程,应当列入耦合的一阶微分方程组中。接下来介绍两种形式的一阶速度-应力-热流-温度微分方程。

1.4.1 等温形式的一阶速度-应力-热流-温度微分方程

考虑二维情况,一阶速度-应力-热流-温度微分方程可以写为以下形式。

速度分量:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \frac{1}{\rho^{[1]}} (\Delta T_{XX,X}^{PK1} + \Delta T_{XZ,Z}^{PK1} - \Delta f_x) = \Phi_x; \\ \dot{v}_z = \frac{1}{\rho^{[1]}} (\Delta T_{ZX,X}^{PK1} + \Delta T_{ZZ,Z}^{PK1} - \Delta f_z) = \Phi_z. \end{cases} \quad (40)$$

正应力分量:

$$\begin{cases} \Delta \dot{T}_{XX}^{PK1} = (A_{11}^{[iso][1]} v_{X,X} + A_{13}^{[iso][1]} v_{Z,Z}) + (A_{18}^{[iso][1]} v_{X,Z} + A_{15}^{[iso][1]} v_{Z,X}) + M_{11}^{[1]} \Delta \dot{\vartheta} + (\Xi_{11}^{[1]} \Delta \dot{q}_X + \Xi_{13}^{[1]} \Delta \dot{q}_Z) + \Delta \dot{f}_{XX}; \\ \Delta \dot{T}_{ZZ}^{PK1} = (A_{31}^{[iso][1]} v_{X,X} + A_{33}^{[iso][1]} v_{Z,Z}) + (A_{38}^{[iso][1]} v_{X,Z} + A_{35}^{[iso][1]} v_{Z,X}) + M_{33}^{[1]} \Delta \dot{\vartheta} + (\Xi_{31}^{[1]} \Delta \dot{q}_X + \Xi_{33}^{[1]} \Delta \dot{q}_Z) + \Delta \dot{f}_{ZZ}. \end{cases} \quad (41)$$

剪切应力分量:

$$\begin{cases} \Delta \dot{T}_{XZ}^{PK1} = A_{81}^{[iso][1]} v_{X,X} + A_{83}^{[iso][1]} v_{Z,Z} + (A_{88}^{[iso][1]} v_{X,Z} + A_{85}^{[iso][1]} v_{Z,X}) + (\Xi_{131}^{[1]} \Delta \dot{q}_X + \Xi_{133}^{[1]} \Delta \dot{q}_Z) + \Delta \dot{f}_{XZ}; \\ \Delta \dot{T}_{ZX}^{PK1} = A_{51}^{[iso][1]} v_{X,X} + A_{53}^{[iso][1]} v_{Z,Z} + (A_{58}^{[iso][1]} v_{X,Z} + A_{55}^{[iso][1]} v_{Z,X}) + (\Xi_{311}^{[1]} \Delta \dot{q}_X + \Xi_{313}^{[1]} \Delta \dot{q}_Z) + \Delta \dot{f}_{ZX}. \end{cases} \quad (42)$$

热流分量:

$$\begin{cases} \Delta \dot{q}_X = -\frac{1}{\tau_{11}^{[1]}} [(\mathcal{T}_{111}^{[iso][1]} \Delta u_{X,X} + \mathcal{T}_{133}^{[iso][1]} \Delta u_{Z,Z}) + (\mathcal{T}_{113}^{[iso][1]} \Delta u_{X,Z} + \mathcal{T}_{131}^{[iso][1]} \Delta u_{Z,X}) + \Pi_1^{[E][1]} \Delta \vartheta + K_{11}^{[1]} \Delta \vartheta_{,X} + \Delta q_X]; \\ \Delta \dot{q}_Z = -\frac{1}{\tau_{33}^{[1]}} [(\mathcal{T}_{311}^{[iso][1]} \Delta u_{X,X} + \mathcal{T}_{333}^{[iso][1]} \Delta u_{Z,Z}) + (\mathcal{T}_{313}^{[iso][1]} \Delta u_{X,Z} + \mathcal{T}_{331}^{[iso][1]} \Delta u_{Z,X}) + \Pi_3^{[E][1]} \Delta \vartheta + K_{33}^{[1]} \Delta \vartheta_{,Z} + \Delta q_Z]. \end{cases} \quad (43)$$

温度:

$$\Delta \dot{\vartheta} = -\frac{1}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}} (\Delta q_{X,X} + \Delta q_{Z,Z}) + \frac{T^{[1]}}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}} (M_{11}^{[eqv][1]} v_{X,X} + M_{33}^{[eqv][1]} v_{Z,Z}) + \frac{\Delta R_s}{c_s^{[E][1]}}. \quad (44)$$

上述方程中,应力分量的本构方程是用 $A_{ijkl}^{[iso]}$ 表示的,因此可以称为等温形式的一阶速度-应力-热流-温度微分方程组。然而由 $A_{ijkl}^{[iso]}$ 决定的等温波速并不出现在热声弹性耦合过程中,只有在设定非耦合情况(即热膨胀系数或热应力张量为0)时,等温波速才会出现。

1.4.2 绝热形式的一阶速度-应力-热流-温度微分方程组

实际上,在热弹性情况下,等温压缩(pressure, P)波速度的作用由绝热 P 波速度所替代^[84-85],而剪切(shear, S)波不受热效应影响。考虑各向同性情况,绝热 P 波速度与等温 P 波速度之间的关系为:

$$\begin{cases} v_p^{[adi][N]} = \sqrt{v_p^{[iso][N]^2} + b^{[N]^2}}; \\ b^{[N]^2} = \frac{M^{[N]^2} T^{[N]}}{\rho^{[N]^2} c_s^{[E][N]}}. \end{cases} \quad (45)$$

式中, $v_p^{[adi][N]}$ 为自然状态下的绝热 P 波速度; $v_p^{[iso][N]}$ 为自然状态下的等温 P 波速度。 $v_p^{[iso][N]}$ 由自然状态下的等温弹性系数决定, $v_p^{[adi][N]}$ 由自然状态下的绝热弹性系数决定,即

$$v_p^{[adi][N]} = \sqrt{\frac{\lambda^{[N]} + 2\mu^{[N]}}{\rho^{[N]}}} + \frac{M^{[N]^2} T^{[N]}}{\rho^{[N]^2} c_s^{[E][N]}}. \quad (46)$$

式中, $\lambda^{[N]}$ 和 $\mu^{[N]}$ 为自然状态下的拉梅系数。于是,自然状态下的绝热弹性系数可以表示为:

$$\begin{cases} C_{11}^{[adi][N]} = C_{11}^{[iso][N]} + \frac{M_{11}^{[N]^2} T^{[N]}}{\rho^{[N]} c_s^{[E][N]}}; \\ C_{12}^{[adi][N]} = C_{12}^{[iso][N]} + \frac{M_{11}^{[N]} M_{22}^{[N]} T^{[N]}}{\rho^{[N]} c_s^{[E][N]}}; \\ C_{13}^{[adi][N]} = C_{13}^{[iso][N]} + \frac{M_{11}^{[N]} M_{33}^{[N]} T^{[N]}}{\rho^{[N]} c_s^{[E][N]}}; \\ C_{22}^{[adi][N]} = C_{22}^{[iso][N]} + \frac{M_{22}^{[N]^2} T^{[N]}}{\rho^{[N]} c_s^{[E][N]}}; \\ C_{23}^{[adi][N]} = C_{23}^{[iso][N]} + \frac{M_{22}^{[N]} M_{33}^{[N]} T^{[N]}}{\rho^{[N]} c_s^{[E][N]}}; \\ C_{33}^{[adi][N]} = C_{33}^{[iso][N]} + \frac{M_{33}^{[N]^2} T^{[N]}}{\rho^{[N]} c_s^{[E][N]}}. \end{cases} \quad (47)$$

对于初始状态,可以将上标[N]换为[I],从而,可以得到初始状态下的绝热波传播系数张量分量 $A_{IJKL}^{[adi][I]}$:

$$A_{IJKL}^{[adi][I]} = C_{IJKL}^{[adi][eqv][I]} + \delta_{IK}\sigma_{JL}^{[I]}. \tag{48}$$

式(40)–(44)可以改写成用 $A_{IJKL}^{[adi][I]}$ 表示的形式,称为绝热形式的一阶速度–应力–热流–温度微分方程组。为了简单起见,考虑二维情况:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{1}{\rho^{[I]}} (\Delta T_{XX,X}^{PK1} + \Delta T_{XZ,Z}^{PK1} - \Delta f_x) = \Phi_x; \\ \dot{v}_z &= \frac{1}{\rho^{[I]}} (\Delta T_{ZX,X}^{PK1} + \Delta T_{ZZ,Z}^{PK1} - \Delta f_z) = \Phi_z; \\ \dot{T}_{XX}^{PK1} &= (A_{11}^{[adi][I]} v_{X,X} + A_{13}^{[adi][I]} v_{Z,Z}) + (A_{18}^{[iso][I]} v_{X,Z} + A_{15}^{[iso][I]} v_{Z,X}) - \frac{M_{11}^{[I]}}{\rho^{[I]} c_s^{[E][I]}} (\Delta q_{X,X} + \Delta q_{Z,Z}) + (\Xi_{11}^{[I]} \Delta \dot{q}_X + \Xi_{13}^{[I]} \Delta \dot{q}_Z) + \Delta \dot{f}_{XX}; \\ \dot{T}_{ZZ}^{PK1} &= (A_{13}^{[adi][I]} v_{X,X} + A_{33}^{[adi][I]} v_{Z,Z}) + (A_{38}^{[iso][I]} v_{X,Z} + A_{35}^{[iso][I]} v_{Z,X}) - \frac{M_{33}^{[I]}}{\rho^{[I]} c_s^{[E][I]}} (\Delta q_{X,X} + \Delta q_{Z,Z}) + (\Xi_{13}^{[I]} \Delta \dot{q}_X + \Xi_{33}^{[I]} \Delta \dot{q}_Z) + \Delta \dot{f}_{ZZ}; \\ \dot{T}_{XZ}^{PK1} &= A_{18}^{[iso][I]} v_{X,X} + A_{38}^{[iso][I]} v_{Z,Z} + (A_{88}^{[iso][I]} v_{X,Z} + A_{58}^{[iso][I]} v_{Z,X}) + (\Xi_{13}^{[I]} \Delta \dot{q}_X + \Xi_{33}^{[I]} \Delta \dot{q}_Z) + \Delta \dot{f}_{XZ}; \\ \dot{\Delta q}_X &= -\frac{1}{\tau_{11}^{[I]}} [(\Upsilon_{11}^{[iso][I]} \Delta u_{X,X} + \Upsilon_{13}^{[iso][I]} \Delta u_{Z,Z}) + (\Upsilon_{13}^{[iso][I]} \Delta u_{X,Z} + \Upsilon_{11}^{[iso][I]} \Delta u_{Z,X}) + \Pi_1^{[E][I]} \Delta \vartheta + K_{11}^{[I]} \Delta \vartheta_{,X} + \Delta q_X]; \\ \dot{\Delta q}_Z &= -\frac{1}{\tau_{33}^{[I]}} [(\Upsilon_{13}^{[iso][I]} \Delta u_{X,X} + \Upsilon_{33}^{[iso][I]} \Delta u_{Z,Z}) + (\Upsilon_{33}^{[iso][I]} \Delta u_{X,Z} + \Upsilon_{13}^{[iso][I]} \Delta u_{Z,X}) + \Pi_3^{[E][I]} \Delta \vartheta + K_{33}^{[I]} \Delta \vartheta_{,Z} + \Delta q_Z]; \\ \dot{\Delta \vartheta} &= -\frac{1}{\rho^{[I]} c_s^{[E][I]}} (\Delta q_{X,X} + \Delta q_{Z,Z}) + \frac{T^{[I]}}{\rho^{[I]} c_s^{[E][I]}} (M_{11}^{[eqv][I]} v_{X,X} + M_{33}^{[eqv][I]} v_{Z,Z}) + \frac{\Delta R_s}{c_s^{[E][I]}}. \end{aligned} \right. \tag{49}$$

式(49)非常复杂,并且具有物理意义不明确的系数。出于本文数值计算目的考虑,我们忽略 $\Xi_{KL}^{[I]}$ 、 $\Upsilon_{IMN}^{[iso][I]}$ 和 $\Pi_I^{[E][I]}$, 将式(49)简化为:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{1}{\rho^{[I]}} (\Delta T_{XX,X}^{PK1} + \Delta T_{XZ,Z}^{PK1} - \Delta f_x) = \Phi_x; \\ \dot{v}_z &= \frac{1}{\rho^{[I]}} (\Delta T_{ZX,X}^{PK1} + \Delta T_{ZZ,Z}^{PK1} - \Delta f_z) = \Phi_z; \\ \dot{T}_{XX}^{PK1} &= (A_{11}^{[adi][I]} v_{X,X} + A_{13}^{[adi][I]} v_{Z,Z}) + (A_{18}^{[iso][I]} v_{X,Z} + A_{15}^{[iso][I]} v_{Z,X}) - \frac{M_{11}^{[I]}}{\rho^{[I]} c_s^{[E][I]}} (\Delta q_{X,X} + \Delta q_{Z,Z}) + \Delta \dot{f}_{XX}; \\ \dot{T}_{ZZ}^{PK1} &= (A_{13}^{[adi][I]} v_{X,X} + A_{33}^{[adi][I]} v_{Z,Z}) + (A_{38}^{[iso][I]} v_{X,Z} + A_{35}^{[iso][I]} v_{Z,X}) - \frac{M_{33}^{[I]}}{\rho^{[I]} c_s^{[E][I]}} (\Delta q_{X,X} + \Delta q_{Z,Z}) + \Delta \dot{f}_{ZZ}; \\ \dot{T}_{XZ}^{PK1} &= A_{18}^{[iso][I]} v_{X,X} + A_{38}^{[iso][I]} v_{Z,Z} + (A_{88}^{[iso][I]} v_{X,Z} + A_{58}^{[iso][I]} v_{Z,X}) + \Delta \dot{f}_{XZ}; \\ \dot{T}_{ZX}^{PK1} &= A_{15}^{[iso][I]} v_{X,X} + A_{35}^{[iso][I]} v_{Z,Z} + (A_{58}^{[iso][I]} v_{X,Z} + A_{55}^{[iso][I]} v_{Z,X}) + \Delta \dot{f}_{ZX}; \\ \dot{\Delta q}_X &= -\frac{1}{\tau_{11}^{[I]}} (K_{11}^{[I]} \Delta \vartheta_{,X} + \Delta q_X); \\ \dot{\Delta q}_Z &= -\frac{1}{\tau_{33}^{[I]}} (K_{33}^{[I]} \Delta \vartheta_{,Z} + \Delta q_Z); \\ \dot{\Delta \vartheta} &= -\frac{1}{\rho^{[I]} c_s^{[E][I]}} (\Delta q_{X,X} + \Delta q_{Z,Z}) + \frac{T^{[I]}}{\rho^{[I]} c_s^{[E][I]}} (M_{11}^{[eqv][I]} v_{X,X} + M_{33}^{[eqv][I]} v_{Z,Z}) + \frac{\Delta R_s}{c_s^{[E][I]}}. \end{aligned} \right. \tag{50}$$

1.4.3 刚性问题

L-S 热弹性方程组具有刚性^[10],即传播矩阵的特征值具有负实部且特征值之间大小相差悬殊。刚性方程组的数值解存在稳定性问题,为了求解刚性方程组,可以采用时间分裂法将方程组的刚性部分分离出来进行解析求解,作为非刚性方程组数值求解的初始值。

考虑式(50)的一维情况,将方程组写成矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{M}^{[P]} \mathbf{V}. \tag{51}$$

式中: $\mathbf{V}$ 为未知波场向量; $\mathbf{S}$ 为源向量; $\mathbf{M}^{[P]}$ 为传播矩阵。它们分别表示为:

$$\mathbf{V} = [v_x, \Delta T_{XX}^{PK1}, \Delta q_X, \Delta \vartheta]^T; \tag{52}$$

$$\mathbf{S} = \left[\frac{\Delta f_x}{\rho^{[I]}}, -\Delta \dot{f}_{XX}, 0, -\frac{\Delta R_s}{c_s^{[E][I]}} \right]^T; \tag{53}$$

$$\mathbf{M}^{[P]} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho^{[1]}} \partial_x & 0 & 0 \\ \left(A_{11}^{[iso]} + \frac{M_{12}^{[1]} T^{[1]}}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}} \right) \partial_x & 0 & -\frac{M_{11}^{[1]}}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau^{[1]}} & -\frac{K^{[1]}}{\tau^{[1]}} \partial_x \\ \frac{M_{11}^{[1]} T^{[1]}}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}} \partial_x & 0 & -\frac{1}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}} \partial_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

对式(51)作傅里叶变换,并令波数等于0,式(54)中将有三个特征值等于0,一个特征值为 $-1/\tau^{[1]}$ 。因此热声弹性方程组(式(50))具有刚性。

将式(50)含有特征值的项分裂出去,刚性方程组为:

$$\begin{cases} \dot{\Delta q}_x = -\frac{1}{\tau_{11}^{[1]}} \Delta q_x; \\ \dot{\Delta q}_z = -\frac{1}{\tau_{33}^{[1]}} \Delta q_z. \end{cases} \quad (55)$$

非刚性方程组为:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \frac{1}{\rho^{[1]}} (\Delta T_{XX}^{PK1} + \Delta T_{XZ}^{PK1} - \Delta f_x) = \Phi_x; \\ \dot{v}_z = \frac{1}{\rho^{[1]}} (\Delta T_{ZX}^{PK1} + \Delta T_{ZZ}^{PK1} - \Delta f_z) = \Phi_z; \\ \Delta \dot{T}_{XX}^{PK1} = (A_{11}^{[adi][1]} v_{X,X} + A_{13}^{[adi][1]} v_{Z,Z}) + (A_{18}^{[iso][1]} v_{X,Z} + A_{15}^{[iso][1]} v_{Z,X}) - \frac{M_{11}^{[1]}}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}} (\Delta q_{X,X} + \Delta q_{Z,Z}) + \Delta \dot{f}_{XX}; \\ \Delta \dot{T}_{ZZ}^{PK1} = (A_{13}^{[adi][1]} v_{X,X} + A_{33}^{[adi][1]} v_{Z,Z}) + (A_{38}^{[iso][1]} v_{X,Z} + A_{35}^{[iso][1]} v_{Z,X}) - \frac{M_{33}^{[1]}}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}} (\Delta q_{X,X} + \Delta q_{Z,Z}) + \Delta \dot{f}_{ZZ}; \\ \Delta \dot{T}_{XZ}^{PK1} = A_{18}^{[iso][1]} v_{X,X} + A_{38}^{[iso][1]} v_{Z,Z} + (A_{88}^{[iso][1]} v_{X,Z} + A_{58}^{[iso][1]} v_{Z,X}) + \Delta \dot{f}_{XZ}; \\ \Delta \dot{T}_{ZX}^{PK1} = A_{15}^{[iso][1]} v_{X,X} + A_{35}^{[iso][1]} v_{Z,Z} + (A_{58}^{[iso][1]} v_{X,Z} + A_{88}^{[iso][1]} v_{Z,X}) + \Delta \dot{f}_{ZX}; \\ \dot{\Delta q}_x = -\frac{1}{\tau_{11}^{[1]}} K_{11}^{[1]} \Delta \vartheta_{,x}; \\ \dot{\Delta q}_z = -\frac{1}{\tau_{33}^{[1]}} K_{33}^{[1]} \Delta \vartheta_{,z}; \\ \Delta \dot{\vartheta} = -\frac{1}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}} (\Delta q_{X,X} + \Delta q_{Z,Z}) + \frac{T^{[1]}}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}} (M_{11}^{[eqv][1]} v_{X,X} + M_{33}^{[eqv][1]} v_{Z,Z}) + \frac{\Delta R_s}{c_s^{[E][1]}}. \end{cases} \quad (56)$$

方程组(式(40)–(44)),物理意义更加明确,强调了热流在热声弹性理论中的重要性。并且,刚性项集中于热流的弛豫项,非刚性方程组保持了时间导数和空间导数的一阶性,这对于编程实现和施加PML(perfectly matched layer)类边界条件是很有利的。

1.5 平面波分析

附录A.6给出了基于L-S热声弹性理论的平面波分析流程。考虑沿垂直方向传播的平面波,可以求解出初始状态下的两种准横波(qS波)速度:

$$v_{qS1}^{[iso][1]} = \sqrt{\frac{A_{88}^{[iso][1]}}{\rho^{[1]}}}; v_{qS2}^{[iso][1]} = \sqrt{\frac{A_{44}^{[iso][1]}}{\rho^{[1]}}}. \quad (57)$$

对于准纵波(qP波),可以得到

$$v_{qP}^{[1]} = \left[(v_{qP}^{[adi][1]2} + M_{33}^{[M][1]} \pm \sqrt{(v_{qP}^{[adi][1]2} + M_{33}^{[M][1]})^2 - 4M_{33}^{[M][1]} v_{qP}^{[iso][1]2}) / 2 \right]^{1/2}. \quad (58)$$

其中:

$$M_{33}^{[M][1]} = \frac{i\omega a_{33}^{[1]2}}{-1 + i\omega \tau_{33}^{[1]}}; a_{33}^{[1]} = \sqrt{\frac{K_{33}^{[1]}}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}}}. \quad (59)$$

式中: $M_{33}^{[M][1]}$ 为 Maxwell 黏弹模型核函数; ω 为角频率。式(58)有两个解,一个为弹性(elastic, E)模式(正号),一个为热(thermal, T)模式(负号)。

由式(57)–(58)可知, qS 波速度与初始应变相关。在热声弹性情况下,等温速度不仅由介质弹性参数和密度决定,还由初始应力(应变)决定。因为假定初始应力是热弹性应力,包含机械加载产生的应力和由温差产生的热变形所对应的热应力,如果初始温度环境有变化, qS 波也会随之变化。所以,热声弹性 qS 波受热效应影响。已知初始应力对声弹性 qP 波、qS 波都有影响^[86],则可以推断在热声弹性情况下,与温度相关的热弹性初始应力也会对热声弹性 S 波有影响。但式(58)只能证明热声弹性 qS 波与从自然状态到初始状态的温度变化有关;对于波传播研究而言,从初始状态到最终状态的热效应是我们更加关注的。为了明确“热效应”的概念,我们将从自然状态到初始状态的静态过程中的热效应称为“静态热效应”,而将从初始状态到最终状态的动态过程中的热效应称为“动态热效应”。

基于垂直方向传播的平面波的讨论并不全面,因为初始应力可能会引发各向异性,至少要在一个平面中进行进一步讨论。我们选择 XOZ 平面,并令入射角为 45° 。重复上面的流程,可以得到其中一个 qS 波解:

绝热形式的方程组(式(50))相比于等温形式的

$$v_{qS2}^{[1]} = \sqrt{\frac{A_{99}^{[iso][1]} + A_{44}^{[iso][1]} + 2A_{49}^{[iso][1]}}{2\rho^{[1]}}} \quad (60)$$

我们将这个解识别为第二准横(qS2)波速度,它不受动态热效应的影响。除此之外,需要求解速度的 8 次多项式(速度平方的 4 次多项式):

$$\left[\left(\frac{A_{11}^{[iso][1]} + A_{88}^{[iso][1]} + 2A_{18}^{[iso][1]}}{2\rho^{[1]}} - v^{[1]2} \right) \left(\frac{1}{2} M_{11}^{[M][1]} - v^{[1]2} \right) - \frac{1}{2} v^{[1]2} b_{11}^{[eqv][1]2} \right] \left[\left(\frac{A_{33}^{[iso][1]} + A_{33}^{[iso][1]} + 2A_{35}^{[iso][1]}}{2\rho^{[1]}} - v^{[1]2} \right) \left(\frac{1}{2} M_{33}^{[M][1]} - v^{[1]2} \right) - \frac{1}{2} v^{[1]2} b_{33}^{[eqv][1]2} \right] - \frac{(A_{13}^{[iso][1]} + A_{58}^{[iso][1]})^2}{4\rho^{[1]2}} \left(\frac{1}{2} M_{11}^{[M][1]} - v^{[1]2} \right) \left(\frac{1}{2} M_{33}^{[M][1]} - v^{[1]2} \right) = 0 \quad (61)$$

其中,

$$b_{IJ}^{[eqv][1]2} = \frac{M_{IJ}^{[eqv][1]2} T^{[1]}}{\rho^{[1]2} c_s^{[E][1]}} \quad (62)$$

在考虑三维情况时需要求解速度的 12 次多项式(速度平方的 6 次多项式),想要得到速度的显式方程几乎是不可能的,只能隐式求解。可以预期根据式(61)能够得到 4 个具有物理意义的根,而其中两个根与第一准横(qS1)波相关。

Chen 等^[4]基于 G-L 理论,预测了声热弹性模型中的 4 种波传播模式:P 波、快 S 波、次 S 波和 T 波,并指出,在预应力热弹性介质中,T 波与 P 波和快 S 波耦合,引起能量耗散,而次 S 波不受动态热效应的影响。而在无预应力的情况下,T 波只与 P 波耦合,而不与快 S 波和第二 S 波耦合,这对应于 Deresiewicz^[84]、Rudgers^[85]、Carcione 等^[10] 等的观察结果。式(61)表明,在二维情况下,qP 波、准热(qT)波和第一准横(qS1)波耦合在一起,并且波速明显与热物性参数(如热导率、热膨胀系数、比热容)相关,可以推测,qP 波具有 E 模式和 T 模式,而 qS1 波同样也有 E 模式和 T 模式。因此,为了避免混淆,我们用 qPE、qPT、qS1E 和 qS1T 分别表示这些波传播模式。于是,在 L-S 热声弹性情况下,共存在 5 种波传播模式,即 qPE、qPT、qS1E、qS1T 和 qS2。

根据 Carcione^[87],可以由复速度计算相速度和衰减因子:

$$v_{Phase}^{[1]} = \frac{1}{\text{Re}\left(\frac{1}{v^{[1]}}\right)}; A_{attenuation}^{[1]} = -\omega \text{Im}\left(\frac{1}{v^{[1]}}\right) \quad (63)$$

式中: $v_{Phase}^{[1]}$ 为初始相速度; $A_{attenuation}^{[1]}$ 为初始衰减因子。根据 Deresiewicz^[84],可以计算衰减系数:

$$L^{[1]} = 4\pi \frac{A_{attenuation}^{[1]} v_{Phase}^{[1]}}{\omega} \quad (64)$$

2 数值算例与分析

2.1 模型参数与初始应力条件设置

首先考虑基于经典不可逆热力学的、忽略压热效应的 L-S 热声弹性理论的情况。假设介质在自然状态下为各向同性介质,自然状态下的比热容、热导率、定压热膨胀系数等于初始状态的对应值。介质物性参数如表 1 所示。

我们统一假定初始应力为热弹性应力,并注意:

1) 当初初始参考温度等于自然参考温度时,则从自然状态到初始状态,热弹性应力视为单纯的弹性应力。

2) 当初初始参考温度不等于自然参考温度时,从自然状态到初始状态的热弹性应力与这个过程中的温差 $T^{[1]} - T^{[N]}$ 相关。如果初始状态是第一类初始状态,即已经达到热平衡,则在初始状态下没有热流和温度梯度,物体中温度处处相等且等于 $T^{[1]}$; 如果初始状态是第二类初始状态,新的热平衡尚未建立,则具有初始热流和初始温度梯度。

用 p 表示导致热弹性应力的机械压力,并取不同的值进行模拟,压力加载模式考虑静水压力、单轴压力,并假定初始主应变方向与材料主轴方向重合^[86]。

静水压力:在静水压力条件下,各个主方向上的应力和应变相同。初始应变可以表示为^[86]:

$$e_{11}^{[1]} = e_{33}^{[1]} = -\frac{p}{3K_{[bulk][N]}}; e_{13}^{[1]} = 0 \quad (65)$$

单轴压力:在单轴压力作用下,应力场会产生各向异性。初始应变可以表示为^[86]:

$$\left\{ \begin{aligned} X: & e_{11}^{[1]} = \frac{p(\lambda^{[N]} + \mu^{[N]})}{\mu^{[N]}(3\lambda^{[N]} + 2\mu^{[N]})}; \\ & e_{33}^{[1]} = -\frac{p\lambda^{[N]}}{2\mu^{[N]}(3\lambda^{[N]} + 2\mu^{[N]})}; \\ & e_{13}^{[1]} = 0. \\ Z: & e_{33}^{[1]} = \frac{p(\lambda^{[N]} + \mu^{[N]})}{\mu^{[N]}(3\lambda^{[N]} + 2\mu^{[N]})}; \\ & e_{11}^{[1]} = -\frac{p\lambda^{[N]}}{2\mu^{[N]}(3\lambda^{[N]} + 2\mu^{[N]})}; \\ & e_{13}^{[1]} = 0. \end{aligned} \right. \quad (66)$$

式中, X、Z 分别表示沿水平、垂直方向施加单轴压力。

表 1 介质物性参数设置

Table 1 Setting of physical parameters of the medium

物性参数	符号	单位	数值
介质密度(自然状态)	$\rho^{[N]}$	kg / m ³	2 500
单位体积定容热容(自然状态)	$c^{[E][N]} = \rho^{[N]} c_v^{[E][N]}$	m ² / (s ² · K)	110、110 × 10 ⁻⁶ 、110 × 10 ⁶
热导率(各向同性、自然状态)	$K^{[N]}$	m · kg / (s ³ · K)	5、5 × 10 ⁶
定压热膨胀系数(各向同性、自然状态)	$\alpha^{[S][N]}$	K ⁻¹	3 × 10 ⁻⁶
等温体积模量(自然状态)	$K^{[bulk][N]}$	GPa	11.7
拉梅常数(自然状态)	$\lambda^{[N]}$	GPa	6.3
剪切模量	$\mu^{[N]}$	GPa	8.1
自然参考温度(接近室温)	$T^{[N]}$	K	300
温度梯度	dT	K/m	1
三阶弹性常数(自然状态)	A、B、C		-1 200、450、-370

2.2 相速度和衰减系数随频率的变化

2.2.1 沿垂直方向传播的平面波

对于沿垂直方向传播的平面波,首先考虑相速度随频率的变化。当 $K^{[N]} = K^{[1]} = 5 \text{ m} \cdot \text{kg} / (\text{s}^3 \cdot \text{K})$ 、初始参考温度为 300 K、其余热物性参数(单位体积定容热容、定压热膨胀系数)取相同的正常值($c^{[E][N]} = 110 \text{ m}^2 / (\text{s}^2 \cdot \text{K})$ 、 $\alpha^{[S][N]} = 3 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$)、静水压力分别为 0、10 和 30 MPa 时,相速度随频率变化的曲线如图 1a、b 所示。由图 1a、b 可知,静水压力 0 MPa 相当于 L-S 广义热弹性情况。在低频情况下,qPE 波相速度为绝热速度 $v_{qPE}^{[adi][1]}$,随着频率增加,相速度增加直至高频极限 $v_{qPE}^{[1]}$;qPT 波在低频情况下呈现扩散振型,相速度趋近于 0,随着频率增加,相速度也增加至高频极限 $v_{qPT}^{[1]}$;并且 $V_{qPE}^{[1]} > v_{qPT}^{[1]}$ 。这与 Carcione 等^[10]针对 L-S 热弹性情况得到的结果相似。而随着静水压力的增大:qPE 波、qPT 波、qS1 波、qS2 波相速度都有所增加,其中 qS1 波、qS2 波相速度曲线在图中重合;qPE 波、qPT 波相速度拐点向高频方向移动。衰减系数随频率的变化如图 1c、d 所示。根据式(57)(58)(63)(64),可知在平面波沿垂直方向传播的情况下,qS1 波和 qS2 波的速度为实速度,没有虚部,因此没有衰减;而 qPE 波、qPT 波的速度为复速度,存在虚部并因此存在衰减。所以,在图 1c、d 中没有 qS1 波和 qS2 波衰减系数曲线,只有 qPE 波、qPT 波衰减系数曲线。在低频情况下,qPT 波衰减系数处于高

值,随着频率增加而逐渐减小;qPE 波衰减系数随着频率增加,将出现一个衰减峰。随着静水压力的增大,qPE 波、qPT 波的衰减系数曲线拐点向高频方向移动,qPE 波衰减峰频率增大,峰值减小。初始应力不仅改变了密度、等效弹性系数,还改变了热应力张量和体积热容,从而影响了衰减系数。

接下来考虑在水平方向加载单轴压力的情况。当水平方向单轴压力分别为 0、10 和 30 MPa 时,相速度随频率变化的曲线如图 2a、b 所示,衰减系数随频率的变化如图 2c、d 所示。图 2 曲线的总体特征与图 1 相似,只有细微的差别。当施加水平方向的单轴压力之后,qS 波分裂为波速不同的 qS1E 波和 qS2 波,其中 $v_{qS1E}^{[1]} > v_{qS2}^{[1]}$ 。当水平方向单轴压力为 0 MPa 时,qS1E 波、qS2 波相速度曲线重合。随着水平方向单轴压力的增大,对于沿垂直方向传播的平面波,qPE 波、qS1E 波、qS2 波相速度减小,qPT 波相速度增大,相速度拐点和衰减峰向低频方向移动但不明显,峰值增大。水平单轴应力使得各向同性介质表现得像具有水平对称轴的横向各向同性介质,产生了 S 波分裂现象。

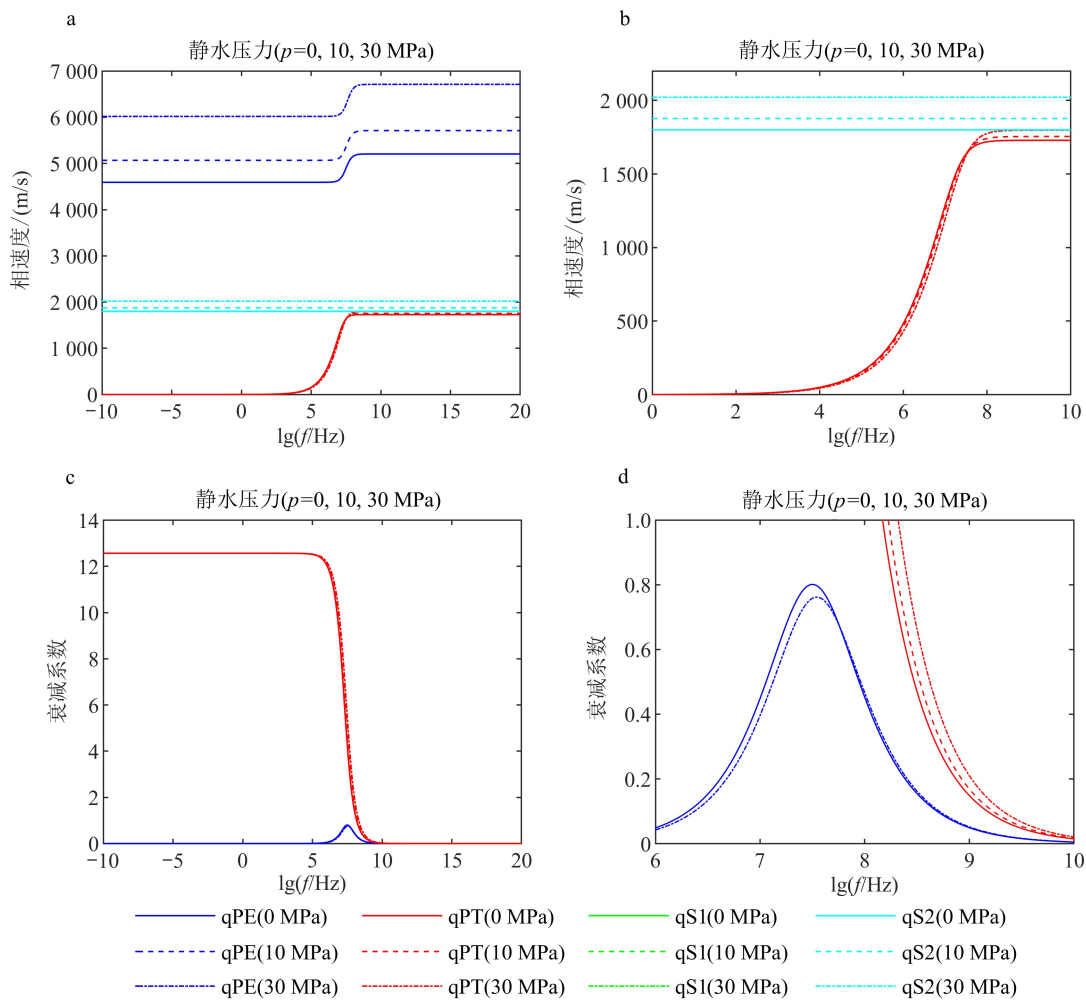
当 Z 方向单轴压力分别为 0、10 和 30 MPa 时,相速度随频率变化的曲线如图 3a、b 所示,衰减系数随频率的变化如图 3c、d 所示。图 3 与图 2 相比,曲线总体特征不变,但差别比较明显。由于单轴压力加载方向与波传播方向相同,S 波分裂现象消失,qS1E 波与 qS2 波相速度曲线重合,并且没有衰减。

随着垂直方向单轴压力的增大,qPE 波、qPT 波、qS1E 波和 qS2 波相速度明显减小。qPE 波、qS1E 波和 qS2 波相速度拐点和衰减峰向低频方向移动,峰值增大;qPT 波相速度拐点向高频移动,衰减系数曲线向低频方向移动。

Chen 等^[4]研究在单轴加载条件下,基于 G-L 理论的声热弹性介质中波的特性,发现施加应力使得各向同性的热弹性介质变得不均匀,导致快 S 波具有由热损耗引起的小弛豫峰;E 波和快波在地震频率和超声频率之间具有强烈的扩散性,T 波仅在低频段具有强烈的扩散性;施加应力可以明显提高 P 波、E 波和第二 S 波在全频段的传播速度,对于具

有小体积比热容的热弹性介质而言,在测井频率(约 10^3 Hz) 以上,施加应力将略微增加 T 波速度;增加应力会导致 P 波衰减因子减少,快 S 波衰减因子增加,T 波衰减几乎与应力无关。但在预应力热弹性介质中,增加应力不能使 3 种波的衰减峰移动。降低体积比热容会增加 P 波和快 S 波的衰减系数,但几乎不能改变 T 波的衰减系数。本文与 Chen 等^[4]的工作类似,但是基于 L-S 理论,这导致基本方程组不同,所得到的平面波分析结果可能也有差异。

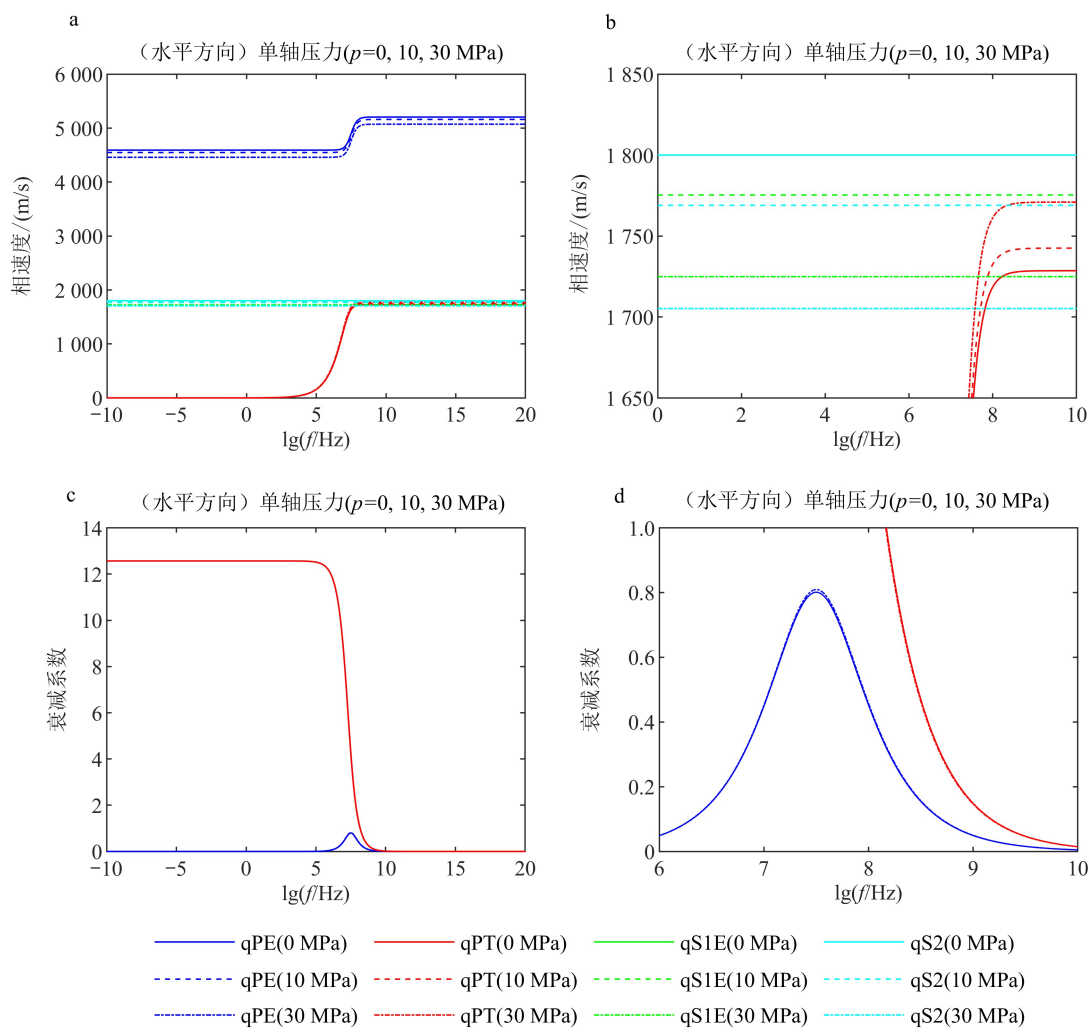
接下来,考察在静水压力 30 MPa 作用下,其余热物性参数不变,初始温度分别为 300、400 和 500 K



a. 相速度;b. a 的局部放大图;c. 衰减系数;d. c 的局部放大图。f. 频率。qS1 波与 qS2 波相速度曲线重合。

图 1 不同静水压力条件下,L-S 热声弹性模型中相速度和衰减系数随频率的变化

Fig.1 Variation of phase velocity and attenuation coefficient with frequency in the L-S TAE model under different hydrostatic pressure conditions



a. 相速度;b. a 的局部放大图;c. 衰减系数;d. c 的局部放大图。

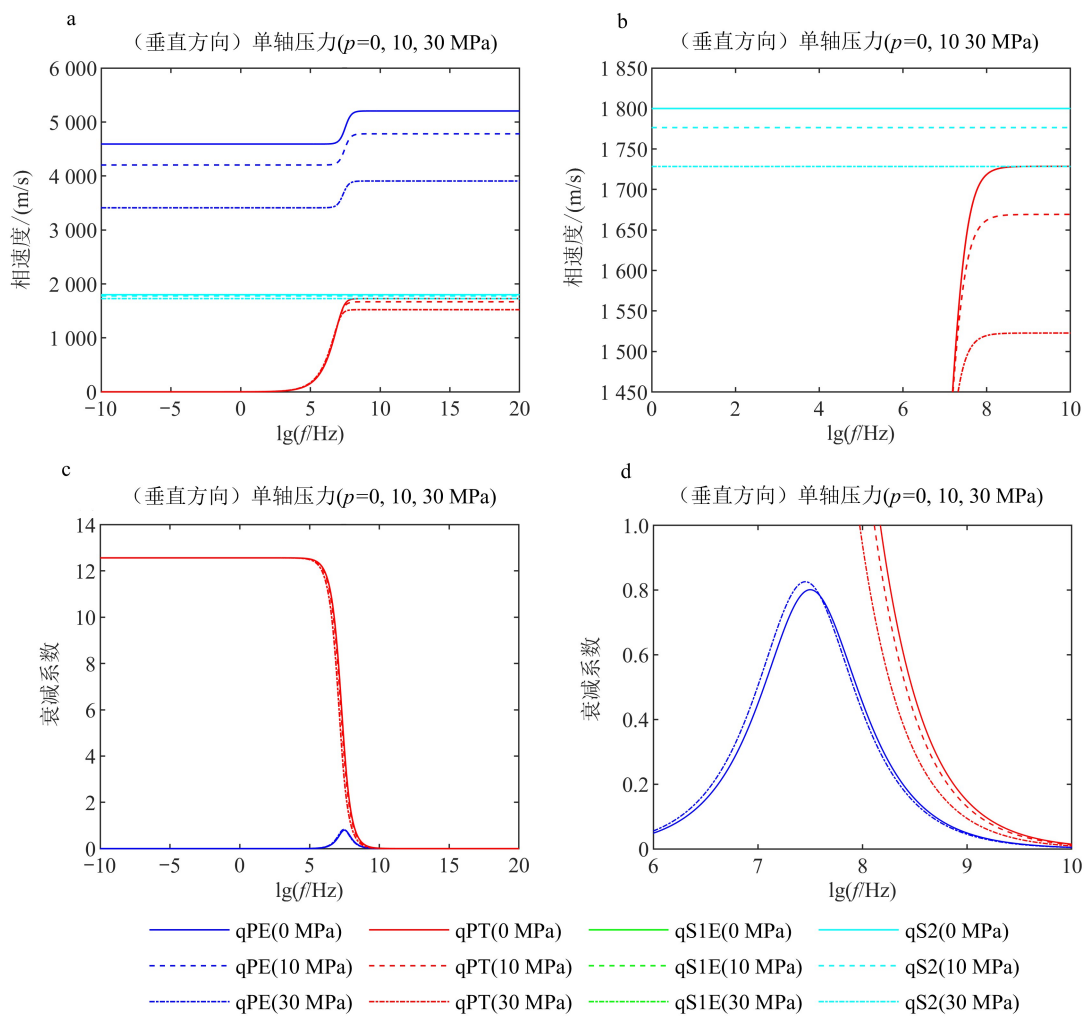
图 2 水平方向不同单轴压力条件下,L-S 热声弹性模型中的相速度和衰减系数随频率的变化

Fig.2 Variation of phase velocity and attenuation coefficient with frequency in the L-S TAE model under different uniaxial pressure conditions in the horizontal direction

(已经达到热平衡)时的热声弹性平面波相速度(图 4a)和衰减系数(图 4b)随频率的变化。由图 4 可知,初始温度对 qPE 波和 qPT 波相速度的影响比较明显,但对 qS1E 波、qS2 波相速度没有影响,因此, qS1E 波、qS2 波与图 1 中显示的规律相同,两条相速度曲线重合。另外,值得注意的是, qPE 波的弛豫峰频率约为 42.361 MHz,并不随着初始温度的增加而移动,但是衰减峰向低频方向移动,峰值明显减小。这是因为弛豫峰位置取决于热导率和热流弛豫时间,在静水压力相同的情况下,初始状态的热导率和热流弛豫时间都相同;但衰减峰取决于衰减因子和相速度,二者都与参考温度相关。在热弹性理论

中,弛豫峰与衰减峰可被视为近似相同,但在基于 L-S 理论的热声弹性情况中存在差别。

最后,考察当初始温度为 300 K、外界加载温度分别为 300、1 300 和 2 300 K 时的热声弹性平面波相速度(图 5a)和衰减系数(图 5b)随频率的变化。在初始时刻,会分别产生温度差 0、1 000 和 2 000 K 以及其对应的热应力。由图 5 可知,1 000 K 的初始温差对相速度和衰减系数的影响较小,不如初始温度的影响那般明显。 qS1E 波、qS2 波与图 1 中显示的规律相同,两条相速度曲线重合。随着温差的增大, qPE 波、qPT 波、qS1E 波、qS2 波相速度均减小。这种条件设置类似于热冲击实验,但在实际岩石的



a. 相速度;b. a 的局部放大图;c. 衰减系数;d. c 的局部放大图。qS1E 波与 qS2 波相速度曲线重合。

图 3 垂直方向不同单轴压力条件下,L-S 热声弹性模型中的相速度和衰减系数随频率的变化

Fig.3 Variation of phase velocity and attenuation coefficient with frequency in the L-S TAE model under different uniaxial pressure conditions in the vertical direction

热冲击实验中,热冲击会对岩石造成损伤,除了热声弹性效应之外,还需要考虑更复杂的机制(如热破裂、相变等)。

与 Carcione 等^[10]、侯婉婷等^[88]和李元燮等^[89]针对基于 L-S 广义热弹性理论的平面波分析结果相比,本文基于 L-S 热声弹性理论的平面波分析体现了初始温差和初始应力对相速度和衰减系数的影响。这对于解释高温高压岩石波速实验的结果具有一定的意义。

2.2.2 在二维平面中传播的平面波

对于各向异性情况,沿单一方向传播的平面波分析并不能全面地反映波传播特征;接下来,观察二维相速度曲线以考察应力诱导的各向异性特征。假

定主应变方向与材料各向异性主轴方向重合,令自然坐标轴与初始坐标轴重合(但自然坐标与初始坐标仍有差异)。

1)人工地震频率条件

首先,指定主频 $f_0 = 25 \text{ Hz}$, $K = 5 \text{ m} \cdot \text{kg}/(\text{s}^3 \cdot \text{K})$,其余热物性参数不变。图 6a 显示了预应力为静水压力(0、10、30 MPa),当平面波入射角为 0,即波传播方向与 Z 轴夹角为 0($\beta = 0^\circ$)时,XOY 平面中的相速度随方位角(φ)的变化;图 6b 显示了同样条件下,平面波方位角为 0,即波传播方向与 X 轴夹角为 0($\varphi = 0^\circ$)时,YOZ 平面中相速度随入射角的变化。由图 6a 可知,入射角为 0 意味着平面波沿 Z 轴传播,qS1E 波与 qS2 重合。随着静水压力的

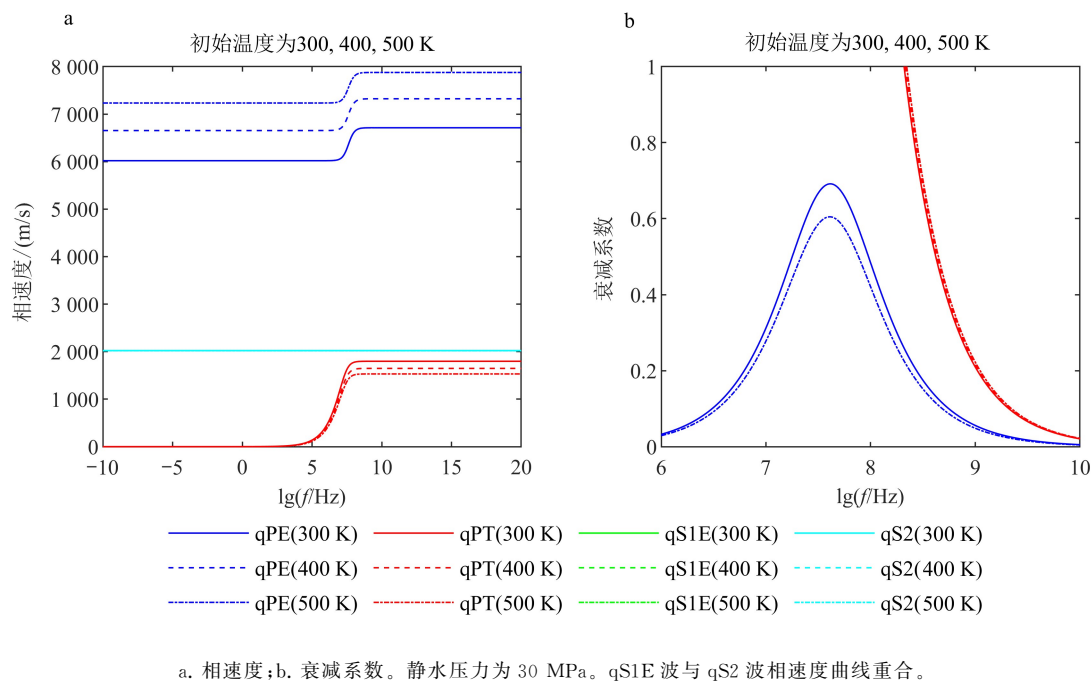


图 4 不同初始温度条件下,L-S 热声弹性模型中的相速度和衰减系数随频率的变化

Fig.4 Variation of phase velocity and attenuation coefficient with frequency in the L-S TAE model under different initial temperature conditions

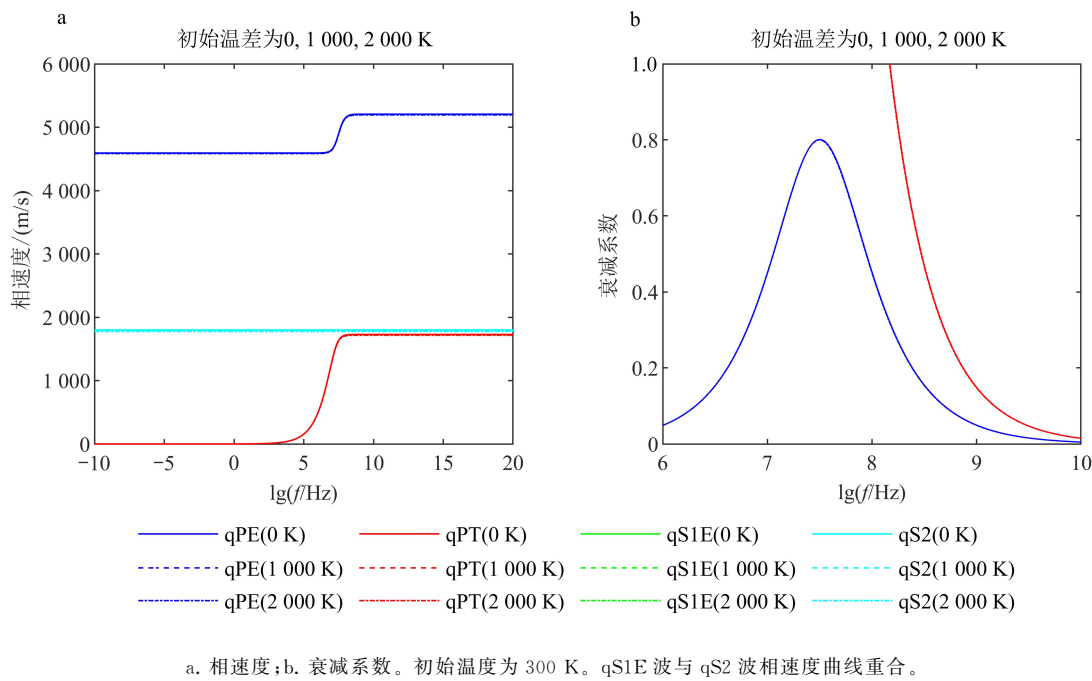


图 5 不同初始温差条件下,L-S 热声弹性模型中的相速度和衰减系数随频率的变化

Fig.5 Variation of phase velocity and attenuation coefficient with frequency in the L-S TAE model under different initial temperature difference conditions

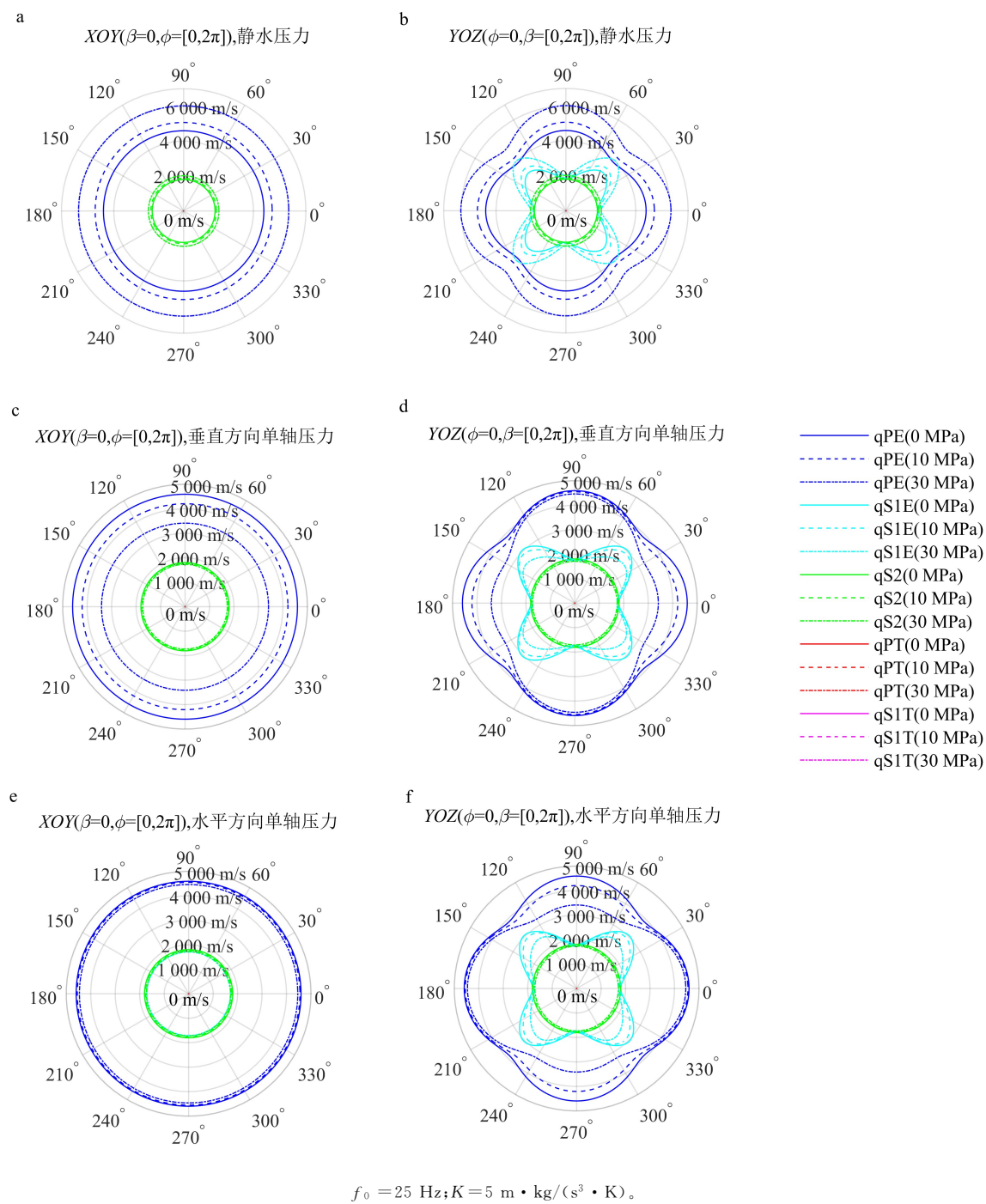


图 6 人工地震频率条件下不同初始应力时 L-S 热弹弹性模型中的二维相速度平面

Fig.6 2D phase velocity plane in the L-S TAE model with different initial stresses under artificial seismic frequency conditions

增大, qPE 波和 qS1E 波相速度增大。qPT 波、qS1T 波呈现扩散振型, 显示为图中心处的小红点, 相速度非常小。由图 6b 可知, 平面波沿 X 轴传播, qPE 波相速度面呈现花瓣形状, 在与 Z 轴平行和相垂直的方向, 相速度达到最大值, 而在与 Z 轴成 45° 夹角的方向, 相速度具有最小值。同时, qS 波分裂

为 qS1E 波和 qS2 波, 其中: qS2 波相速度面形态与图 6a 相同, 因为该模式不受动态热效应影响; qS1E 波相速度面呈现花瓣状, 并且随着静水压力的增大, qS1E 波相速度增大, 花瓣趋向于十字形, 在与 Z 轴平行 ($\beta=0^\circ$) 和垂直 ($\beta=90^\circ$) 的方向, qS1E 波相速度具有最小值, 而在与 Z 轴成 45° 夹角的方向, 相速

度达到最大值。出现这种现象,是因为耦合了热弹性效应,并且我们假定热物性参数的张量都是对角张量,只有在材料主轴上有值。热膨胀效应发生在材料的主方向上,Maxwell黏弹模型核与静水压力产生的初始应变相关,这决定了E波相速度比较明显的各向异性,因此在 $\beta=0^\circ, 90^\circ$ 方向上qPE波相速度达到最大值。qS波的分裂现象印证了Chen等^[4]的结论,即在初始应力作用下,存在一种传播速度较快的S波,和另一种不受热效应影响的S波。

图6c显示了预应力为Z方向单轴压力(0、10、30 MPa),当入射角为0时,XOY平面中的相速度随方位角的变化;图6d显示了同样条件下,当方位角为0时,YOZ平面中相速度随入射角的变化。由图6c可知:平面波沿Z轴传播,qS1E波与qS2波重合。随着Z方向单轴压力的增大,qPE波和qS1E波在XOY平面中的相速度明显减小,这对应于一维情况下的观察结果;qPT波、qS1T波呈现扩散振型。由图6d可以看出:随着Z方向单轴压力的增大, $\beta=0^\circ$ 方向的qPT波相速度明显减小,但 $\beta=90^\circ$ 方向qPT波相速度只是略微减小;qS1E波相速度曲线呈现花瓣形,相速度最大值所对应的与Z方向的夹角随着Z方向单轴压力的增大而减小。

图6e显示了预应力为X方向单轴压力(0、10、30 MPa),当入射角为0时,XOY平面中的相速度随方位角的变化;图6f显示了同样条件下,当方位角为0时,YOZ平面中相速度随入射角的变化。由图6e可知:随着X方向单轴压力的增大,qPE波和qS1E波在XOY平面中的相速度只是略微减小,这对应于一维情况下的观察结果;qPT波、qS1T波呈现扩散振型。由图6f可以看出:随着X方向单轴压力的增大, $\beta=90^\circ$ 方向的qPE波相速度明显减小,但 $\beta=0^\circ$ 方向qPE波相速度只是略微减小;qS1E波相速度曲线呈现花瓣形,相速度最大值所对应的与Z方向的夹角随着X方向单轴压力的增大而增大。

25 Hz频率对应于典型的地震勘探频率条件,同时在本文L-S热声弹性背景下属于低频条件。在这样的条件下,通常只能观察到扩散型的qPT波、qS1T波。但初始应力对于相速度平面形态的影响比较明显。

2) 井中超声频率条件

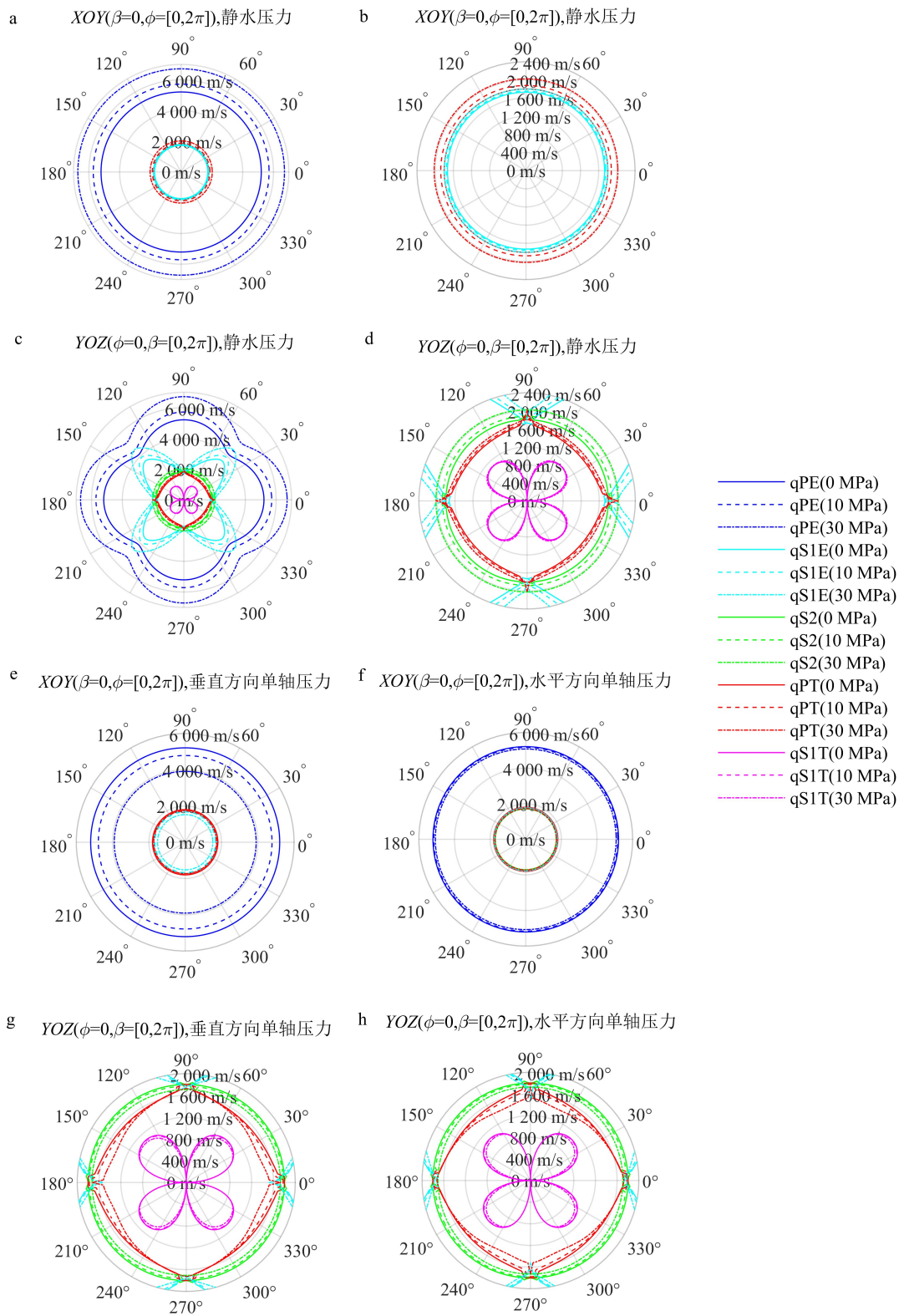
接下来指定超声频率 $f_0=3.5\text{ MHz}$, $K=5\times$

$10^6\text{ m}\cdot\text{kg}/(\text{s}^3\cdot\text{K})$,其余热物性参数不变。图7a显示了预应力为静水压力(0、10、30 MPa),当入射角为0时,XOY平面中相速度随方位角的变化;图7b为图7a的局部放大图。由图7a和7b可知,在 $f_0=3.5\text{ MHz}$, $K=5\times 10^6\text{ m}\cdot\text{kg}/(\text{s}^3\cdot\text{K})$ 的情况下,qS1E波与qS2波重合,qPE波、qS1E波、qS2波相速度都随静水压力的增大而有所增大,并且出现了明显的qPT波,具有恒定的相速度而非扩散振型,随着静水压力的增大而增大。

图7c显示了预应力为静水压力(0、10、30 MPa),当方位角为0时,YOZ平面中相速度随入射角的变化;图7d是图7c的局部放大图。由图7c和7d可知,qPT波相速度曲线趋于正方形,在 $\beta=0^\circ, 90^\circ$ 时相速度最大;除此之外,还出现了qS1T波,相速度曲线呈现花瓣形状,在 $\beta=0^\circ, 90^\circ$ 时相速度最小,接近于0,而在 $\beta=45^\circ$ 时相速度达到最大值。随着静水压力的增大,qS1T波相速度增大,但与其他波模式相比并不明显。

图7e和图7f显示了预应力分别为Z方向单轴压力(0、10、30 MPa)和X方向单轴压力(0、10、30 MPa),当入射角为0时,XOY平面中相速度随方位角的变化。图7g和7h显示了预应力分别为Z方向单轴压力(0、10、30 MPa)和X方向单轴压力(0、10、30 MPa),当方位角为0时,YOZ平面中相速度随入射角的变化,并且是局部放大图。由图7g可知:随着Z方向单轴压力的增大,qPT波相速度在 $\beta=0^\circ$ 方向减小,而在 $\beta=90^\circ, 270^\circ$ 方向相速度最大;qS1T波相速度曲线呈现花瓣形状,随着单轴压力的增大,相速度最大值所对应的与Z方向的夹角随着Z方向单轴压力的增大而减小。图7g、图7h中的qS1T波相速度随压力的变化规律与图6d、6f中的qS1E波相似,相速度最大值所对应的与Z方向的夹角随着Z方向单轴压力的增大而减小、随着X方向单轴压力的增大而增大。

3.5 MHz是典型的超声频率。在超声频率下,如果热导率和/或比热容非常高,将有可能观察到波动振型的qPT波、qS1T波。这适用于超高速加热、微尺度传热的热弹性问题。绝大多数金属矿物的热导率量级对于热弹性波场特征的影响都不明显^[89]。在迄今为止的地球物理学应用之中,满足这样条件的场景并不多见。



b, d 分别为 a, c 的局部放大图。 $f_0 = 3.5 \text{ MHz}$; $K = 5 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{kg}/(\text{s}^3 \cdot \text{K})$ 。

图 7 井中超声频率条件下不同初始应力时 L-S 热弹弹性模型中的二维相速度平面

Fig.7 2D phase velocity plane in the L-S TAE model with different initial stresses under conditions of ultrasonic frequency in well

3 结论与展望

本文将 L-S 热弹性理论与声弹性理论相结合,建立 L-S 热声弹性理论的基本框架。经过平面波分析以及二维相速度平面分析,推测在 L-S 热声弹性介质中总共有 5 种波传播模式:qPE、qPT、qS1E、qS1T、qS2。其中前 4 种模式与动态热效应耦合,最后一种模式不受动态热效应影响。

在 L-S 热声弹性情况中,静水压力会引发各向异性,出现这种现象,是因为耦合了热弹性效应,并且假定热物性参数的张量都是对角张量,只有在材料主轴方向上有值。因此,如果只考虑材料主轴方向而不考虑其他方向,静水压力并不会引发各向异性,但如果考虑任意方向则显然并非如此。在超声频率、极高热导率情况下观察到了 qS1T 波,在静水压力条件下 45°入射角方向上相速度达到最大值,而在材料主轴方向上近乎为 0。而在恰当的单轴压力作用下,qS1T 波相速度最大值所在的轴向将向材料的特定主轴方向倾斜。

扩展不可逆热力学克服了经典不可逆热力学和 MCV 方程的缺陷,而且理性扩展热力学为推导本构方程和演化方程提供了方法,L-S 热弹性理论的热力学基础得以巩固,同时,在强调温度作用的热弹性理论基础之上,扩展不可逆热力学进一步强调了热流的作用。但是,由于扩展不可逆热力学引入了热流作为本构自变量,使得方程变得更加复杂。另外,对于热声弹性理论而言,由于初始状态可能存在热流,有必要考虑压热效应,这导致出现了一些物理意义不明确的系数张量,有待于进一步研究。

L-S 理论是最简单的广义热弹性理论,在提出之时便具有 MCV 方程所固有的缺陷。虽然在扩展不可逆热力学框架下克服了这些缺陷,但理论变得更加复杂,和实际应用之间存在较大的距离。相比之下,其他广义热弹性理论,如 G-L 理论、G-N 理论、双相位滞后理论、三相位滞后理论等,具有更坚实的热力学基础,同时实际应用前景也相当广阔。

本文在热弹性理论和声弹性理论适用的条件下,同时考虑了温度和初始应力对波传播特性的影响。研究工作将为后续的基于热声弹性理论的数值模拟和波传播分析工作奠定基础。

参考文献 (References):

[1] 徐春春,邹伟宏,杨跃明,等. 中国陆上深层油气资源勘

探开发现状及展望[J]. 天然气地球科学,2017, 28 (8): 1139 - 1153.

Xu Chunchun, Zou Weihong, Yang Yueming, et al. Status and Prospects of Exploration and Exploitation of the Deep Oil & Gas Resources Onshore China [J]. Natural Gas Geoscience, 2017, 28(8): 1139 - 1153.

[2] 孙明行,王瑞湖,管彦武,等.广西陆域干热型地热资源潜力估算[J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2022, 52 (4): 1302 - 1313.

Sun Minghang, Wang Ruihu, Guan Yanwu, et al. Estimation of Hot-Dry Geothermal Resources in Guangxi [J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2022, 52(4): 1302 - 1313.

[3] Winkler K W, McGowan L. Nonlinear Acoustoelastic Constants of Dry and Saturated Rocks [J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2004, 109: B10204.

[4] Chen F, Zong Z, Yin X. Acoustothermoelasticity for Joint Effects of Stress and Thermal Fields on Wave Dispersion and Attenuation [J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2022, 127 (4): e2021JB023671.

[5] 韩珂楠,易丽,王多君,等.角闪石高温高压实验研究进展及其地球物理意义[J]. 吉林大学学报(地球科学版),2022, 52(2): 486 - 502.

Han Kenan, Yi Li, Wang DuoJun, et al. Progress of High Temperature and High Pressure Experimental Study on Amphibole and Its Geophysical Implications [J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2022, 52(2): 486 - 502.

[6] Biot M. Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics [J]. Journal of Applied Physics, 1956, 27(3): 240 - 253.

[7] Lord H W, Shulman Y. A Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1967, 15(5): 299 - 309.

[8] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity [J]. Journal of Elasticity, 1972, 2(1): 1 - 7.

[9] Green A E, Naghdi P M. Thermoelasticity Without Energy Dissipation [J]. Journal of Elasticity, 1993, 31 (3): 189 - 208.

[10] Carcione J M, Wang Z W, Ling W, et al. Simulation of Wave Propagation in Linear Thermoelastic Media [J]. Geophysics, 2018, 84(1): T1 - T11.

[11] Carcione J M, Cavallini F, Wang E, et al. Physics and Simulation of Wave Propagation in Linear

- Thermoporoelastic Media [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2019, 124(8): 8147–8166.
- [12] Murnaghan F D. Finite Deformations of an Elastic Solid [J]. *American Journal of Mathematics*, 1937, 59(2): 235–260.
- [13] Hughes D S, Kelly J L. Second-Order Elastic Deformation of Solids [J]. *Physical Review*, 1953, 92(5): 1145–1149.
- [14] Toupin R A, Bernstein B. Sound Waves in Deformed Perfectly Elastic Materials: Acoustoelastic Effect [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1961, 33(2): 216–225.
- [15] Thurston R N, Brugger K. Third-Order Elastic Constants and the Velocity of Small Amplitude Elastic Waves in Homogeneously Stressed Media [J]. *Physical Review*, 1964, 133(6A): A1604–A1610.
- [16] Pao Y H, Sachse W, Fukuoka H. Acoustoelasticity and Ultrasonic Measurement of Residual Stress [Z]// Mason W P. *Physical Acoustics*. Orlando: Academic Press, 1984: 61–143.
- [17] Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes: I [J]. *Physical Review*, 1931, 37(4): 405–426.
- [18] Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes: II [J]. *Physical Review*, 1931, 38(12): 2265–2279.
- [19] Eckart C. The Thermodynamics of Irreversible Processes: I: The Simple Fluid [J]. *Physical Review*, 1940, 58(3): 267–269.
- [20] Eckart C. The Thermodynamics of Irreversible Processes: II: Fluid Mixtures [J]. *Physical Review*, 1940, 58(3): 269–275.
- [21] Eckart C. The Thermodynamics of Irreversible Processes: III: Relativistic Theory of the Simple Fluid [J]. *Physical Review*, 1940, 58(10): 919–924.
- [22] Maxwell J C. IV: On the Dynamical Theory of Gases [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1867, 157: 49–88.
- [23] Cattaneo C. Sulla Conduzione Del Calore [J]. *Atti Sem Mat Fis Univ Modena*, 1948, 3: 83–101.
- [24] Cattaneo C. A Form of Heat-Conduction Equations Which Eliminates the Paradox of Instantaneous Propagation [J]. *Comptes Rendus*, 1958, 247: 431.
- [25] Vernotte P. Les Paradoxes De La Theorie Continue De L'equation De La Chaleur [J]. *Comptes Rendus*, 1958, 246: 3154.
- [26] Vernotte P. The True Heat Equation [J]. *Comptes Rendus*, 1958, 247: 2103.
- [27] Vernotte P. Sur Quelques Complications Possibles Dans Les Phenomenes De Conduction De La Chaleur [J]. *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L'Academie Des Sciences*, 1961, 252(15): 2190.
- [28] Jou D, Casas-Vázquez J, Lebon G. Nonequilibrium Entropy and the Second Law of Thermodynamics: A Simple Illustration [J]. *International Journal of Thermophysics*, 1993, 14(4): 671–683.
- [29] Tzou D Y. *Macro-to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior* [M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2014.
- [30] Coleman B D, Noll W. The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity [M]// NOLL W. *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics: Selected Papers*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1974: 145–156.
- [31] Coleman B D. *Thermodynamics of Materials with Memory* [R]. Pittsburgh: Mellon Inst, 1964.
- [32] Noll W. A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, 2(1): 197–226.
- [33] Truesdell C A. *Six Lectures on Modern Natural Philosophy* [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1966.
- [34] Truesdell C. Historical Introit the Origins of Rational Thermodynamics [M]// TRUESDELL C. *Rational Thermodynamics*. New York: Springer New York, 1984: 1–48.
- [35] Müller I. Zum Paradoxon Der Wärmeleitungstheorie [J]. *Zeitschrift für Physik*, 1967, 198(4): 329–344.
- [36] Müller I. On the Entropy Inequality [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, 26(2): 118–141.
- [37] Liu I. Method of Lagrange Multipliers for Exploitation of the Entropy Principle [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1972, 46(2): 131–148.
- [38] Liu I S. An Overview of Entropy Principle [J]. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*, 2021, 6(4): 89–94.
- [39] Jou D, Casas-Vázquez J, Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics* [M]// Jou D, Casas-Vázquez J, Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics*. Berlin: Springer Berlin

- Heidelberg, 1996: 41-74.
- [40] Jou D, Casas-Vázquez J, Lebon G. Extended Irreversible Thermodynamics Revisited (1988-1998) [J]. Reports on Progress in Physics, 1999, 62(7): 1035.
- [41] Machlup S, Onsager L. Fluctuations and Irreversible Process: II: Systems with Kinetic Energy [J]. Physical Review, 1953, 91(6): 1512-1515.
- [42] Nettleton R E. Thermodynamics of Viscoelasticity in Liquids [J]. The Physics of Fluids, 1959, 2(3): 256-263.
- [43] Lambermont J, Lebon G. On a Generalization of the Gibbs Equation for Heat Conduction [J]. Physics Letters A, 1973, 42(7): 499-500.
- [44] Gyarmati I. Non-Equilibrium Thermodynamics [M]. New York, Heidelberg, Berlin: Springer, 1970.
- [45] Jou D, Casas-Vázquez J, Lebon G. Thermal Effects in Laminar, Incompressible, Viscous and Unsteady Plane Stagnation Flows [J]. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics, 1979, 4(1): 31-46.
- [46] Lebon G, Rubi J M. A Generalized Theory of Thermoviscous Fluids [J]. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics, 1980, 5(5): 285-300.
- [47] Garcia-Colin L S, De Haro M L, Rodriguez R F, et al. On the Foundations of Extended Irreversible Thermodynamics [J]. Journal of Statistical Physics, 1984, 37(3): 465-484.
- [48] Eu B C. Kinetic Theory and Irreversible Thermodynamics [J]. NASA STI/Recon Technical Report A, 1992, 93: 24498.
- [49] Jou D, Zakari M. Information Theory and Heat Transport in Relativistic Gases [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1995, 28(6): 1585-1592.
- [50] Jou D, Zakari M. Nonlinear Transport Coefficients and Fluctuation-Dissipation Theorem [J]. Physics Letters A, 1995, 203(2): 129-132.
- [51] Sieniutycz S, Salamon P. Extended Thermodynamics Systems [M]. New York: CRC Press, 1992.
- [52] Cauchy A L B. Leçons Sur Le Calcul Différentiel [M]. Paris: De Bure frères, 1829.
- [53] Brillouin L. Sur Les Tensions De Radiation [J]. Ann Phys, 1925, 4: 528-586.
- [54] Love A E. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity [J]. Dover Publications New York, 1944, 132: 187.
- [55] 田家勇,胡莲莲. 固体声弹性理论、实验技术及应用研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(6): 652-662.
- Tian Jiayong, Hu Lianlian. Progress in Theories and Experimental Technologies of Solid Acoustoelasticity and Its Application [J]. Advances in Mechanics, 2010, 40(6): 652-662.
- [56] Birch F. Finite Elastic Strain of Cubic Crystals [J]. Physical Review, 1947, 71(11): 809-824.
- [57] Pao Y H, Gamer U. Acoustoelastic Waves in Orthotropic Media [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1985, 77(3): 806-812.
- [58] Flavin J N, Green A E. Plane Thermo-Elastic Waves in an Initially Stressed Medium [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1961, 9(3): 179-190.
- [59] Flavin J N. Thermo-Elastic Rayleigh Waves in a Prestressed Medium [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1962, 58(3): 532-538.
- [60] England A H, Green A E. Steady-State Thermoelasticity for Initially Stressed Bodies [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1961, 253: 517-542.
- [61] Green A E. Thermoelastic Stresses in Initially Stressed Bodies [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1962, 266: 1-19.
- [62] Chen P J. Growth of Acceleration Waves in Isotropic Elastic Materials [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1968, 43(5): 982-987.
- [63] Mehta S, Chaudhry H R. Thermoelastic Stresses in Rotation of a Circular Cylinder in Finite Deformation Theory [J]. International Journal of Engineering Science, 1969, 7(7): 747-755.
- [64] Biot M A. Non-Linear Thermoelasticity, Irreversible Thermodynamics and Elastic Instability [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1973, 23(4): 309-335.
- [65] Belward J A. The Propagation of Small Amplitude Waves in Prestressed Incompressible Elastic Cylinders [J]. International Journal of Engineering Science, 1976, 14(8): 647-659.
- [66] Chadwick P. Basic Properties of Plane Harmonic Waves in a Prestressed Heat-Conducting Elastic Material [J]. Journal of Thermal Stresses, 1979, 2(2): 193-214.

- [67] Ieşan D. Thermal Stresses in Composite Cylinders [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1980, 3(4): 495 – 508.
- [68] Ieşan D. Thermoelasticity of Initially Heated Bodies [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1988, 11(1): 17 – 38.
- [69] Ieşan D. Thermoelastic Models of Continua [M]. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2004.
- [70] Wang J, Slattery S P. Thermoelasticity Without Energy Dissipation for Initially Stressed Bodies [J]. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2002, 31(6): 329 – 337.
- [71] Шейдаков Д, Белянкова Т, Шейдаков Н, et al. Уравнения Динамики Преднапряженной Термоупругой Среды [J]. *Вестник Южного Научного Центра РАН*, 2008, 4(3): 9 – 15.
- [72] Sharma M D. Wave Propagation in a Pre-Stressed Anisotropic Generalized Thermoelastic Medium [J]. *Earth, Planets and Space*, 2010, 62(4): 381 – 390.
- [73] Singh B. Wave Propagation in an Initially Stressed Transversely Isotropic Thermoelastic Solid Half-Space [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 217(2): 705 – 715.
- [74] Vatul'yan A O, Nesterov S A. Certain Aspects of Identification of the Inhomogeneous Prestressed State in Thermoelastic Bodies [J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 81(1): 71 – 76.
- [75] Wallace D C. Thermoelasticity of Stressed Materials and Comparison of Various Elastic Constants [J]. *Physical Review*, 1967, 162(3): 776 – 789.
- [76] Wallace D C. Thermoelastic Theory of Stressed Crystals and Higher-Order Elastic Constants [M]// Ehrenreich H, Seitz F, Turnbull D. *Solid State Physics*. Orlando: Academic Press, 1970: 301 – 404.
- [77] Tokuda T. Thermal Effect on Acoustoelasticity of Isotropic Elastic Materials [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1980, 67(1): 38 – 41.
- [78] Kim K Y, Sachse W. The Theory of Thermodynamic-Acoustoelastic Stress Gauge [J]. *Journal of Applied Physics*, 1996, 80(9): 4934 – 4943.
- [79] Gurtin M E, Fried E, Anand L. *The Mechanics and Thermodynamics of Continua* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [80] Coleman B D, Mizel V J. Existence of Caloric Equations of State in Thermodynamics [J]. *The Journal of Chemical Physics*, 1964, 40(4): 1116 – 1125.
- [81] Truesdell C. *Rational Thermodynamics: A Course of Lectures on Selected Topics* [M]. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [82] Winkler K W, Liu X. Measurements of Third-Order Elastic Constants in Rocks [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, 100(3): 1392 – 1398.
- [83] Dahlen F, Tromp J. *Theoretical Global Seismology* [M]. Princeton: Princeton University Press, 1998.
- [84] Deresiewicz H. Plane Waves in a Thermoelastic Solid [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1957, 29(2): 204 – 209.
- [85] Rudgers A J. Analysis of Thermoacoustic Wave Propagation in Elastic Media [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1990, 88(2): 1078 – 1094.
- [86] Yang H, Fu L, Fu B, et al. Acoustoelastic FD Simulation of Elastic Wave Propagation in Prestressed Media [J]. *Frontiers in Earth Science*, 2022, 10: 501.
- [87] Carcione J M J M. *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media* [M]. Amsterdam: Elsevier, 2007.
- [88] 侯婉婷, 符力耘, 魏佳, 等. 热弹性介质中波传播特征 [J]. *地球物理学报*, 2021, 64(4): 1364 – 1374.
Hou Wanting, Fu Liyun, Wei Jia, et al. Characteristics of Wave Propagation in Thermoelastic Medium [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2021, 64(4): 1364 – 1374.
- [89] 李元燮, 刘财, 郭智奇, 等. 基于旋转交错网格伪谱法和 L-S 理论的热弹性介质波场模拟与特征分析 [J]. *中国科学: 地球科学*, 2021, 51(8): 1355 – 1374.
Li Yuanxie, Liu Cai, Guo Zhiqi, et al. Simulation and Characteristics Analysis of a Wavefield in a Thermoelastic Medium Adopting the Rotated Staggered-Grid Pseudo-Spectral Method and L-S Theory [J]. *Scientia Sinica Terrae*, 2021, 64(8): 1390 – 1408.

附录 A 理论推导流程

A.1 问题描述

在连续介质力学中,运动的 Lagrange 描述和 Euler 描述、参考构形和当前构形是基本概念。而在勘探地震学领域,通常在线性弹性假设下忽略初始应力、考虑无穷小的弹性变形,采用 Euler 描述建立基本方程,来近似 Lagrange 描述下的对应量,在这种情况下不需要区分两种描述,并且无需强调构形之间的区别。但如果考虑到有限变形,则需要对 Euler 描述和 Lagrange 描述进行区分。在声弹性理论中,根据弹性体变形状态,可以定义 3 种状态:自然状态、初始状态和最终状态。自然状态指无应力、应变的原始状态;初始状态指已变形或处于施加载荷作用下达达到平衡的状态,对应于时间 $t=0$ 时的状态。从自然状态到初始状态的变形视为静态变形,也被称为预变形。在这个过程中,预变形不一定是无穷小的,也不一定是弹性的,尽管在实际情况中通常是有限非弹性变形,但在声弹性理论中我们假设它是有限弹性变形,这样根据已知的初始应力就可以推算初始应变,使变形成为一个已知量。由于预变形与我们所考虑的时间历史无关,故称为静态变形。于是,在声弹性理论中需要对 Euler 描述和 Lagrange 描述加以区分。最终状态指在初始状态时叠加一个无穷小的弹性位移、进一步变形达到的状态,从初始状态到最终状态的变形过程视为与时间相关的动态变形。3 种状态分别对应 3 种构形:自然构形 $B^{[N]}$ 、初始构形 $B^{[I]}$ 和最终构形 $B^{[F]}$,每一种构形都可以对应一个参考坐标系,因此每一种状态都可以用不同的参考坐标系中的坐标来表示。

由于声弹性理论研究关注室内实验,需要测量物体从自然状态到初始状态的应变和加载应力,因此选取自然构形中的坐标系为参考坐标系会比较有利。但对于波传播研究而言,选取自然构形作为参考构形会使问题复杂化并且意义不大;而选取初始构形作为参考构形,将初始应力和初始应变视为已

知量,就类似于经典无穷小弹性情况下的波动研究,研究过程可以简化。

A.2 运动学:应变-位移关系

热声弹性理论中的应变-位移关系与声弹性理论^①中的应变-位移关系一致。对于从自然状态到初始状态的预变形过程,以自然构形作为参考构形,可以将初始应变分量 $E_{a\beta}^{[I]}$ 表示为

$$E_{a\beta}^{[I]} = \frac{1}{2} (u_{a,\beta}^{[I]} + u_{\beta,a}^{[I]}) + \frac{1}{2} u_{\gamma,a}^{[I]} u_{\gamma,\beta}^{[I]}. \quad (A.1)$$

式中: $u_a^{[I]}$ 为初始位移分量; $\alpha, \beta, \gamma = \chi, \varphi, \xi$, 为自然参考构形的坐标轴;“ $_{,\alpha}$ ”、“ $_{,\beta}$ ”表示对参考坐标的偏导数。

对于从初始状态到最终状态的动态变形过程,产生增量应变 $\Delta E_{a\beta}$, 是从自然状态到最终状态的总应变 $E_{a\beta}^{[F]}$ 与初始应变 $E_{a\beta}^{[I]}$ 之差;并且在声弹性理论中,假设增量应变相对于初始应变很小(即小变形假设),即 $\|\Delta E_{a\beta}\| \ll \|E_{a\beta}^{[I]}\|$, 因此增量应变可以近似为

$$\begin{aligned} \Delta E_{a\beta} &= E_{a\beta}^{[F]} - E_{a\beta}^{[I]} \approx \\ &\frac{1}{2} (\Delta u_{a,\beta} + \Delta u_{\beta,a}) + \frac{1}{2} u_{\gamma,a}^{[I]} \Delta u_{\gamma,\beta} + \frac{1}{2} \Delta u_{\gamma,a} u_{\gamma,\beta}^{[I]}. \end{aligned} \quad (A.2)$$

式中, Δu_a 为增量位移分量,是总位移 $u_a^{[F]}$ 与初始位移 $u_a^{[I]}$ 之差。实际上这是线性小变形假设。

在弹性力学的经典小变形假设下,位移是无穷小的,以初始构形为参考构形的位置向量约等于以最终构形为参考构形的位置向量,因此没有必要区分 Lagrange 描述和 Euler 描述(除非是在推导本构关系式的时候);并且,位移梯度二阶以上的高阶项可以被忽略,应变只保留线性项。但对于声弹性理论,由于出现了不可忽略的初始应变,故需要对 Lagrange 描述和 Euler 描述进行严格区分。

①Pao Y H, Sachse W, Fukuoka H. Acoustoelasticity and Ultrasonic Measurement of Residual Stress// Mason W P. Physical Acoustics. Orlando: Academic Press. 1984: 61-143.

A.3 守恒定律

A.3.1 质量守恒定律

令物体在自然状态、初始状态和最终状态的密度分别为 $\rho^{[N]}$ 、 $\rho^{[I]}$ 和 $\rho^{[F]}$ ，随着状态的变化，有如下关系，即质量守恒定律：

$$\begin{cases} \rho^{[N]} = \rho^{[I]} J^{[N-I]} = \rho^{[F]} J^{[N-F]}; \\ \rho^{[I]} = \rho^{[F]} J^{[I-F]}. \end{cases} \quad (A.3)$$

式中， $J^{[N-I]}$ 、 $J^{[N-F]}$ 和 $J^{[I-F]}$ 分别为自然状态—初始状态、自然状态—最终状态、初始状态—最终状态变形梯度的 Jacobi 行列式。在实际计算中，主要关注从自然构形到初始构形的密度变化，以体现初始应力和应变的影响，而忽略从初始构形到最终构形的密度变化。因此可以进行如下小变形近似：

$$\rho^{[I]} \cong \frac{\rho^{[I]}}{1 + e_{\eta}^{[I]}} \approx \rho^{[N]} (1 - e_{NN}^{[I]}). \quad (A.4)$$

式中： $e_{\eta}^{[I]}$ 为只保留线性项的、参考自然坐标系的初始应变； $e_{NN}^{[I]} (N = X, Y, Z)$ 为只保留线性项的、参考初始坐标系的初始应变。

A.3.2 动量守恒定律

根据 Dahlen 等^①和 Tromp 等^②的研究，在笛卡尔直角坐标系中，应力有 3 种常用度量方式：Cauchy 应力张量 σ 、第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量 T^{PK1} 和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 T^{PK2} 。对于参考最终构形的最终状态， σ 便于表示 Euler 描述下的动量守恒定律，同时也是服从无穷小变形假设弹性理论中最常用的应力量度。因为在无穷小变形假设下，参考构形与当前构形之间没有区别，3 种应力量度是重合的。而当考虑到有限变形条件时，3 种应力量度会出现差异， T^{PK1} 便于表示 Lagrange 描述下的动量守恒定律， T^{PK2} 便于表示 Lagrange 描述下的本构方程。

对于从自然状态到初始状态和从初始状态到最终状态的过程，动量守恒定律存在差别，下面分别介绍。

1) 初始应力

对于初始状态的应力，可以以初始构形为参考构形，在这种情况下，3 种应力量度重合，这与服从小变形假设的弹性理论相似；因为初始构形之于初

始状态相当于最终构形之于最终状态。于是，令 $\sigma_{IJ}^{[I]} (I, J = X, Y, Z)$ 表示初始应力，且有 $\sigma_{IJ}^{[I]} = T_{IJ}^{PK1[I]} = T_{IJ}^{PK2[I]}$ 。

线性动量守恒定律可以表示为

$$\sigma_{IJ,I}^{[I]} + \rho^{[I]} f_I^{[I]} = 0. \quad (A.5)$$

式中：等式右端为 0，表示处于静力平衡状态； $f_I^{[I]}$ 为初始状态下单位质量的体力分量； $\rho^{[I]} f_I^{[I]}$ 为初始状态下单位体积的体力分量。

如果初始应力与位置相关，则物体必然是不均匀的；如果初始应力与位置无关，且物性参数分布与位置无关，则物体是均匀的。一般来说，如果初始应力不等于静水压力，则会引起各向异性；而对于地壳介质，由于构造应力的存在，在一般条件下初始应力不等于静水压力，各向异性也是广泛存在的。

2) 增量应力

在声弹性理论中，可以在实验室测量得到初始状态和最终状态的 Cauchy 应力，借助变形梯度转化为其他形式的应力张量。对于本文的研究而言，我们关注作为最终应力与初始应力之差的增量应力。以初始构形作为参考构形，动量守恒方程可以表示为

$$\begin{aligned} (\Delta T_{IJ}^{PK2} + \delta_{IK} \sigma_{IJ}^{[I]} \Delta u_{I,K})_{,J} + \rho^{[I]} \Delta f_I = \\ \Delta T_{IJ}^{PK1} + \rho^{[I]} \Delta f_I = \rho^{[I]} \Delta \ddot{u}_I; I, J, K = X, Y, Z. \end{aligned} \quad (A.6)$$

式中： ΔT_{IJ}^{PK1} 、 ΔT_{IJ}^{PK2} 分别为增量第一类 Piola-Kirchhoff 应力分量、增量第二类 Piola-Kirchhoff 应力分量； δ_{IK} 为克罗内克张量分量； Δf_I 为导致叠加运动的动态体力分量；变量上方两点表示二阶时间导数。式(A.6)忽略了增量位移梯度与增量应力的乘积。

式(A.5)(A.6)不包含本构假设，所以初始应力可能是非弹性应力，而在地球物理学领域，地层的实际初始应力可能非常复杂。在热声弹性理论中，我们假定初始应力和增量应力都是热弹性应力。

A.3.3 角动量守恒定律

3 种应力量度具有如下对称性，即角动量守恒定律：

①Dahlen F, Tromp J. Theoretical Global Seismology. Princeton: Princeton University Press, 1998.
②Tromp J, Trampert J. Effects of Induced Stress on Seismic Forward Modelling and Inversion. Geophysical Journal International, 2018, 213(2): 851-867.

$$\begin{cases} \sigma_{IJ} = \sigma_{JI}; \\ T_{IJ}^{\text{PK2}} = T_{JI}^{\text{PK2}}; \\ T_{IJ}^{\text{PK1}} F_{JI} = F_{IJ} T_{JI}^{\text{PK1}}. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

式中, F_{IJ} 为变形梯度分量。式(A.7)忽略了表示状态的上标,因为它对于所有状态都成立。值得注意的是, T_{IJ}^{PK1} 不具有与 σ_{IJ} 和 T_{IJ}^{PK2} 相同的对称性,因为初始应力的形式对 T_{IJ}^{PK1} 具有直接的影响。

A.3.4 热力学第一定律:能量守恒定律

对于热弹性固体,能量守恒定律表示为动能变化率与内能变化率之和,等于系统做功的变化率与提供给系统或从系统中输出能量的变化率之和。我们可以用内能平衡方程的局部形式表示热力学第一定律。另外,由于声弹性理论采用增量形式建立方程,在此我们也宜采用增量形式与之匹配。由于涉及热效应,因此有必要对先前定义的两类过程进行分别讨论。

已知自然状态是无热流的,对于第一类过程,具有初始应力和初始应变,但依然无热流。因此能量平衡方程表示为

$$\rho^{[1]} \dot{U}_s^{[1]} = \sigma_{IJ}^{[1]} \dot{e}_{IJ}^{[1]}. \quad (\text{A.8})$$

式中: $U_s^{[1]}$ 为初始状态的比内能; $e_{IJ}^{[1]}$ 为只保留线性项的初始应变分量,这类似于无穷小变形弹性理论中的情况;变量上方一点表示一阶时间导数。

对于第二类过程,初始状态存在热流,因此从自然状态到初始状态,能量平衡方程为

$$\rho^{[1]} \dot{U}_s^{[1]} = \sigma_{IJ}^{[1]} \dot{e}_{IJ}^{[1]} - q_{K,K}^{[1]} + \rho^{[1]} R_s^{[1]}. \quad (\text{A.9})$$

式中: $q_K^{[1]}$ 为初始状态下,以初始参考构形表面单位面积为量度的热流分量; $R_s^{[1]}$ 为从自然状态到初始状态变化过程中单位时间内单位质量的热供。而从初始状态到最终状态,在广义外力(弹性力或热源)的作用下,耦合系统中产生热流,在最终状态,能量平衡方程可以表示为

$$\rho^{[F]} \dot{U}_s^{[F]} = T_{IJ}^{\text{PK2}[F]} \dot{E}_{IJ}^{[F]} - q_{K,K}^{[F]} + \rho^{[F]} R_s^{[F]}. \quad (\text{A.10})$$

式中: $U_s^{[F]}$ 为最终状态的比内能; $q_K^{[F]}$ 为最终状态下,以初始参考构形表面单位面积为量度的热流分量; $R_s^{[F]}$ 为最终状态单位时间内单位质量的热供。

A.3.5 热力学第二定律:Clausius-Duhem 不等式

热力学第一定律没有确定热流的方向,而热力学第二定律对热力学过程的可能方向施加了限制。

后者指出:总熵的变化率绝不会小于通过连续体表面进入连续体的熵流与连续体内部的熵产(entropy production)之和。我们可以将热力学第二定律写成 Clausius-Duhem 不等式的形式。对于第二类过程,从自然状态到初始状态,可以表示为

$$\begin{aligned} & \rho^{[1]} (\dot{\psi}_s^{[1]} + S_s^{[1]} \dot{T}^{[1]}) - \\ & \sigma_{IJ}^{[1]} \dot{e}_{IJ}^{[1]} + \frac{1}{T^{[1]}} q_I^{[1]} T_{,I}^{[1]} = -T^{[1]} \zeta_s^{[1]} \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

式中: $\psi_s^{[1]}$ 为初始状态的比亥姆霍兹自由能,满足 $\psi_s^{[1]} = U_s^{[1]} - T^{[1]} S_s^{[1]}$; $S_s^{[1]}$ 为初始状态的比熵; $T^{[1]}$ 为初始状态的温度; $\zeta_s^{[1]}$ 为初始状态的熵产。从初始状态到最终状态,可以表示为

$$\begin{aligned} & \rho^{[F]} (\dot{\psi}_s^{[F]} + S_s^{[F]} \dot{T}^{[F]}) - T_{IJ}^{\text{PK2}[F]} \dot{E}_{IJ}^{[F]} + \\ & \frac{1}{T^{[F]}} q_I^{[F]} T_{,I}^{[F]} = -T^{[F]} \zeta_s^{[F]} \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

式中: $\psi_s^{[F]}$ 为最终状态的比亥姆霍兹自由能,满足 $\psi_s^{[F]} = U_s^{[F]} - T^{[F]} S_s^{[F]}$; $S_s^{[F]}$ 为最终状态的比熵; $T^{[F]}$ 为最终状态的温度; $\zeta_s^{[F]}$ 为最终状态的熵产。

A.4 傅里叶定律与 Maxwell-Cattaneo-Vernotte 方程:经典不可逆热力学的局限性

经典热力学(或称为平衡态热力学)假设物理过程中热力学状态的转变以“极慢”的速度发生,即总是在热力学状态改变之前就已经达到热力学平衡态。这种长时间特征的热力学转变过程称为准稳态过程^①,在两个相邻状态之间的准稳态过程是可逆的。然而,经典热力学仅对热平衡状态有效,不足以描述非平衡态过程;而当物体没有达到平衡态时,热力学第二定律要求物体各部分的性质趋向平衡态,这是一个不可逆过程。为了描述非平衡态热力学现象,Onsager^②提出了经典不可逆热力学,在许多实际问题中得到了成功应用。

经典不可逆热力学存在一个基本假设:局部平衡假设。即假设物理系统的热和机械性质之间的局部和瞬态关系与处于平衡态的均匀系统相同。这意味着,经典热力学中所有变量在处于平衡态的若干

①Tzou D Y. Macro-to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior. Chichester: John Wiley & Sons, 2014.

②Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes: I. Physical Review, 1931, 37(4): 405 - 426.

个单元内定义,各单元可以取不同值,可以与时间和空间连续相关;在平衡态之外,只要在每个时刻对状态变量进行局部陈述,则状态变量之间的平衡态热力学关系依然有效。另外,该假设允许我们根据熵的凹性质局部推导出稳定的热力学条件^①。

在经典热力学框架中,确保非负的熵产就可以得到傅里叶定律。考虑一个刚性导热体,忽略参考构形和所处状态,傅里叶定律表示为

$$q_I = -K_{IJ} T_{,J}。 \tag{A.13}$$

式中, K_{IJ} 为热导率张量分量。结合忽略了参考构形的能量平衡方程(式(A.10)),由于刚性导热体不发生变形,所以可以忽略应力功率,同时不考虑热源项,我们可以得到热传输方程:

$$\rho c_s^{[E]} \dot{T} = (K_{IJ} T_{,J})_{,I}。 \tag{A.14}$$

式中, $c_s^{[E]}$ 为定容比热容,定义为 $c_s^{[E]} = dU_s/dT$ 。式(A.14)是热扩散方程,是一个抛物型方程,尽管它适用于大多数实际问题,但忽略了加速热流所需的时间,因此会产生热传播速度无穷大的悖论。Cattaneo^②在各向同性情况下引入了热流弛豫时间 τ ,修正了傅里叶定律,从而消除了悖论,这就是 Maxwell-Cattaneo-Vernotte(MCV) 方程。在一般各向异性情况下,热流弛豫时间会变为热流弛豫时间张量,于是 MCV 方程可以写成

$$q_I + \tau_{IJ} \dot{q}_I = -K_{IJ} T_{,J}。 \tag{A.15}$$

式中, τ_{IJ} 为热流弛豫时间张量分量。当 $|\tau_{IJ}|$ 可以忽略不计,就可以退化为傅里叶定律(式(A.13))。

然而,当将式(A.15)代入式(A.14)时,就会得到电报形式的双曲型方程。考虑各向同性情况,得到

$$\tau T + \dot{T} - \frac{K}{\rho c_s^{[E]}} T_{,II} = 0。 \tag{A.16}$$

当 $t \ll \tau$ 时,式(A.16)中的 $\dot{T}$ 可以忽略,从而变成了一个波动方程,描述了一个可逆过程;而当 $t \gg \tau$ 时,式(A.16)中的 T 可以忽略,就退化为式(A.14),

描述了一个不可逆过程。因此,MCV 方程表明:在极短的时间内,式(A.16)描述可逆过程,热量以有限速度的波动形式传播;而在长时间尺度上,式(A.16)过程不可逆,热量在系统内扩散。

但是,根据忽略了参考构形的 Clausius-Duhem 不等式(式(A.12)),我们可以得到熵产的表达式:

$$\zeta^{S_s} = \frac{K}{T^2} T_{,II} + \frac{\tau}{T^2} \dot{q}_I T_{,I}。 \tag{A.17}$$

式(A.17)等号右端第二项导致熵产不再保持非负性。Jou 等^③研究发现,式(A.17)导致经典不可逆热力学中的熵并不是单调递增的,而是表现为振荡的方式,这与局部平衡假设矛盾,因为局部平衡假设要求熵产在任何时间处处为正。因此,MCV 方程需要被重新考虑。

A.5 扩展不可逆热力学

A.5.1 扩展不可逆热力学基本原理

扩展不可逆热力学的基本假设基于通量的广义熵假设^{④⑤}——熵除了与经典热力学中的变量相关,还与耗散通量和广义梯度相关。而对于基于 MCV 模型的热弹性固体而言,涉及到的耗散通量只有热流,并且熵与广义梯度无关。通过引入耗散通量作为熵的自变量,假设得到的广义熵具有如下性质:1)可加性;2)对于经典变量和耗散通量是一个凹函数;3)熵产局部非负。

选择耗散通量而非经典变量的梯度作为自变量有一些原因:1)耗散通量与明确定义的微观算子相关,因此可以更直接地与非平衡态统计力学进行比较;2)对于快速过程,使用通量比使用梯度更方便,而对于稳态现象,通量和梯度等效;3)用通量来表示熵,可以很容易推广经典的扰动理论,评估熵的非经典项系数;4)用经典变量的梯度作为自变量会导致本构方程展开式的发散问题。

①Jou D, Casas-Vázquez J, Lebon G. Extended Irreversible Thermodynamics. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1996: 41 - 74.
②Cattaneo C. Sulla Conduzione del Calore. Atti Sem Mat Fis Univ Modena, 1948, 3: 83 - 101.
③Jou D, Casas-Vázquez J, Lebon G. Nonequilibrium Entropy and the Second Law of Thermodynamics: A Simple Illustration. International Journal of Thermophysics, 1993, 14(4): 671 - 683.
④Machlup S, Onsager L. Fluctuations and Irreversible Process: II: Systems with Kinetic Energy. Physical Review, 1953, 91(6): 1512 - 1515.
⑤Lambermont J, Lebon G. On a Generalization of the Gibbs Equation for Heat Conduction. Physics Letters A, 1973, 42(7): 499 - 500.

现在只考虑从初始状态到最终状态的过程。定义广义比熵为

$$S_s = \hat{S}_s(U_s, q_I). \quad (\text{A.18})$$

式中: $\hat{S}_s$ 为比熵的本构响应函数; 比内能 U_s 为经典热力学自变量; 热流分量 q_I 为引入的额外自变量。

根据式(A.18)以及广义熵的可加性, 广义Gibbs方程可以表示为如下微分形式:

$$dS_s = \frac{1}{\theta} dU_s - \nu \alpha_{[\text{EIT}]10} q_I dq_I. \quad (\text{A.19})$$

式中: θ 为非平衡温度; ν 是为了方便而引入的系数; $\alpha_{[\text{EIT}]10}$ 为扩展不可逆热力学中与 U_s 和 q_I^2 相关的系数, 下标 [EIT] 表示扩展不可逆热力学。 θ 定义为

$$\begin{aligned} \theta^{-1}(U_s, q_I) = \\ \left(\frac{\partial S_s}{\partial U_s} \right)_{q_I} = T^{-1}(U_s) + a_{[\text{EIT}]}(U_s) q_I^2. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

式中: $a_{[\text{EIT}]}(U_s)$ 为系数; T 为局部平衡温度。 ν 和 $\alpha_{[\text{EIT}]10}$ 满足如下关系:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_s}{\partial q_I} \right) = \\ -\nu \alpha_{[\text{EIT}]11}(U_s, q_I) = -\nu \alpha_{[\text{EIT}]10}(U_s, q_I^2) q_I. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

式中, $\alpha_{[\text{EIT}]11}$ 为与 U_s 和 q_I 相关的系数。由式(A.21)右端可知, 式(A.19)省略了热流的三阶项。结合忽略了参考构形和应力功率的内能平衡方程(式(A.12)), 可以得到熵的时间变化率:

$$\begin{aligned} \rho \dot{S}_s = -J_{I,I}^{S_s} + \zeta^{S_s} = \\ -\left(\frac{q_I}{\theta} \right)_{,I} + q_I \left[\left(\frac{1}{\theta} \right)_{,I} - \alpha_{[\text{EIT}]10} \dot{q}_I \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

式中, $J_I^{S_s}$ 为广义熵流向量的分量。我们注意到, ζ^{S_s} 具有双线性形式的结构:

$$\zeta^{S_s} = q_I \left[\left(\frac{1}{\theta} \right)_{,I} - \alpha_{[\text{EIT}]10} \dot{q}_I \right] = q_I \hat{F}_I. \quad (\text{A.23})$$

式中, $\hat{F}_I$ 为广义作用力分量。为了得到与熵产非负性相容的热流演化方程, 最简单的方法是假定 F_I 与 U_s 和 q_I^2 通过系数 $\hat{\mu}_1(U_s, q_I^2)$ 线性相关。于是式(A.23)变为

$$\zeta^{S_s} = q_I F_I = q_I \hat{\mu}_1(U_s, q_I^2) q_I \geq 0. \quad (\text{A.24})$$

可以得到 $\hat{\mu}_1 \geq 0$ 。对于式(A.24)中力和通量的非

线性关系, 需要注意系数的符号。对于泰勒级数展开式, 熵产非负只是对热流的二次项符号施加限制, 而不对热流的四次项或更高次项施加限制。

对于各向同性的刚性导热体, 定义 F_I 之后, 存在 q_I 的一类变换, 使熵产不变。例如,

$$q_I D_a \hat{q}_I = q_I \dot{q}_I. \quad (\text{A.25})$$

其中,

$$D_a \hat{q}_I = \dot{q}_I + \hat{a} W_{IJ} q_I. \quad (\text{A.26})$$

式中: D_a 为与常数 $\hat{a}$ 相关的一般导数符号; W_{IJ} 为反对称张量分量。使用热流的一般导数而非物质时间导数时, 熵产表达式保持不变。

为了与傅里叶定律和 MCV 方程进行比较, 我们假设一个恒定热流的情况, 此时 $\dot{q}_I = 0$ 。用非平衡温度 θ 代替局部平衡温度 T , 则唯象系数 μ_1 与 K 和 θ 相关:

$$\mu_1 = \frac{1}{K\theta^2}. \quad (\text{A.27})$$

随后考虑 $\dot{q}_I \neq 0$ 的情况, $\alpha_{[\text{EIT}]10}$ 与 τ 、 K 和 θ 相关:

$$\alpha_{[\text{EIT}]10} = \frac{\tau}{K\theta^2}. \quad (\text{A.28})$$

于是, 广义 Gibbs 方程(式(A.19))可以表示为

$$dS_s = \frac{1}{\theta} dU_s - \frac{\tau}{\rho K \theta^2} q_I dq_I. \quad (\text{A.29})$$

当热流的二次项可以忽略不计时, 非平衡温度退化为局部平衡温度。于是广义熵产变为

$$\zeta^{S_s} = \frac{1}{K\theta^2} q_I^2 \geq 0. \quad (\text{A.30})$$

式(A.30)确保了熵产的非负性。

根据前面阐述的原理, 在热声弹性情况下, 我们可以合理假设, 从自然状态到初始状态, 物体经历的是准稳态过程, 用傅里叶定律足以刻画物体的导热特性, 所采用的温度是局部平衡温度。而从初始状态到最终状态, 我们用 MCV 方程来刻画导热特性, 在这个过程中涉及非平衡态, 用非平衡温度来代替局部平衡温度。

A.5.2 理性扩展热力学流程

热流的演化方程可以写成如下一般形式:

$$\dot{q}_I^{[F]} = \dot{q}_I(t) = -J_{IJ,I}^{q_I}(t) + \zeta^{q_I}(t). \quad (\text{A.31})$$

式中: $J_{IJ}^{q_I}$ 为热流通量, 是二秩张量分量; ζ^{q_I} 为热流产, 是一个向量。式(A.31)等号右端第一项表示与外界环境交换的热流, 第二项表示产生的热流。这

些量是未知的,只能通过本构方程表示。

对于本构自变量,用 E_{IJ} 和 θ 代替 U_s , 就可以用比亥姆霍兹自由能 ψ_s 来表述热力学第二定律,并将式(A.31)视为使熵产不等式成立的约束。为了将这些约束考虑在内,采用 Lagrange 乘子法^①,可以得到

$$-q_{I,I}^{[F]} - \rho^{[I]}(\dot{\psi}_s^{[F]} + S_s^{[F]}\dot{\theta}^{[F]}) + (T_{IJ}^{PK2[F]}\dot{E}_{IJ}^{[F]} + \rho^{[I]}R_s) + \theta^{[F]}J_{I,I}^{S[F]} + \Lambda(\dot{q}^{[F]} + J_{IJ}^{q[F]} - \zeta^{q_I[F]}) = \theta^{[F]}\zeta_s^{S[F]} \geq 0. \tag{A.32}$$

式中: $\theta^{[F]}$ 为最终状态的非平衡温度; R_s 为单位时间、单位质量的热供; Λ 为 Lagrange 乘子。式(A.32)满足自变量 E_{IJ} 、 θ 和 q_I 的任意取值,但依然有 3 个未知量: $J_I^{S[F]}$ 、 $J_{IJ}^{q[F]}$ 和 ζ^{q_I} , 由以下 3 个本构关系式给出:

$$\begin{cases} J_I^{S[F]} = \epsilon_{[RET]}[E_{IJ}(t), \theta(t), q_I^2(t), t]q_I^{[F]} = \epsilon_{[RET]}(t)q_I^{[F]}; \\ J_{IJ}^{q[F]} = a_{[RET]}[E_{IJ}(t), \theta(t), q_I^2(t), t]\delta_{IJ} = a_{[RET]}(t)\delta_{IJ}; \\ \zeta^{q_I[F]} = -b_{[RET]}[E_{IJ}(t), \theta(t), q_I^2(t), t]q_I^{[F]} = -b_{[RET]}(t)q_I^{[F]}. \end{cases} \tag{A.33}$$

式中, $\epsilon_{[RET]}$ 、 $a_{[RET]}$ 和 $b_{[RET]}$ 为理性扩展热力学中的未知标量函数。需要注意,式(A.33)构造的关系式是形式最简单的关系式,Lebon 等^{②③}提出了更一般的表达式。将式(A.33)代入式(A.32),为了确保式(A.32)的非负性成立,可以得到以下本构方程。

应力本构方程:

$$T_{IJ}^{PK2[F]} = T_{IJ}^{PK2}(t = t^{[F]}) = \rho^{[I]} \frac{\partial \psi_s(E_{IJ}(t), \theta(t), q_K(t), t)}{\partial E_{IJ}(t)} \bigg|_{\substack{t = t^{[F]} \\ \dot{\theta}(t) = 0 \\ q_K(t) = 0}}. \tag{A.34}$$

式中, $T_{IJ}^{PK2[F]}$ 为参考初始坐标系的最终第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量的分量。

熵本构方程:

$$S_s^{[F]} = - \frac{\partial \psi_s(E_{IJ}(t), \theta(t), q_K(t), t)}{\partial \theta(t)} \bigg|_{\substack{t = t^{[F]} \\ \dot{E}_{IJ}(t) = 0 \\ q_K(t) = 0}}. \tag{A.35}$$

熵流本构方程:

$$J_I^{S[F]} = J_I^{S_s}(t = t^{[F]}) = \frac{1}{\theta^{[F]}}q_I^{[F]}. \tag{A.36}$$

式中, $J_I^{S[F]}$ 为参考初始坐标系的最终状态的熵流向量的分量。

除此之外,我们还可以得到

$$\frac{\partial a_{[RET]}(t)}{\partial q_I^2(t)} = 0, \frac{\partial a_{[RET]}(t)}{\partial E_{IJ}(t)} = 0, \frac{\partial a_{[RET]}(t)}{\partial \theta(t)} > 0. \tag{A.37}$$

式中, $a_{[RET]}$ 只与 θ 有关,与应变和热流的二次项都无关。于是,式(A.31)变为

$$\dot{q}_I^{[F]} = - \frac{da_{[RET]}(t)}{d\theta(t)} \bigg|_{t=t^{[F]}} \theta_{,I}^{[F]} - b^{[F]}q_I^{[F]}. \tag{A.38}$$

如果不考虑压热效应,即热流与应变无关,我们可以使

$$b^{[F]} = \frac{1}{\tau^{[F]}}, \frac{da_{[RET]}(t)}{d\theta(t)} \bigg|_{t=t^{[F]}} = b^{[F]}K^{[F]}. \tag{A.39}$$

于是就可以得到 MCV 方程。另外,需要注意,MCV 方程隐含的假设是温度梯度的建立是热流产生的原因——如果初始温度梯度为 0,则热流为 0。如果温度梯度突然建立,则热流会产生并经历一个弛豫过程然后保持恒定;如果温度梯度突然消失,则热流会经历一个弛豫过程,然后消失。热流产本构方程为

$$\zeta_K^{q_K[F]} = - \frac{q_K^{[F]}}{\tau}. \tag{A.40}$$

式中, $\zeta_K^{q_K[F]}$ 为最终状态热流产向量的分量。而如果考虑压热效应,即热流与应变相关,则有

$$\dot{q}_I^{[F]} = - \frac{da_{[RET]}(t)}{d\theta(t)} \bigg|_{t=t^{[F]}} \theta_{,I}^{[F]} - b^{[F]}q_I^{[F]} -$$

①Liu I. Method of Lagrange Multipliers for Exploitation of the Entropy Principle. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1972, 46(2): 131-148.
②Lebon G, Grmela M, Lhuillier D. A Comparative Study of the Coupling of Flow with Non-Fickian Thermodiffusion: Part I: Extended Irreversible Thermodynamics. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics, 2003, 28(1): 1-22.
③Lebon G, Jou D, Casas-Vázquez J. Understanding Non-Equilibrium Thermodynamics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.

$$\left. \frac{\partial q_I(t)}{\partial E_{JK}(t)} \right|_{t=t^{[F]}} E_{JK}^{[F]} - \left. \frac{\partial q_I(t)}{\partial \theta(t)} \right|_{t=t^{[F]}} \theta^{[F]}. \quad (\text{A.41})$$

如果初始非平衡温度梯度为 0, 即 $\theta_{,I}^{[\square]} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial X_I} \right|_{t=0} = T_{,I}^{[\square]} = 0$ (X_I 为位置向量的分量), 则有

$$\begin{cases} q_I^{[\square]} = q_I(t=0) = 0; \\ \left. \frac{\partial q_I(t)}{\partial E_{JK}(t)} \right|_{t=0} = 0; \\ \left. \frac{\partial q_I(t)}{\partial \theta(t)} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

A.6 平面波分析流程

Rudgers^① 针对热声波传播的晶格模型, 定义了热流弛豫时间。在本文的背景中, 初始状态下的各向同性热流弛豫时间表示为

$$\tau^{[\square]} = \frac{K^{[\square]}}{\rho^{[\square]} c_s^{[E][\square]} v_p^{[iso][\square]2}}. \quad (\text{A.43})$$

式中: $K^{[\square]}$ 为初始状态下的热导率; $v_p^{[iso][\square]}$ 为初始状态下的等温 P 波速度。假定在宏观连续介质力学范畴内, $K^{[\square]}$ 与初始应力、应变无关(但在微观连续介质力学范畴内, 热导率与初始应力、应变的关系还需进行进一步探讨)。定容比热容 $c_s^{[E][\square]}$ 视为等于自然状态下测量得到的值 $c_s^{[E][N]}$, 与初始应力、应变无关, 但单位体积定容热容 $\rho^{[\square]} c_s^{[E][\square]}$ 显然与初始应力、应变有关。 $v_p^{[iso][\square]}$ 与初始应力/应变有关, 且可能具有应力诱导的各向异性。

接下来, 对于热声弹性介质中传播的平面波, 我们仅关注从初始状态到最终状态的过程, 并以初始构形作为参考构形。为简单起见, 基于式(A.38)进行分析。设平面谐波为:

$$\begin{cases} \Delta u_I = \Delta u_0 N_I^{[u]} \exp[i(k N_J^{[k]} X_J - \omega t)]; \\ \Delta \vartheta = \Delta \vartheta_0 \exp[i(k N_J^{[k]} X_J - \omega t)]. \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

式中: Δu_0 、 $\Delta \vartheta_0$ 分别为位移增量和温度增量的振幅; $N_I^{[u]}$ 为位移的单位向量的分量; k 为波数; $N_J^{[k]}$ 为波法向量的分量; ω 为角频率。将式(A.44)代入式(A.38), 忽略体力和热供。于是可以得到广义 Kelvin-Christoffel 方程:

$$\Phi \cdot w = 0. \quad (\text{A.45})$$

其中:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & \varphi_{15} & \varphi_{16} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} & \varphi_{25} & \varphi_{26} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & \varphi_{35} & \varphi_{36} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} & \varphi_{45} & \varphi_{46} \\ \varphi_{51} & \varphi_{52} & \varphi_{53} & \varphi_{54} & \varphi_{55} & \varphi_{56} \\ \varphi_{61} & \varphi_{62} & \varphi_{63} & \varphi_{64} & \varphi_{65} & \varphi_{66} \end{bmatrix}; \\ w &= \begin{bmatrix} u_0 N_1^{[u]} \\ u_0 N_2^{[u]} \\ u_0 N_3^{[u]} \\ \vartheta_0 \\ \vartheta_0 \\ \vartheta_0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.46})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{11} &= k^2 D_{11}^{[iso][\square]} - \rho^{[\square]} \omega^2, \varphi_{12} = k^2 D_{12}^{[iso][\square]}, \\ \varphi_{13} &= k^2 D_{13}^{[iso][\square]}, \varphi_{14} = -M_{11}^{[eqv][\square]} (ik N_1^{[k]}), \\ \varphi_{15} &= -M_{12}^{[iso][\square]} (ik N_2^{[k]}), \varphi_{16} = -M_{13}^{[eqv][\square]} (ik N_3^{[k]}); \\ \varphi_{21} &= k^2 D_{21}^{[iso][\square]}, \varphi_{22} = k^2 D_{22}^{[iso][\square]} - \rho^{[\square]} \omega^2, \\ \varphi_{23} &= k^2 D_{23}^{[iso][\square]}, \varphi_{24} = -M_{12}^{[eqv][\square]} (ik N_1^{[k]}), \\ \varphi_{25} &= -M_{22}^{[eqv][\square]} (ik N_2^{[k]}), \varphi_{26} = -M_{23}^{[eqv][\square]} (ik N_3^{[k]}); \\ \varphi_{31} &= k^2 D_{31}^{[iso][\square]}, \varphi_{32} = k^2 D_{32}^{[iso][\square]}, \\ \varphi_{33} &= k^2 D_{33}^{[iso][\square]} - \rho^{[\square]} \omega^2, \varphi_{34} = -M_{13}^{[eqv][\square]} (ik N_1^{[k]}), \\ \varphi_{35} &= -M_{23}^{[eqv][\square]} (ik N_2^{[k]}), \varphi_{36} = -M_{33}^{[eqv][\square]} (ik N_3^{[k]}); \\ \varphi_{41} &= T^{[\square]} M_{11}^{[eqv][\square]} (ik N_1^{[k]}) (i\omega + \omega^2 \tau_{11}^{[\square]}), \\ \varphi_{42} &= \varphi_{43} = \varphi_{45} = \varphi_{46} = 0, \\ \varphi_{44} &= k^2 N_1^{[k]2} K_{11}^{[\square]} - \rho^{[\square]} c^{[E][\square]} (i\omega + \omega^2 \tau_{11}^{[\square]}); \\ \varphi_{51} &= \varphi_{53} = \varphi_{54} = \varphi_{56} = 0, \\ \varphi_{52} &= T^{[\square]} M_{22}^{[eqv][\square]} (ik N_2^{[k]}) (i\omega + \omega^2 \tau_{22}^{[\square]}), \\ \varphi_{55} &= k^2 N_2^{[k]2} K_{22}^{[\square]} - \rho^{[\square]} c^{[E][\square]} (i\omega + \omega^2 \tau_{22}^{[\square]}); \\ \varphi_{61} &= \varphi_{62} = \varphi_{64} = \varphi_{65} = 0, \\ \varphi_{63} &= T^{[\square]} M_{33}^{[eqv][\square]} (ik N_3^{[k]}) (i\omega + \omega^2 \tau_{33}^{[\square]}), \\ \varphi_{66} &= k^2 N_3^{[k]2} K_{33}^{[\square]} - \rho^{[\square]} c^{[E][\square]} (i\omega + \omega^2 \tau_{33}^{[\square]}). \end{aligned} \right. \quad (\text{A.47})$$

式中, $D_{IK}^{[iso][\square]}$ 为等温声张量分量,

$$D_{IK}^{[iso][\square]} = A_{IJKL}^{[iso][\square]} (N_J^{[k]} N_L^{[k]}). \quad (\text{A.48})$$

于是有

①Rudgers A J. Analysis of Thermoacoustic Wave Propagation in Elastic Media. The Journal of the Acoustical Society of America, 1990, 88(2): 1078-1094.

$$\begin{aligned}
D_{11}^{[\text{iso}][1]} &= A_{11}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_1^{[k]}) + A_{66}^{[\text{iso}][1]} (N_2^{[k]} N_2^{[k]}) + \\
&A_{88}^{[\text{iso}][1]} (N_3^{[k]} N_3^{[k]}) + 2A_{16}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_2^{[k]}) + \\
&2A_{18}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_3^{[k]}) + 2A_{68}^{[\text{iso}][1]} (N_2^{[k]} N_3^{[k]}) ; \\
D_{12}^{[\text{iso}][1]} &= D_{21}^{[\text{iso}][1]} = A_{19}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_1^{[k]}) + \\
&A_{26}^{[\text{iso}][1]} (N_2^{[k]} N_2^{[k]}) + A_{48}^{[\text{iso}][1]} (N_3^{[k]} N_3^{[k]}) + \\
&(A_{12}^{[\text{iso}][1]} + A_{69}^{[\text{iso}][1]}) N_1^{[k]} N_2^{[k]} + \\
&(A_{14}^{[\text{iso}][1]} + A_{89}^{[\text{iso}][1]}) N_1^{[k]} N_3^{[k]} + \\
&(A_{46}^{[\text{iso}][1]} + A_{28}^{[\text{iso}][1]}) N_2^{[k]} N_3^{[k]} ; \\
D_{13}^{[\text{iso}][1]} &= D_{31}^{[\text{iso}][1]} = A_{15}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_1^{[k]}) + \\
&A_{67}^{[\text{iso}][1]} (N_2^{[k]} N_2^{[k]}) + A_{38}^{[\text{iso}][1]} (N_3^{[k]} N_3^{[k]}) + \\
&(A_{17}^{[\text{iso}][1]} + A_{56}^{[\text{iso}][1]}) N_1^{[k]} N_2^{[k]} + \\
&(A_{13}^{[\text{iso}][1]} + A_{58}^{[\text{iso}][1]}) N_1^{[k]} N_3^{[k]} + \\
&(A_{36}^{[\text{iso}][1]} + A_{78}^{[\text{iso}][1]}) N_2^{[k]} N_3^{[k]} ; \\
D_{22}^{[\text{iso}][1]} &= A_{99}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_1^{[k]}) + A_{22}^{[\text{iso}][1]} (N_2^{[k]} N_2^{[k]}) + \\
&A_{44}^{[\text{iso}][1]} (N_3^{[k]} N_3^{[k]}) + 2A_{29}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_2^{[k]}) + \\
&2A_{49}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_3^{[k]}) + 2A_{24}^{[\text{iso}][1]} (N_2^{[k]} N_3^{[k]}) ; \\
D_{23}^{[\text{iso}][1]} &= D_{32}^{[\text{iso}][1]} = A_{59}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_1^{[k]}) + \\
&A_{27}^{[\text{iso}][1]} (N_2^{[k]} N_2^{[k]}) + A_{34}^{[\text{iso}][1]} (N_3^{[k]} N_3^{[k]}) + \\
&(A_{79}^{[\text{iso}][1]} + A_{25}^{[\text{iso}][1]}) N_1^{[k]} N_2^{[k]} + \\
&(A_{39}^{[\text{iso}][1]} + A_{45}^{[\text{iso}][1]}) N_1^{[k]} N_3^{[k]} + \\
&(A_{23}^{[\text{iso}][1]} + A_{47}^{[\text{iso}][1]}) N_2^{[k]} N_3^{[k]} ; \\
D_{33}^{[\text{iso}][1]} &= A_{55}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_1^{[k]}) + A_{77}^{[\text{iso}][1]} (N_2^{[k]} N_2^{[k]}) + \\
&A_{33}^{[\text{iso}][1]} (N_3^{[k]} N_3^{[k]}) + 2A_{57}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_2^{[k]}) + \\
&2A_{35}^{[\text{iso}][1]} (N_1^{[k]} N_3^{[k]}) + 2A_{57}^{[\text{iso}][1]} (N_2^{[k]} N_3^{[k]}) .
\end{aligned}
\tag{A.49}$$

为了得到式(A.45)的非奇异解,需要 $|\Phi| = 0$, 然而想得到 $|\Phi|$ 的表达式相当不易。为了进一步简化分析,我们假定介质在自然状态下为各向同性介质,平面波沿 Z 方向传播,因此波法向量 $N^{[k]} = (N_1^{[k]}, N_2^{[k]}, N_3^{[k]}) = (0, 0, 1)$, 等效热应力张量为对角张量。于是, Φ 变为

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{33} & 0 & 0 & \varphi_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_{55} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{63} & 0 & 0 & \varphi_{66} \end{bmatrix} .
\tag{A.50}$$

其中:

$$\begin{cases} \varphi_{11} = \rho^{[1]} k^2 \left(\frac{A_{88}^{[\text{iso}][1]}}{\rho^{[1]}} - v^{[1]2} \right); \\ \varphi_{22} = \rho^{[1]} k^2 \left(\frac{A_{44}^{[\text{iso}][1]}}{\rho^{[1]}} - v^{[1]2} \right); \\ \varphi_{33} = \rho^{[1]} k^2 \left(\frac{A_{33}^{[\text{iso}][1]}}{\rho^{[1]}} - v^{[1]2} \right); \\ \varphi_{36} = -M_{33}^{[\text{eqv}][1]} i k; \\ \varphi_{44} = -\rho^{[1]} c_s^{[E][1]} k^2 v^{[1]2} \left(\frac{i}{\omega} + \tau_{11}^{[1]} \right); \\ \varphi_{55} = -\rho^{[1]} c_s^{[E][1]} k^2 v^{[1]2} \left(\frac{i}{\omega} + \tau_{22}^{[1]} \right); \\ \varphi_{63} = T^{[1]} M_{33}^{[\text{eqv}][1]} (i k) k^2 v^{[1]2} \left(\frac{i}{\omega} + \tau_{33}^{[1]} \right); \\ \varphi_{66} = k^2 K_{33}^{[1]} - \rho^{[1]} c_s^{[E][1]} k^2 v^{[1]2} \left(\frac{i}{\omega} + \tau_{33}^{[1]} \right). \end{cases}
\tag{A.51}$$

式中, $v^{[1]} = \omega/k$, 为初始波速, 是一个复数。于是

$$|\Phi| = \varphi_{11} \varphi_{22} \left(\varphi_{33} - \frac{\varphi_{36} \varphi_{63}}{\varphi_{66}} \right) \varphi_{44} \varphi_{55} \varphi_{66} = 0 .
\tag{A.52}$$

式(A.52)是 $v^{[1]}$ 的多项式方程。对于热弹性情况和热声弹性情况, 求解此类方程是很复杂的, 甚至无法求得解析解。根据 Carcione 等^①

的平面波分析流程, 引入 Maxwell 黏弹模型核将有利于简化式(A.52):

$$M_{33}^{[M][1]} = \frac{i \omega a_{33}^{[1]2}}{-1 + i \omega \tau_{33}^{[1]}}; a_{33}^{[1]} = \sqrt{\frac{K_{33}^{[1]}}{\rho^{[1]} c_s^{[E][1]}}} .
\tag{A.53}$$

因此有

$$\begin{aligned} |\Phi| &= \left(\frac{A_{88}^{[\text{iso}][1]}}{\rho^{[1]}} - v^{[1]2} \right) \left(\frac{A_{44}^{[\text{iso}][1]}}{\rho^{[1]}} - v^{[1]2} \right) \cdot \\ &\left[\left(\frac{A_{33}^{[\text{iso}][1]}}{\rho^{[1]}} - v^{[1]2} \right) (M_{33}^{[M][1]} - v^{[1]2}) - \right. \\ &\left. v^{[1]2} b_{33}^{[\text{eqv}][1]2} \right] = 0 . \end{aligned}
\tag{A.54}$$

于是可以求解出两种准横(qs)波速度:

$$v_{\text{qs1}}^{[\text{iso}][1]} = \sqrt{\frac{A_{88}^{[\text{iso}][1]}}{\rho^{[1]}}}; v_{\text{qs2}}^{[\text{iso}][1]} = \sqrt{\frac{A_{44}^{[\text{iso}][1]}}{\rho^{[1]}}} .
\tag{A.55}$$

①Carcione J M, Wang Z W, Ling W, et al. Simulation of Wave Propagation in Linear Thermoelastic Media, Geophysics, 2018, 84(1): T1-T11.

对于准纵(qP)波,可以得到

$$v_{\text{qP}}^{[\text{I}]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[v_{\text{qP}}^{[\text{adi}][\text{I}]2} + M_{33}^{[\text{M}][\text{I}]} \pm \sqrt{(v_{\text{qP}}^{[\text{adi}][\text{I}]2} + M_{33}^{[\text{M}][\text{I}]})^2 - 4M_{33}^{[\text{M}][\text{I}]} v_{\text{qP}}^{[\text{iso}][\text{I}]}} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{A.56}$$

式 (A.56) 有两个解, 一个为 E 波 (正号), 一个为 T

波 (负号)。当 $\omega = 0$ 时, 有

$$v_1^{[\text{I}]} = v_{\text{qP}}^{[\text{adi}][\text{I}]} = v_{\text{qPE}}^{[\text{adi}][\text{I}]}, \quad v_2^{[\text{I}]} = v_{\text{qPT}}^{[\text{adi}][\text{I}]} = 0. \tag{A.57}$$

而当 $K^{[\text{I}]} \rightarrow 0$ 时, 也可以得到相同的结果。这是因为 Rudgers^① 定义热流弛豫时间的方式令 $\omega \rightarrow \infty$ 与 $K^{[\text{I}]} \rightarrow \infty$ 等效。

①Rudgers A J. Analysis of Thermoacoustic Wave Propagation in Elastic Media. The Journal of the Acoustical Society of America, 1990, 88(2): 1078-1094.