

一种两阶段优化的声速剖面自适应简化算法

卜令冉^{1,2}, 李广云^{1,2}, 贾学东^{1,2}, 王 力^{1,2}, 陈国军^{1,2}, 陈 晨^{1,2}

(1.信息工程大学,河南 郑州 450001; 2.北斗导航应用技术河南省协同创新中心,河南 郑州 450001)

摘要:针对高分辨率声速剖面引起的水下声传播计算量过大问题,提出一种兼顾全局最优与计算效率的自适应简化算法。该算法将剖面简化构建为一个优化模型,即在用户设定的均方根误差约束下,求解数量最少的特征点集。为高效实现该目标,设计一种两阶段策略。第1阶段,采用维斯瓦林甘-怀亚特算法快速筛选高质量候选点,大幅缩减搜索空间;第2阶段,在自适应二分搜索框架内,运用动态规划进行全局寻优,精确确定满足误差约束的最小点数及其分布。实验结果表明,在同等压缩率下,本文算法在均方根误差和声线传播时间相对误差两项指标上均优于传统算法,可为高精度水下声学计算提供高效、可靠的声速剖面简化方案。

关键词:声速剖面简化;声线跟踪;两阶段优化;动态规划;自适应算法

中图分类号:P733.2

文献标识码:A

文章编号:1671-0673(2026)02-0246-07

A Two-Stage Optimization Algorithm for Adaptive Sound Speed Profile Simplification

BU Lingran^{1,2}, LI Guangyun^{1,2}, JIA Xuedong^{1,2}, WANG Li^{1,2}, CHEN Guojun^{1,2}, CHEN Chen^{1,2}

(1.Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China;

2.Collaborative Innovation Center of BDS Navigation Application Technology, Henan Province, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: To address the excessive computational load caused by high-resolution sound speed profile (SSP) in underwater acoustic propagation modeling, an adaptive SSP simplification algorithm is proposed, which balances global optimality with computational efficiency. In the algorithm, profile simplification is formulated as an optimization model to find the minimum set of characteristic points subject under a user-defined root mean square error (RMSE) constraint. To achieve this efficiently, a two-stage strategy is designed in this paper. In the first stage the Visvalingam-Whyatt (VW) algorithm is employed to rapidly screen high-quality candidate points, significantly pruning the search space. In the second stage the dynamic programming (DP) is utilized to perform a global search within an adaptive binary search framework, precisely identifying the minimum number of points and their distribution satisfying the error constraint. Experimental results show that at the same compression ratio, the proposed algorithm outperforms traditional methods in terms of both RMSE and the relative error of acoustic ray travel time, which provides an efficient and reliable sound speed profile simplification solution for high-precision underwater acoustic applications.

Key words: sound speed profile simplification; acoustic ray tracing; two-stage optimization; dynamic programming; adaptive algorithm

收稿日期:2025-12-04;修回日期:2026-02-08

作者简介:卜令冉(1994—),男,讲师,博士生,主要研究方向为水下声学定位与时间传递。E-mail:bulingran@163.com

通信作者:李广云(1965—),男,教授,博士,主要研究方向为大地测量学、测量工程和卫星导航等。E-mail:guangyun_li_chxy@163.com

声波是进行水下信息传输与感知的主要信息载体,精确的声传播模型是水下定位导航授时、水声通信信道建模及声场预报等声学应用的基础^[1-5]。在声线跟踪算法中,声速剖面(Sound Speed Profile, SSP)的精细程度直接影响模型精度^[6-7]。现场获取的SSP数据点往往多达数百甚至数千个,若直接用于声线跟踪,巨大的计算量将严重制约大规模数据后处理的效率和水下平台实时计算任务执行^[8-10]。因此,为兼顾计算效率与精度,有必要对原始SSP进行高效简化,提取关键特征点。

SSP简化本质上属于计算几何中的折线简化问题。道格拉斯-普克(Douglas-Peucker, DP)算法作为经典的线要素简化算法被较早应用于SSP简化^[11-12]。为使其更符合声学应用背景,相关研究进行了改进,如基于声速偏移量^[13]、等效面积差^[14]和梯度拟合偏差^[15]的SSP简化算法。维斯瓦林甘-怀亚特(Visvalingam-Whyatt, VW)算法是另一类应用于SSP简化的几何方法^[16]。以上方法计算高效,但其基于局部几何特征决策,难以满足对整体误差的全局控制要求。

为进一步融合声线跟踪物理机理并求解全局最优解,文献[17]建立声线跟踪误差与SSP曲线面积变化的关系模型;文献[18]提出基于最小方差的简化算法,全局搜索递归寻找最佳切分点;文献[19]提出海底大地测量中SSP简化声线精度损失极小准则,并通过遗传算法迭代求解;一些研究引入聚类方法实现SSP简化^[20-22]。此类方法虽精度更高,但计算复杂度大,限制了其在实时任务中的应用。

针对上述问题,本文提出一种兼顾全局最优性与计算效率的声速剖面自适应简化算法。该算法通过建立声传播时间误差与均方根误差的物理联系,将问题转化为特定物理约束下的最优化问题。算法设计了两阶段策略:首先,利用VW算法基于几何重要性进行快速筛选,生成高质量候选特征点集,大幅缩减搜索空间;然后,在自适应二分搜索框架内,运用动态规划方法在候选点集上进行全局最优搜索,最终自动、精确地确定满足误差约束的最小点数及其最优分布。

1 问题建模与算法设计

1.1 问题建模

声速剖面简化在形式上是寻找最优折线逼近的平面几何问题,但其最终目的是应用于声学计

算。因此需要选择合适的误差度量标准,并将其与声传播物理过程相关联。在声线跟踪算法中,在声速水平分层条件下,声线传播时间 T 是声速剖面函数 $c(z)$ 的一个泛函:

$$T[c(z)] = \int_{z_A}^{z_B} \frac{dz}{c(z) \sqrt{1 - p^2 c(z)^2}} \quad (1)$$

式中: z_A 和 z_B 分别为声线传播的起始与终止深度; p 为射线参数,在整个传播路径中保持不变,由斯涅尔定律定义:

$$p = \frac{\cos \theta(z)}{c(z)} \quad (2)$$

式中, $\theta(z)$ 是声线在深度 z 处的掠射角。

设原始声速剖面为 $c_0(z)$,简化后剖面为 $c_s(z)$ 。由剖面简化引入的声速误差 $\delta c(z) = c_s(z) - c_0(z)$ 。当简化质量较高时,满足 $\delta c(z) \ll c_0(z)$,此时由简化引入的传播时间误差 $\Delta T = T[c_s(z)] - T[c_0(z)]$ 可由泛函 $T[c(z)]$ 在 $c_0(z)$ 处的一阶弗雷歇泰勒展开近似得到:

$$\Delta T \approx \int_{z_A}^{z_B} \frac{\delta T}{\delta c(z)} \Big|_{c=c_0} \cdot \delta c(z) dz = \int_{z_A}^{z_B} K(z, p) \cdot \delta c(z) dz \quad (3)$$

式中, $\frac{\delta T}{\delta c(z)} \Big|_{c=c_0}$ 是传播时间泛函对声速剖面的泛函导数在 $c_0(z)$ 处的值,记为核函数 $K(z, p)$:

$$K(z, p) = - \frac{1 - 2p^2 c_0(z)^2}{c_0(z)^2 (1 - p^2 c_0(z)^2)^{3/2}} \quad (4)$$

在本文研究的声线跟踪模型中,主要针对声线由海面直接传播至海底的应用场景,声线仅发生折射而未反转,即掠射角 $\theta(z)$ 大于0,由式(2)可知,满足 $p \cdot c_0(z) < 1$,此时核函数在积分区间内有界且连续。为评估传播时间误差的大小,对式(3)两端取绝对值并应用柯西-施瓦茨不等式,可得其模的一个上界:

$$|\Delta T| \leq \left(\int_{z_A}^{z_B} K(z, p)^2 dz \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{z_A}^{z_B} \delta c(z)^2 dz \right)^{1/2} = \|K(\cdot, p)\|_2 \cdot \|\delta c\|_2 \quad (5)$$

式(5)表明,传播时间误差的上界是由代表物理影响的核函数 L_2 范数 $\|K(\cdot, p)\|_2$ 和代表简化质量的声速误差函数 L_2 范数 $\|\delta c\|_2$ 共同决定的。因此,有效控制传播时间误差的核心在于最小化 $\|\delta c\|_2$ 。

在实际应用中,声速剖面是一组离散的数据点集合 $P_0 = \{(z_i, v_i)\}_{i=1}^N$, N 为数据点数, v 为具体的声速数值。简化后的剖面是由 M 个特征点构成的子集 $P_s = \{(z'_j, v'_j)\}_{j=1}^M$ ($M \ll N$)。通过对 P_s 进行分段

线性插值,可以在每个原始深度点 z_i 上得到声速的估计值 $\hat{v}_i$ 。此时, $\|\delta c\|_2$ 可由均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)进行离散化近似:

$$E_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{v}_i - v_i)^2} \quad (6)$$

基于此,声线跟踪中的声速剖面简化问题可建模为以下优化问题:在满足用户设定的RMSE误差阈值 E_{th} 的前提下,寻找一个包含最少特征点数的子集 P_s 。

该优化目标将几何误差与物理精度约束相结合,但直接求解此组合优化问题是非确定性多项式时间困难(Non-deterministic Polynomial-time hard, NP-hard)问题。为此,本文设计一种两阶段自适应算法高效求解。

1.2 基于VW算法的候选点集生成

算法第1阶段旨在通过VW算法快速筛选出一个规模适中且信息丰富的候选点集,为后续全局优化大幅缩减搜索空间。VW算法通过计算每一点与其相邻两点构成的三角形面积来量化其对曲线形态的贡献度,面积越小的点越冗余,应被优先移除。

对于剖面序列中的任意非端点 $p_i = (z_i, v_i)$ 及其前驱点 p_{i-1} 和后继点 p_{i+1} ,其有效面积 S_i 为

$$S_i = \frac{1}{2} |z_{i-1}(v_i - v_{i+1}) + z_i(v_{i+1} - v_{i-1}) + z_{i+1}(v_{i-1} - v_i)| \quad (7)$$

S_i 值越小,表明点越接近连接 p_{i-1} 和 p_{i+1} 的直线段,冗余度越高,在简化过程中应被优先移除。

为获得满足特定误差约束的候选点集,本阶段将VW算法嵌入一个二分搜索流程中。用户设定的RMSE误差阈值 E_{th} 对应的总误差平方和(Sum of Squared Errors, SSE)阈值为 $E_{\text{SSE0}} = N \cdot E_{\text{th}}^2$ 。为确保候选集包含足够信息,设定一个更严格的中间SSE阈值 $E_{\text{SSE1}} = \alpha \cdot E_{\text{SSE0}}$,其中 α 为调节参数,取值范围为(0,1)。

算法在可能的点数范围 $[2, N]$ 内进行二分搜索,对每个测试点数 M_{mid} ,运行VW算法简化并计算其SSE。若SSE值小于等于 E_{SSE1} ,则说明点数过多,继续在更小的范围 $[2, M_{\text{mid}}-1]$ 内搜索;反之,则在更大范围 $[M_{\text{mid}}+1, N]$ 内搜索。收敛后,即可得到满足中间阈值的最少点数及其对应的剖面,此剖面即为候选点集 P_{mid} 。

1.3 基于动态规划的最优特征点选取

获得候选点集 P_{mid} 之后,算法进入第2阶段,目标是从 P_{mid} 中选出点数最少的子集 P_s ,使其满足最

终RMSE阈值 E_{th} 。该问题通过一个外层的二分搜索框架求解,其核心是解决以下子问题:给定目标点数 M ,如何从 P_{mid} 中选出 M 个点,使得总SSE值最小。这是一个可通过动态规划求解的典型最优化问题。

该子问题可形式化如下:寻找一个索引序列 $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_M = V$,使得由这些索引对应的候选点构成的简化剖面总SSE值最小。该总SSE可分解为各相邻特征点线段产生的误差之和:

$$\min E_{\text{SSE}} = \sum_{k=1}^{M-1} C(j_k, j_{k+1}) \quad (8)$$

式中: $C(i, j)$ 表示连接候选点 p_i 和 p_j 的直线段与该深度区间内所有原始剖面点之间的平方误差和:

$$C(i, j) = \sum_{p_l \in P_0, z_l \in [z'_i, z'_j]} (v_l - L_{ij}(z_l))^2 \quad (9)$$

式中: l 为原始剖面点集 P_0 在深度区间 $[z'_i, z'_j]$ 内的点索引; $L_{ij}(z_l)$ 表示连接候选点 p_i 和 p_j 的直线段在深度 z_l 处经过线性插值得到的声速估计值。

为求解该问题,定义动态规划状态 $D(k, j)$ 为:从候选点集的前 j 个点 $\{p_1, \dots, p_j\}$ 中选取 k 个点,且强制以 p_j 作为第 k 个(最后一个)特征点时,所能达到的最小累积SSE。状态转移方程如下:

$$D(k, j) = \min_{k-1 \leq i < j} \{D(k-1, i) + C(i, j)\} \quad (10)$$

在第2阶段的自适应二分搜索中,对于每一个待测试的特征点数 M_{mid} ,算法都会调用动态规划求解器,计算出使用 M_{mid} 个点所能达到的全局最小SSE,并与最终目标 E_{SSE0} 进行比较,以指导二分搜索调整范围,直至找到满足约束的最小点数 M ,其找到的解是在该候选集约束下的理论最优解。

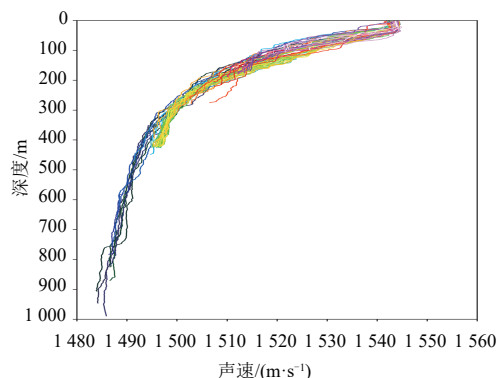
为提升计算效率,使用前缀和(Prefix Sum Calculation)方法,预先计算式(9)中原始剖面中深度 z 、声速 v 及其高次项(z^2 、 v^2 、 zv)的累加和序列。在计算任意两点间的 $C(i, j)$ 时,只需利用序列中索引为 i 和 j 的预计算值进行简单的代数运算,即可在 $O(1)$ 常数时间内完成查询,无需遍历区间内的所有原始点,从而加速动态规划表的填充过程。

综上所述,本文算法通过结合VW预处理、动态规划全局优化和二分搜索自适应调整,高效、精确地解决了声速剖面简化问题。

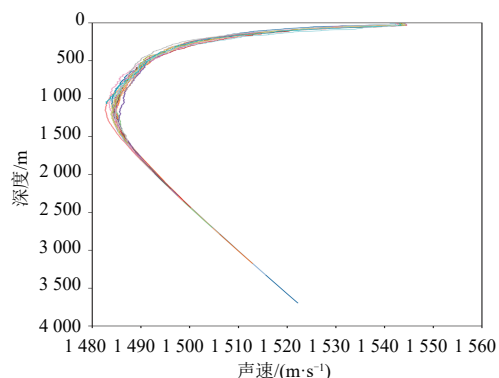
2 实验数据分析

为验证算法性能,本文实验选取了2023年9

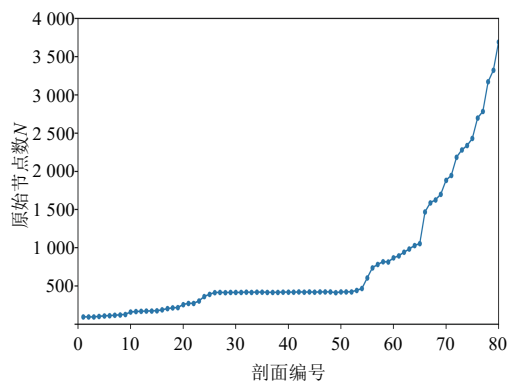
月至12月期间,在我国南海海域采集的80条代表性实测声速剖面作为数据。如图1所示,数据覆盖浅海和深海多种水文环境,剖面最大深度从数十米到近4 000 m不等。所有原始剖面数据均经过1 m深度间隔的箱式平均处理,以确保数据质量,图中不同颜色代表不同剖面。



(a) 最大深度小于1 000 m的浅水剖面



(b) 最大深度大于1 000 m的深水剖面



(c) 80个剖面按深度排序的原始节点数

图1 实验采用的80个声速剖面概览

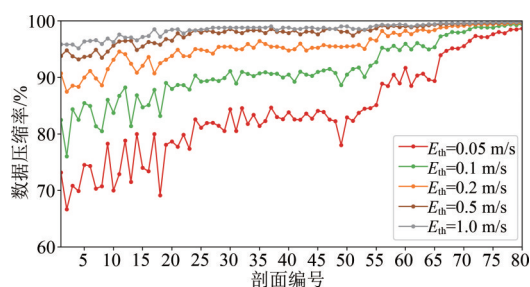
2.1 简化性能分析

首先,评估算法在不同精度要求下的数据压缩能力。设定一系列目标RMSE阈值 E_{th} (0.05,0.1,0.2,0.5,1.0 m/s)。实验中允许最终RMSE有5%的容忍度,以平衡精度与收敛效率。数据压缩率 R_c 定义为

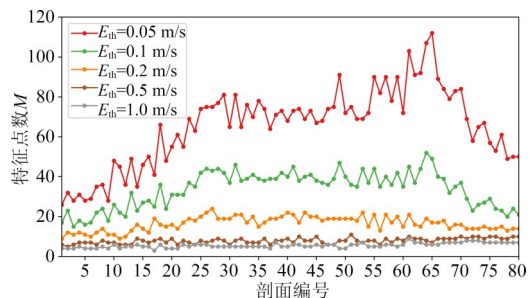
$$R_c = \left(1 - \frac{M}{N}\right) \times 100\% \quad (11)$$

式中: N 是原始点数; M 是简化后的特征点数。

如图2所示,算法的压缩性能表现出明显的自适应特性, R_c 与RMSE阈值 E_{th} 显著正相关。在 E_{th} 为1.0 m/s的宽松条件下,所有剖面压缩率均能达到95%以上;而在 $E_{th}=0.1$ m/s的常用精度水平下,多数剖面压缩率超过80%;即使在 $E_{th}=0.05$ m/s的严格约束下,压缩率仍在66%至99%之间。总体而言,本文算法能根据用户设定的精度要求和剖面自身的结构复杂性,自动确定最优压缩程度,在保证精度的前提下最大化数据压缩率。



(a) 不同RMSE阈值下算法的数据压缩率



(b) 不同RMSE阈值下算法简化后的特征点数

图2 本文算法的数据压缩性能

2.2 同等压缩率下精度对比

为验证本文算法在特征点选择上的优越性,选取常用的几何简化算法DP和独立使用的VW算法作为对比方法,在相同压缩率下比较3种方法的简化精度。

对于每个剖面 and 每个RMSE阈值,首先运行本文算法得到满足该阈值的最小特征点数 M (即2.1节所示实验结果);然后,将DP算法与VW算法的输出点数也设定为 M ,比较3种方法生成的简化剖面与原始剖面之间的RMSE和声线传播时间相对误差(Relative Travel Time Error, RTTE)。

RTTE的计算方式为:模拟100条覆盖 $10^\circ \sim 60^\circ$ 出射角度的声线,计算其从海面传播至海底的时间,并按式(12)评估所有声线相对误差的平均值:

$$E_{\text{RTTE}} = \frac{1}{U} \sum_{u=1}^U \left(\frac{|T_u[c_s(z)] - T_u[c_0(z)]|}{T_u[c_0(z)]} \right) \times 100\% \quad (12)$$

式中: U 为声线总数, 此处为 100。 $T_u[c_s(z)]$ 与 $T_u[c_0(z)]$ 分别代表声线 u 基于简化剖面 and 原始剖面依据式(1)计算得到的传播时间。在声线跟踪算法中, 直接观测量是声线传播时间, RTTE 直接反映了简化引起的声传播时间偏差, 从物理层面可验证简化剖面在实际声线跟踪中的有效性。

如图3所示的RMSE对比箱线图表明, 在所有阈值设定下, 本文算法的RMSE值都严格稳定地保持在设定的阈值附近, 表现出极强的误差控制能力。相比之下, DP算法和VW算法产生的RMSE值显著高于预设阈值。例如, 在目标阈值为0.1 m/s时, 本文算法的平均RMSE为0.103 m/s, 而DP和VW的平均RMSE分别高出阈值约30%和27%。本文算法动态规划阶段的全局寻优能力能够在候选点集中找到使整体平方误差和最小的最优特征点组合, DP和VW依赖局部几何特征, 缺乏全局优化能力。

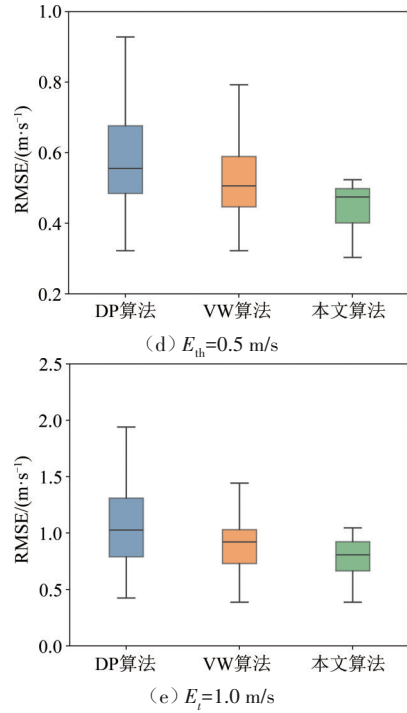
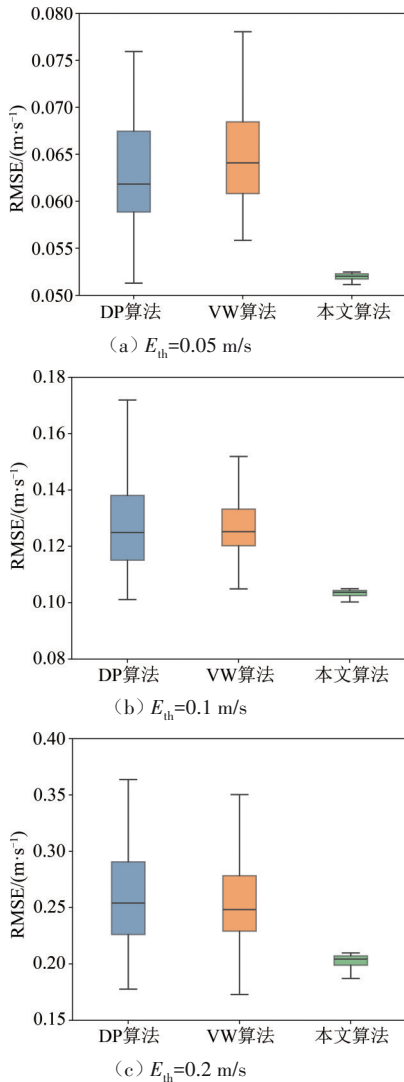
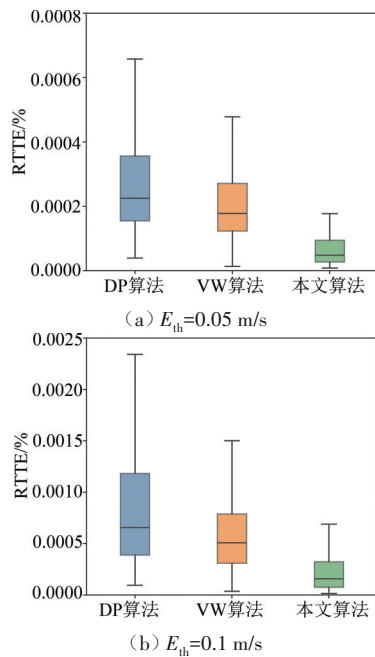


图3 3种方法在不同目标RMSE阈值、相同特征点数 M 时的实际RMSE对比

图4展示了RTTE的对比结果, 在所有测试条件下, 本文算法的RTTE均为最低, 且分布更集中。以0.1 m/s阈值为例, 本文算法的平均RTTE仅为0.000 217%, 分别为VW算法和DP算法的38.5%和21.7%。对于一次典型的3 000 m深海声线传播, 该误差对应的双程时延误差仅为8.68 μs , 换算成测距误差约为毫米级, 对于绝大多数高精度水下声学任务已足够精确。这证明本文算法通过最小化作为传播时间误差上界的RMSE, 能间接且有效地控制声线传播物理过程的误差。



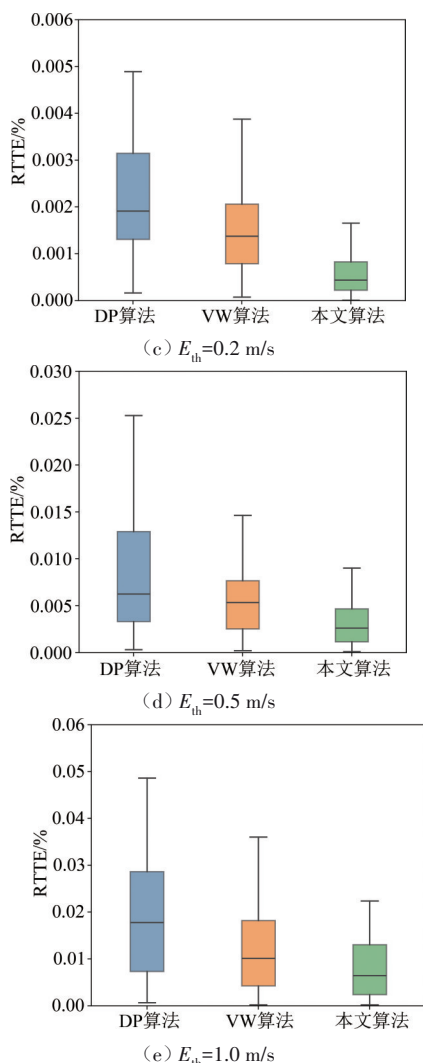


图4 3种方法在不同目标RMSE阈值下,于相同特征点数 M 时的RTTE对比

2.3 参数敏感性分析

调节系数 α 定义了VW预处理阶段的误差约束严格程度,是算法中唯一需要用户设定的参数。为探究其影响,固定RMSE阈值为0.1 m/s,分析不同 α 值(0、0.1、0.2、0.5、1.0)对最终保留点数和运行时间的影响。其中, $\alpha=0$ 表示跳过第1阶段VW预处理,直接在原始剖面上执行第2阶段的动态规划和二分搜索。实验结果如图5、图6所示

由图5和图6可知,最终保留的特征点数 M 与 α 值呈现正相关,运行时间则与 α 值呈负相关。 $\alpha=0$ 时算法直接全局搜索,能找到理论最少点数,但耗时最长。随着 α 值增大,候选点集规模减小,计算速度显著提升,但会损失少量优化空间,导致最终点数略微增加。综合简化质量与计算效率, α 提供了一个灵活的权衡机制。当 $\alpha=0.5$ 时,相较于 $\alpha=0$ 的最优情况,平均特征点数仅增加约10%,而计算时间则降低了近一个数量级。在前述性能对比

实验中,统一选取 $\alpha=0.5$,实现了简化质量与计算效率的良好平衡。

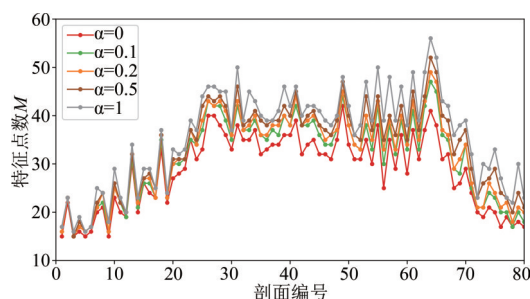


图5 不同 α 值对最终保留特征点数 M 的影响

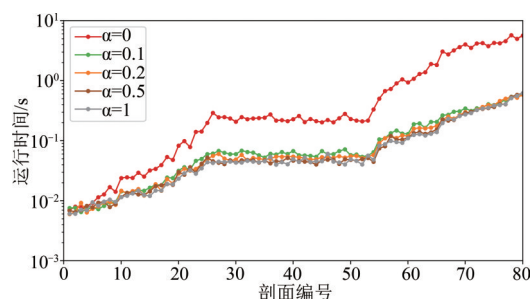


图6 不同 α 值对算法总运行时间的影响

此外,调节系数 α 定义为预处理阶段占用总误差预算的比例,是一个无量纲的相对参数,它不直接依赖于海水的绝对深度或声速场的具体数值范围。尽管实验所用的声速剖面结构差异显著,但采用统一的 α 值均能取得良好的简化效果,说明该参数具有较强的适应性。

3 总结与讨论

本文针对水下声传播计算中声速剖面简化问题,提出一种兼顾全局最优性与计算效率的两阶段自适应简化算法。该算法将剖面简化建模为约束优化问题,结合VW预处理提供的可控搜索空间和动态规划的全局寻优能力,实现了在用户设定的RMSE约束下,自动确定最少特征点数量及其最优空间分布。实验结果表明,与经典的DP和VW算法相比,本文算法在相同压缩率下实现了更低的RMSE和声线传播时间误差,调节系数 α 提供了算法在效率和精度间的灵活平衡。

本文算法仍存在一些值得探讨的改进方向。首先,动态规划时间复杂度较高,对于极高分辨率或长时序剖面仍有优化空间。其次,可探索将与声学传播更直接的物理量融入优化目标的方式方法,以实现面向特定任务的简化。最后,对于时空变化的声速场,可研究利用多条剖面间的相关性实现联合简化。

综上所述,本文算法为声速剖面简化提供一个高效精确的解决方案,能够大幅降低声线跟踪的计算负荷,并通过误差阈值有效控制物理误差,保证后续声学计算精度。本算法在水下定位导航、水下声学通信、水下目标探测、海洋环境监测以及大规模海洋调查数据后处理等对计算效率和精度有较高要求的场景中,具有广阔的应用潜力。

参考文献:

- [1] 刘经南,陈冠旭,赵建虎,等.海洋时空基准网的进展与趋势[J].武汉大学学报(信息科学版),2019,44(1):17-37.
- [2] 刘杨,曾安敏,郑翠娥,等.广播式远程精密水下导航定位技术[J].哈尔滨工程大学学报,2023,44(11):1987-1995.
- [3] 靳涛,燕保荣,梁凡,等.水声授时及相关技术的进展与展望[J].全球定位系统,2025,50(4):36-45.
- [4] 殷敬伟,李伟哲,韩笑,等.中沙海域可靠声路径声传播特性及信道分析[J].哈尔滨工程大学学报,2025,46(8):1475-1484.
- [5] 卜令冉,李广云,贾学东,等.一种海洋区域声速场空时联合预报方法[J].导航定位学报,2025,13(6):1-9.
- [6] CHADWELL C D, SWEENEY A D. Acoustic ray-trace equations for seafloor geodesy[J]. Marine Geodesy, 2010, 33(2-3):164-186.
- [7] 闫凤池,王振杰,赵爽,等.顾及双程声径的常梯度声线跟踪水下定位算法[J].测绘学报,2022,51(1):31-40.
- [8] 黄威,高凡,王君婷,等.水下声速场构建方法综述[J].哈尔滨工程大学学报,2023,44(11):2005-2017.
- [9] 薛树强,杨诚,赵爽,等.海底大地控制网无人观测系统研究进展[J].导航定位学报,2023,11(6):8-21.
- [10] SAKIC P, CHUPIN C, BALLU V, et al. Geodetic seafloor positioning using an unmanned surface vehicle: contribution of direction-of-arrival observations[J]. Frontiers in Earth Science, 2021,9:No.636156.
- [11] DOUGLAS D H, PEUCKER T K. Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature[J]. Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization, 1973,10:112-122.
- [12] 张志伟,暴景阳,金山.一种多波束测深声线跟踪自适应分层方法[J].海洋测绘,2018,38(1):23-26;42.
- [13] ZHAO D N, WU Z Y, ZHOU J Q, et al. A new method of automatic SVP optimization based on MOV algorithm[J]. Marine Geodesy, 2015,38(3):225-240.
- [14] 肖元弼,彭认灿,董箭,等.顾及面积差的层内等效二段线替代法优化声速剖面[J].测绘学报,2023,52(12):2028-2038.
- [15] LIU Y X, SUN Y F, WANG X X, et al. An adaptive stratification algorithm based on gradient fitting deviation and its application to acoustic ray-tracing algorithm[J]. Ocean Engineering, 2024,311:No.118809.
- [16] 王雅鹏,李林阳,邝英才,等.声速剖面精简的有效面积算法[J].导航定位学报,2024,12(3):137-144.
- [17] 郑根,张红梅,冯磊,等.基于面积差的声速剖面自适应简化方法[J].测绘学报,2018,47(10):1415-1423.
- [18] 冯国君,单志龙,项婉.基于最小方差的声线跟踪自适应分层算法[J].声学技术,2020,39(4):511-516.
- [19] 李保金,薛树强,孙文舟,等.简化声速剖面的声线精度损失极小准则及遗传算法[J].测绘学报,2024,53(7):1336-1344.
- [20] 王振杰,刘杨范,赵爽,等.K-Means++的声速剖面精简方法[J].哈尔滨工程大学学报,2020,41(7):985-990.
- [21] LI J, PAN Y, LI R, et al. A sound velocity profile stratification method based on maximum density and maximum distance clustering[J]. Applied Sciences, 2024,14(1):182.
- [22] 马茜,段毅,徐冬.基于梯度差的声速剖面自适应分层算法[J].计算机与现代化,2022(8):30-35.

(编辑:邵 华)