doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024063

单边退化抛物方程反问题的收敛性分析

陈嘉琪, 杨 柳
(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

摘要: 考虑利用已知终端观测数据进行单边退化抛物型方程辐射系数反演的收敛性分析问题. 首先, 对单边退化抛物型方程, 需满足 Fichera 条件以确保问题的可解性; 其次, 将原反问题转化为一个最优控制问题, 通过最优控制方法找到辐射系数的最优解; 最后, 结合 Gâteaux 导数并引入新的源条件, 证明最优解的收敛性.

关键词: 反问题; 单边退化抛物方程; Fichera 条件; Gâteaux 导数; 收敛性
中图分类号: O175.9 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)06-1308-09

Convergence Analysis of Inverse Problems for One-Sided Degenerate Parabolic Equations

CHEN Jiaqi, YANG Liu
(*School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: We considered the convergence analysis problem of the inversion of the radiation coefficient of a one-sided degenerate parabolic equation by using known terminal observation data. Firstly, it was necessary to satisfy the Fichera condition for the one-sided degenerate parabolic equation to ensure the solvability of the problem. Secondly, we transformed the original inverse problem into an optimal control problem and found the optimal solution for the radiation coefficient through optimal control methods. Finally, by combining the Gâteaux derivative and introducing new source conditions, we proved the convergence of the optimal solution.

Keywords: inverse problem; one-sided degenerate parabolic equation; Fichera condition; Gâteaux derivative; convergence

0 引 言

偏微分方程在物理学、力学、经济学、医学、工业和高新技术等领域应用广泛. 偏微分方程的正问题是在某些已知条件(如初始条件、边界条件)下确定方程的解, 而偏微分方程的反问题是将正问题中某些原有的条件变成未知条件, 需要通过方程、定解条件和某些附加条件确定这些未知量[1]. 偏微分方程的正问题与反问题是互逆的, 但反问题在 Hadamard 意义[2]下大部分是不适定的.

目前对经典抛物方程的研究已形成了成熟的理论体系, 但对退化抛物型方程的反问题研究报道较少. 随着金融数学的发展, 对退化偏微分方程研究的需求也逐渐增加. 经典的 Black-Scholes 方程为

收稿日期: 2024-02-07. **网络首发日期:** 2024-08-30.

第一作者简介: 陈嘉琪(1998—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事数学物理反问题的研究, E-mail: 15809646802@163.com. **通信作者简介:** 杨 柳(1977—), 女, 汉族, 博士, 教授, 从事数学物理反问题的研究, E-mail: l_yang218@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 61663018; 11961042)和甘肃省自然科学基金(批准号: 22JR5RA341).
网络首发地址: https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20240829.0929.002.

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial s}-rV=0,\qquad (S,t)\in\mathbb{R}^+\times[0,T]. \tag{1}$$

针对期权定价问题[3-6]，当 $S=0$ 时，Black-Scholes 方程退化为一阶方程. 文献[7]利用 Tikhonov 正则化方法讨论了 Black-Scholes 方程重构隐含波动率的反问题，并证明了正则化解的收敛性. 文献[8]研究了二阶退化抛物型方程：

$$\begin{cases} u_t-(a(x)u_x)_x+b(x)u=f(x), & (x,t)\in Q=(0,1)\times(0,2T],\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in(0,1)\end{cases} \tag{2}$$

辐射系数反演的问题，且主项系数在区域的左右边界都退化，在最优控制理论框架下将原问题转化为一个优化问题，通过引入适当的正则化项，讨论了其最优解的收敛性. 文献[9]研究了一类退化抛物方程：

$$\begin{cases} u_t-(a(x)u_x)_x+q(x)u=0, & (x,t)\in Q=(0,l)\times(0,T],\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & x\in(0,l)\end{cases} \tag{3}$$

辐射系数的反演问题，且 $a(x)>0$，$a(0)=a(l)=0$，$x\in(0,l)$，通过将原问题转化为最优控制问题，讨论了其最优解的收敛性. 问题(3)属于双边退化情形，根据 Fichera 条件计算得到方程(3)在左右边界不需要给边界条件，而目前对双边退化抛物方程的实际应用也较广泛，如描述地震波传播、电磁波传播、声波传播等. 文献[10]研究了非散度型二阶抛物型方程的混合问题：

$$\begin{cases} u_t-a(x)u_{xx}+b(x)u_x+c(x)u=f(x,t), & (x,t)\in Q=(0,1)\times(0,T],\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in(0,l),\\ u(0,t)=0,\end{cases} \tag{4}$$

当 $a(x)>0$，$a(0)=a(l)=0$，$x\in(0,l)$时，通过引入赋权的 Sobolev 空间和一些新的源条件，并对主项系数的允许函数类附加了较强的正则性条件，证明了其最优解的收敛性. 文献[11]研究了一类具有变指数的退化抛物方程：

$$\begin{cases} u_t=\operatorname{div}(\rho^\alpha|\nabla a(u)|^{p(x)-2}\nabla a(u))+g(x)\operatorname{div}(b(u)), & (x,t)\in Q_T,\\ u|_{t=0}=u_0(x), & x\in\Omega,\end{cases} \tag{5}$$

在局部边界 $u(x,t)=0$，$x,t\in\Sigma_p\times(0,T)$下，得到了方程(5)在无边界条件下弱解的唯一性，其中 $\Sigma_p\subset\partial\Omega$ 或 $\Sigma_p\neq\varnothing$. 文献[12]讨论了一类含对流项的弱退化线性抛物问题：

$$\begin{cases} u_t-(x^\alpha u_x)_x-(b(x,t)u)_x+c(x,t)u=h(x,t)\chi_\omega, & (x,t)\in(0,1),\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\in(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in(0,1)\end{cases} \tag{6}$$

的零可控性，通过建立相应问题的 Carleman 估计，证明了正则化问题的能观不等式以及含散度形式对流项的线性退化抛物系统的可控性，并讨论了具超线性源退化较弱的抛物方程与更一般的具超线性源的退化抛物方程的零可控性. 文献[13]利用有限元法求解如下二阶非线性抛物方程：

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}+u^3-u=0, & (x,t)\in(0,1)\times(0,T),\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\in(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in(0,1),\end{cases}$$

证明了其差分格式解的稳定性和收敛性，并用数值算例验证了理论分析结果和算法的有效性. 文献[14]研究如下一类对流扩散方程：

$$\begin{cases} u_t-\Delta u+\nabla\cdot(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})u)=f(\boldsymbol{x})R(\boldsymbol{x},t), & (\boldsymbol{x},t)\in\Omega\times(0,T],\\ u(\boldsymbol{x},t)=0, & (\boldsymbol{x},t)\in\partial\Omega\times(0,T],\\ u(\boldsymbol{x},0)=u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\Omega,\end{cases}$$

基于有限元法，同时重构了对流速度和源函数，并验证了其解有严格的收敛性，其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$.

关于退化抛物方程的反问题，目前研究较多的是双边退化的情形，且标的方程是散度型的，而关于单边退化的情形相关研究报道较少. 形式上看双边退化的情形较复杂，但在实际应用中，利用分部积分和定义适当的权函数空间，可以较轻松地处理. 而单边退化则不然，特别是对非散度型的方程，

一则分部积分较复杂(多出一些边界积分项),二则边界上的信息依赖于 Fichera 函数的符号,从而影响整个方程的先验估计,这是单边退化抛物方程的一个最大特点.

本文主要讨论一类单边退化抛物型方程反问题的收敛性,即利用 Fichera 条件判断方程在边界处是否需要配置边界条件,主项系数在区域的左边界退化,在边界 $x=0$ 处不给出边界条件,可能会使原来收敛的结果变为发散. 所以本文将在适当的附加条件及 Fichera 条件下,结合 Gâteaux 导数并引入新的源条件,研究与原问题对应的最优控制问题解的收敛性. 本文考虑的问题(定义为 P 问题)表述为

$$\begin{cases} u_t - r(x)u_{xx} + s(x)u_x + p(x)u = f(x,t), & (x,t) \in Q = (0,l) \times (0,T], \\ u\big|_{x=l} = 0, & \\ u\big|_{t=0} = h(x), & x \in (0,l), \end{cases} \tag{7}$$

其中 $f(x,t)$,$r(x)$,$s(x)$,$h(x)$分别是 Q 和$(0,l)$上已知的光滑函数,$r(x)$满足

$$r(x) > 0, \quad r(0) = 0, \quad r(l) > 0, \quad x \in (0,l),$$

且 $s(x)>0$,$s(x)$在 $x=0$ 处满足 Fichera 条件

$$\left[s(x) + \frac{\mathrm{d}r(x)}{\mathrm{d}x} \right] \Big|_{x=0} \leqslant 0.$$

方程(7)中的辐射系数 $p(x)$未知.

假设给出终端观测值作为附加条件,即

$$u\big|_{t=T} = \zeta(x), \qquad x \in (0,l], \tag{8}$$

其中 $T>0$,$\zeta(x)$是可通过测量或实验得到的已知函数. 下面讨论利用方程(7)和条件(8)求出辐射系数 $p(x)$.

退化偏微分方程与经典偏微分方程的主要区别是退化偏微分方程可能缺少边界条件. 根据 Fichera 理论[15-16],对退化方程在边界上是否需要给出边界条件,取决于相应 Fichera 函数的符号.

对于一般的二阶线性偏微分方程:

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x})u = f(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\Omega\subset\mathbb{R}^m$,并且设 $a_{ij}=a_{ji}$,$i,j=1,2,\cdots,m$.

设 Ω 的边界$\partial\Omega$ 上的单位内法向量为 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,\cdots,n_m)$,定义 Fichera 函数为

$$B(x) = \sum_{i=1}^{m} \left[b_i(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j} \right] n_i.$$

在方程(7)中,将 u_{xx} 的系数化为正数,有

$$-u_t + r(x)u_{xx} - s(x)u_x - p(x)u = -f(x,t), \qquad (x,t) \in (0,l) \times (0,T].$$

记 $x_1=x$,$x_2=t$,有

$$a_{11} = r(x), \quad a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0, \quad b_1 = -s(x), \quad b_2 = -1.$$

在边界 $x=0$ 上,单位内法向量是$(1,0)$,有 $\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}n_in_j = a_{11}\big|_{x=0} = r(x)\big|_{x=0} = 0$. Fichera 函数为

$$B(x,t) = \left[b_1 - \frac{\partial a(x)}{\partial x} \right] \Big|_{x=0} = -s(x) - r'(x)\big|_{x=0} \geqslant 0.$$

由 Fichera 定理,在左边界 $x=0$ 处不必给出边界条件. 因此,问题 P 是合理的.

1 问题描述

由于反问题 P 的不适定性,本文考虑下列最优控制问题 P1:寻找 $\overline{p}(x)\in A$,使得

$$J(\overline{p}) = \min_{p \in A} J(p),$$

$$J(p) = \frac{1}{2}\int_0^l |u(x,T;p) - \zeta(x)|^2 \mathrm{d}x + \frac{N}{2}\int_0^l |\nabla p|^2 \mathrm{d}x, \tag{9}$$

$$A = \{p(x) \mid 0 < \alpha \leqslant p \leqslant \beta, \ \|p\|_{H^1(0,l)} < \infty\}, \tag{10}$$

其中 $u(x,t;p)$是方程(7)对应于给定辐射系数 $p(x)\in A$ 的解,N 是正则化参数,α,β 是给定正常数.

本文对 x 只考虑一维情况，高维情况同样适用. 为区分函数的下标与函数的导数，利用高维梯度算子 ∇ 表示对应函数对 x 的一阶导数. 对附加条件(8)，假设终端观测值 $\zeta(x)$ 满足 $\zeta(x)\in L^{\infty}[0,l]$. 如无特殊说明，本文 C 表示与 T 无关的不同常数.

定义 1　定义函数空间 $H_r^1(0,l)$ 是集合 $C^{\infty}(0,l)$ 在范数

$$\|u\|^2_{H_r^1(0,l)}=\int_0^l r(x)(|u|^2+|\nabla u|^2)\mathrm{d}x,\qquad u\in H_r^1(0,l)$$

下的闭包.

定义 2　如果 $u(x,t)\in C([0,T];L^2(0,l))\cap L^2((0,T);H_r^1(0,l))$，对任意给定的函数 $\psi\in L^2(0,l)\cap H_r^1(0,l)$，满足

$$u(x,0)=h(x),\qquad x\in(0,l),$$

且有如下积分等式成立：

$$\int_0^l u_t\psi\mathrm{d}x+\int_0^l(s+r')\cdot\nabla u\cdot\psi\mathrm{d}x+\int_0^l r\cdot\nabla u\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x+\int_0^l pu\psi\mathrm{d}x=\int_0^l f\psi\mathrm{d}x,\tag{11}$$

则称 $u(x,t)$ 是方程(7)的弱解.

定理 1　泛函 $J(p)$ 存在极小元 $\overline{p}\in A$，即 $J(\overline{p})=\min\limits_{p\in A}J(p)$.

参考文献[9]可证明定理 1.

2　局部收敛性分析

下面考虑最优解的收敛性，对 T 取相对较小的值进行局部收敛性分析. 假设真解 $\zeta(x)$ 是可达的，则存在 $p^*(x)\in H^1(0,l)$，使得 $u(x,T;p^*)=\zeta(x)$. 一般情况下，观测数据会存在误差，记误差水平为 δ，则 $\|\zeta-\zeta^{\delta}\|_{L^2(0,l)}\leqslant\delta$.

用 $[T-\lambda,T]$ 上的一个积分泛函代替原来的泛函，引入如下辅助控制问题：

$$J_\lambda(p)=\frac{1}{2\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l|u(x,t;p)-\zeta(x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{N}{2}\int_0^l|\nabla p|^2\mathrm{d}x.\tag{12}$$

当 $\lambda\to0^+$ 时，有

$$J_\lambda(p)=\frac{1}{2\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l|u(x,t;p)-\zeta(x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to\frac{1}{2}\int_0^l|u(x,T;p)-\zeta(x)|^2\mathrm{d}x.$$

从而有 $J_\lambda(p)\to J(p)$.

假设存在真解 $p^*(x)$，使得

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l|u(x,t;p^*)-\zeta^{\delta}(x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\delta^2.$$

定义正向算子：

$$u(p):A\to H^1((0,T);L^2(0,l))\cap L^2((0,T);H_r^1(0,l)),$$
$$u(p)(x,t)=u(x,t;p(x)),$$

其中 $u(x,t;p(x))$ 是式(11)对应 $p\in A$ 的解. 对任意 $p\in A$ 和 $q\in H^1(0,l)$，计算得到 Gâeaux 导数 $u'(p)q$ 满足齐次初始条件，并对任意 $\varphi\in L^2(0,l)\cap H_r^1(0,l)$，下列不等式成立：

$$\int_0^l(u'(p)q)_t\varphi\mathrm{d}x+\int_0^l r\nabla(u'(p)q)\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_0^l s\nabla(u'(p)q)\cdot\varphi\mathrm{d}x+$$
$$\int_0^l r'\nabla(u'(p)q)\cdot\varphi\mathrm{d}x+\int_0^l p(u'(p)q)\varphi\mathrm{d}x=-\int_0^l u(p)q\varphi\mathrm{d}x.\tag{13}$$

引理 1　对任意 $p\in A$ 和 $q\in H^1(0,l)$，使得 $p+q\in A$，有

$$\int_0^l(R(p))_t\varphi\mathrm{d}x+\int_0^l r\nabla R(p)\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_0^l s\varphi\nabla(R(p))\mathrm{d}x+\int_0^l r'\varphi\nabla R(p)\mathrm{d}x+\int_0^l p(R(p))\varphi\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^l q(u(p)-u(p+q))\varphi\mathrm{d}x,\tag{14}$$

其中余项

$$R(p)=u(p+q)-u(p)-u'(p)q,\qquad \varphi\in L^2(0,l)\cap H_r^1(0,l).$$

证明：$u(p+q)$满足

$$\int_0^l(u(p+q))_t\varphi\mathrm{d}x+\int_0^l r\nabla u(p+q)\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_0^l s\varphi\nabla u(p+q)\mathrm{d}x+$$
$$\int_0^l r'\varphi\nabla u(p+q)\mathrm{d}x+\int_0^l(p+q)u(p+q)\varphi\mathrm{d}x=\int_0^l f\varphi\mathrm{d}x. \tag{15}$$

式(15)减去式(11)，有

$$\int_0^l(u(p+q)-u(p))_t\varphi\mathrm{d}x+\int_0^l r\nabla(u(p+q)-u(p))\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x+$$
$$\int_0^l s\varphi\nabla(u(p+q)-u(p))\mathrm{d}x+\int_0^l r'\varphi\nabla(u(p+q)-u(p))\mathrm{d}x+$$
$$\int_0^l p(u(p+q)-u(p))\varphi\mathrm{d}x=-\int_0^l qu(p+q)\varphi\mathrm{d}x. \tag{16}$$

式(16)减去式(13)，整理得式(14). 证毕.

为证明最优解的收敛性，对正问题附加源条件，引入如下线性算子：

$$F(p):L^2((0,T);L^2(0,l))\to L^2(0,l),$$
$$F(p)\Phi=-\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T u(p)\Phi\mathrm{d}x,\qquad \forall\,\Phi\in L^2((0,T);L^2(0,l)), \tag{17}$$

其中$u(p)$是方程(11)的解. 利用式(13)，对任意$q\in H^1(0,l)$和$\varphi\in L^2(0,l)\cap H_r^1(0,l)$，下面等式成立：

$$\langle F(p)\varphi,q\rangle=-\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l qu(p)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$
$$\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l[(u'(p)q)_t\varphi+r\cdot\nabla(u'(p)q)\cdot\nabla\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l[s\cdot\nabla(u'(p)q)\cdot\varphi+r'\cdot\nabla(u'(p)q)\cdot\varphi+p(u'(p)q)\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{18}$$

这里$\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(0,l)}$表示$L^2(0,l)$空间中的内积，$\nabla$是线性算子，定义其共轭算子$\nabla^*$如下：

$$\langle\nabla^* z,\varphi\rangle_{L^2(0,l)}=\langle z,\nabla\varphi\rangle_{L^2(0,l)},\quad \forall\,z\in H^1(0,l),\quad \varphi\in H^1(0,l).$$

如果$\varphi\in H_0^1(0,l)$，则∇^*等同于∇.

定理2 假设存在一个函数

$$\varphi\in H_0^1((T-\lambda,T);L^2(0,l))\cap L^2((T-\lambda,T);H_r^1(0,l)), \tag{19}$$

使得在弱解的意义下成立如下源条件：

$$F(p^*)\varphi=\nabla^*\nabla p^*,\qquad \varphi|_{x=0}=u(p^*)-u(p_N^\delta)|_{x=0}, \tag{20}$$

这里$F(p^*)$由式(17)定义，可表述为：对任意$q\in H^1(0,l)$，有

$$\langle F(p^*)\varphi,q\rangle=\langle\nabla^*\nabla p^*,q\rangle=\langle\nabla p^*,\nabla q\rangle.$$

此外，假设存在一点$x_0\in[0,l]$，使得$p_N^\delta(x_0)=p^*(x_0)$，则当$T\ll1$，$N\sim\delta$时，有下列估计：

$$\int_0^l|p_N^\delta-p^*|^2\mathrm{d}x\leqslant C\delta, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l|u(p_N^\delta)-u(p^*)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\delta^2, \tag{22}$$

这里p_N^δ是式(9)中ζ替代ζ^δ的极小元，$u(p_N^\delta)$是变分问题(11)当$p=p_N^\delta$时的解，C是一个正常数，不依赖于δ,N和T.

证明：由于p_N^δ是式(9)的极小元，故有$J_\lambda(p_N^\delta)\leqslant J_\lambda(p^*)$. 即

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{N}{2}\int_0^l|\nabla p_N^\delta|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\delta^2+\frac{N}{2}\int_0^l|\nabla p^*|^2\mathrm{d}x. \tag{23}$$

由式(23)，有

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{N}{2}\int_0^l|\nabla p_N^\delta-\nabla p^*|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\delta^2+\frac{N}{2}\int_0^l|\nabla p^*|^2\mathrm{d}x-\frac{N}{2}\int_0^l|\nabla p_N^\delta|^2\mathrm{d}x+\frac{N}{2}\int_0^l|\nabla p_N^\delta-\nabla p^*|^2\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{2}\delta^2+N\int_0^l\nabla p^*\cdot\nabla(p^*-p_N^\delta)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\delta^2+N\langle\nabla p^*,\nabla(p^*-p_N^\delta)\rangle. \tag{24}$$

利用式(18),(20)，对式(24)的最后一项，有

$$\langle\nabla p^*,\nabla(p^*-p_N^\delta)\rangle=\langle F(p^*)\varphi,p^*-p_N^\delta\rangle=$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l(p^*-p_N^\delta)u(p^*)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l[(u'(p^*)(p^*-p_N^\delta))_t\varphi+r\cdot\nabla(u'(p^*)(p^*-p_N^\delta))\cdot\nabla\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$

$$\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l[s\cdot\nabla(u'(p^*)(p^*-p_N^\delta))\cdot\varphi+r'\cdot\nabla(u'(p^*)(p^*-p_N^\delta))\cdot\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$

$$\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l[p^*(u'(p^*)(p^*-p_N^\delta))\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

令

$$R_N^\delta:=u(p_N^\delta)-u(p^*)-u'(p^*)(p_N^\delta-p^*),$$

则有

$$N\langle\nabla p^*,\nabla(p^*-p_N^\delta)\rangle=\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l[(R_N^\delta)_t\varphi+r\nabla(R_N^\delta)\cdot\nabla\varphi+(s+r')\nabla(R_N^\delta)\cdot\varphi+p^*(R_N^\delta)\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$

$$\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l[(u(p_N^\delta)-u(p^*))_t\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$

$$\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l[r\nabla(u(p_N^\delta)-u(p^*))\cdot\nabla\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$

$$\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l[s\nabla(u(p_N^\delta)-u(p^*))\cdot\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$

$$\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l[r'\nabla(u(p_N^\delta)-u(p^*))\cdot\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$

$$\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l[p^*(u(p_N^\delta)-u(p^*))\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=:$$

$$I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6. \tag{25}$$

下面分别估计 $I_1\sim I_6$，主要利用不等式(23)的左边分别控制 $I_1\sim I_6$.

对于 I_1，利用式(14)可得

$$I_1=\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l(p_N^\delta-p^*)[u(p^*)-u(p_N^\delta)]\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{26}$$

由式(26)及 Schwarz 不等式，有

$$|I_1|\leqslant\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l|(p_N^\delta-p^*)\varphi|\cdot|u(p^*)-\zeta^\delta|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$

$$\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l|(p_N^\delta-p^*)\varphi|\cdot|\zeta^\delta-u(p_N^\delta)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\|(p_N^\delta-p^*)\varphi\|_{L^2(0,l)}\cdot\|u(p^*)-\zeta^\delta\|_{L^2(0,l)}\mathrm{d}t+$$

$$\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^T\|(p_N^\delta-p^*)\varphi\|_{L^2(0,l)}\cdot\|\zeta^\delta-u(p_N^\delta)\|_{L^2(0,l)}\mathrm{d}t. \tag{27}$$

由条件(10)及 Young 不等式，有

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{12\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l|u(p^*)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+CN^2\int_{T-\delta}^T\int_0^l|(p_N^\delta-p^*)\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$

$$\frac{1}{24\lambda}\int_{T-\lambda}^T\int_0^l|\zeta^\delta-u(p_N^\delta)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+CN^2\int_{T-\delta}^T\int_0^l|(p_N^\delta-p^*)\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{1}{12}\delta^2+\frac{1}{24\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+CN^2\int_{T-\delta}^{T}\int_0^l|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{28}$$

对于 I_2，关于 t 分部积分，且由 $u(x,T;p^*)=\zeta(x)$ 和 $\|\zeta-\zeta^\delta\|_{L^2(0,l)}\leqslant\delta$ 及三角不等式，有

$$\begin{aligned}|I_2|=&\frac{N}{\lambda}\left|\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l[u(p_N^\delta)-u(p^*)]_t\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l|(u(p_N^\delta)-u(p^*))\varphi_t|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\\&\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l|(u(p_N^\delta)-\zeta^\delta)\varphi_t|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l|(\zeta^\delta-u(p^*))\varphi_t|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\\&\frac{1}{12\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l|u(p^*)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+CN^2\int_{T-\delta}^{T}\int_0^l|(p_N^\delta-p^*)\varphi_t|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\\&\frac{1}{24\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l|\zeta^\delta-u(p_N^\delta)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+CN^2\int_{T-\delta}^{T}\int_0^l|(p_N^\delta-p^*)\varphi_t|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\\&\frac{1}{12}\delta^2+\frac{1}{24\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+CN^2\int_{T-\delta}^{T}\int_0^l|\varphi_t|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{29}$$

对于 I_3，分部积分，且 $r(0)=0$，$u|_{x=l}=0$，利用 Schwarz 不等式，则有

$$\begin{aligned}|I_3|=&\frac{N}{\lambda}\left|\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l[r\nabla(u(p_N^\delta)-u(p^*))\cdot\nabla\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant\\&\frac{N}{\lambda}\left|\int_{T-\lambda}^{T}\left\{r(u(p_N^\delta)-u(p^*))\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}^{x=l}-\int_0^l(u(p_N^\delta)-u(p^*))(r\varphi_x)_x\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t\right|\leqslant\\&\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|\cdot|\nabla(r\nabla\varphi)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\\&\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l|\zeta^\delta-u(p^*)|\cdot|\nabla(r\nabla\varphi)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\\&\frac{1}{12}\delta^2+\frac{1}{24\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+CN^2\int_{T-\delta}^{T}\int_0^l|\nabla(r\nabla\varphi)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{30}$$

对于 I_4 和 I_5，分部积分，且由源条件(20)，则有

$$\begin{aligned}I_4=&\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l[s\nabla(u(p_N^\delta)-u(p^*))\cdot\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\\&\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\left\{s\varphi(u(p_N^\delta)-u(p^*))|_{x=0}^{x=l}-\int_0^l(u(p_N^\delta)-u(p^*))\cdot\nabla(s\varphi)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t\leqslant\\&\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}s(u(p_N^\delta)-u(p^*))^2|_{x=0}\mathrm{d}t-\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l(u(p_N^\delta)-\zeta^\delta)\cdot\nabla(s\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\\&\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l(\zeta^\delta-u(p^*))\cdot\nabla(s\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}I_5=&\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l[r'\nabla(u(p_N^\delta)-u(p^*))\cdot\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\\&\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\left\{r'\varphi(u(p_N^\delta)-u(p^*))|_{x=0}^{x=l}-\int_0^l(u(p_N^\delta)-u(p^*))(r'\varphi)_x\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t\leqslant\\&\frac{N}{\lambda}\left[\int_{T-\lambda}^{T}r'(u(p_N^\delta)-u(p^*))^2|_{x=0}\mathrm{d}t-\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l(u(p_N^\delta)-\zeta^\delta)\cdot\nabla(r'\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]-\\&\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l(\zeta^\delta-u(p^*))\cdot\nabla(r'\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{32}$$

由 Fichera 条件，$(s+r')|_{x=0}\leqslant0$，由式(31)和式(32)，有

$$\begin{aligned}I_4+I_5\leqslant&\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}(s+r')(u(p_N^\delta)-u(p^*))^2|_{x=0}\mathrm{d}t-\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l(u(p_N^\delta)-\zeta^\delta)\cdot\nabla(s\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\\&\frac{N}{\lambda}\left[\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l(\zeta^\delta-u(p^*))\cdot\nabla(s\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l(u(p_N^\delta)-\zeta^\delta)\cdot\nabla(r'\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]-\\&\frac{N}{\lambda}\left[\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l(\zeta^\delta-u(p^*))\cdot\nabla(r'\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]\leqslant\\&-\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l(u(p_N^\delta)-\zeta^\delta)\cdot\nabla(s\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_0^l(\zeta^\delta-u(p^*))\cdot\nabla(s\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\end{aligned}$$

$$\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}(u(p_N^\delta)-\zeta^\delta)\cdot\nabla(r'\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}(\zeta^\delta-u(p^*))\cdot\nabla(r'\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$|I_4+I_5|\leqslant\frac{N}{\lambda}\left|\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}(u(p_N^\delta)-\zeta^\delta)\cdot\nabla(s\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|+\frac{N}{\lambda}\left|\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}(\zeta^\delta-u(p^*))\cdot\nabla(s\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|+$$

$$\frac{N}{\lambda}\left|\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}(u(p_N^\delta)-\zeta^\delta)\cdot\nabla(r'\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|+\frac{N}{\lambda}\left|\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}(\zeta^\delta-u(p^*))\cdot\nabla(r'\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{6}\delta^2+\frac{1}{12\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$

$$CN^2\int_{T-\delta}^{T}\int_{0}^{l}(|\nabla(s\varphi)|^2+|\nabla(r'\varphi)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\tag{33}$$

类似地，对 I_6 分部积分有

$$|I_6|=\frac{N}{\lambda}\left|\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}[p^*(u(p_N^\delta)-u(p^*))\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|\cdot|p^*\varphi|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$

$$\frac{N}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}|\zeta^\delta-u(p^*)|\cdot|p^*\varphi|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{1}{12}\delta^2+\frac{1}{24\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+CN^2\int_{T-\delta}^{T}\int_{0}^{l}|p^*\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\tag{34}$$

结合式(24)，(25)及式(27)～(34)，有

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{N}{2}\int_{0}^{l}|\nabla p_N^\delta-\nabla p^*|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\delta^2+N\langle\nabla p^*,\nabla(p^*-p_N^\delta)\rangle\leqslant\frac{1}{2}\delta^2+\sum_{j=1}^{6}|I_j|\leqslant$$

$$\delta^2+\frac{1}{4\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$

$$CN^2\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}[|\varphi_t|^2+|\nabla(r\nabla\varphi)|^2+|\nabla(s\varphi)|^2+|\nabla(r'\varphi)|^2+|p^*\varphi|^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\tag{35}$$

φ 满足条件(19)，于是

$$\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}(|\varphi_t|^2+|\nabla(r\nabla\varphi)|^2+|\nabla(s\varphi)|^2+|\nabla(r'\varphi)|^2+|p^*\varphi|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C.$$

式(35)可写为

$$\frac{1}{4\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{N}{2}\int_{0}^{l}|\nabla p_N^\delta-\nabla p^*|^2\mathrm{d}x\leqslant\delta^2+CN^2,$$

选取 $N\sim\delta$，有

$$\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{0}^{l}|u(p_N^\delta)-\zeta^\delta|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+N\int_{0}^{l}|\nabla p_N^\delta-\nabla p^*|^2\mathrm{d}x\leqslant C\delta^2.\tag{36}$$

式(22)得证，再由式(36)和 Poincaré 不等式即得式(21)．证毕．

注 1　利用积分泛函(12)代替原来的泛函(9)，是为解决在式(25)中第二项积分的困难．如果选择泛函形式(9)，则可推出式(25)中的第二项(记为 $\bar{I}_2$)为

$$\bar{I}_2=-\frac{N}{\lambda}\int_{0}^{l}(u(q_N^\delta)-u(q^*))_t(\cdot,T)\varphi\mathrm{d}x.$$

在对 $\bar{I}_2$ 进行估计时，没有任何精确解与近似解关于 t 的导数的信息，因此也不能得到任何收敛性的结果．传统方法在解决这部分问题时，都是通过改变原控制泛函的形式，或泛函中原有对时间 t 的积分．借鉴这些思想，本文对原泛函形式进行改变，通过分部积分，将关于 t 的导数交换到试探函数 φ 上，然后进行一系列推导，得到最终的收敛性结果．

综上，本文研究了一类具有单边退化抛物型方程辐射系数的反演问题．通过退化抛物型方程的特点，给定满足主系数与一阶项系数的 Fichera 附加条件，利用 Fichera 条件，结合 Gâteaux 导数并引入

新的源条件，在最优控制体系下，对与原问题对应的最优控制问题解进行了收敛性分析.

参 考 文 献

[1] 苏超伟. 偏微分方程逆问题的数值方法及其应用[M]. 西安：西北工业大学出版社，1995：25-29.（SU C W. Numerical Methods for Inverse Problems of Partial Differential Equations and Their Applications[M]. Xi'an：Northwestern Polytechnical University Press，1995：25-29.）

[2] DANIELL P J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations[J]. The Mathematical Gazette，1924，12：173-174.

[3] MERTON R C. Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous[J]. Journal of Financial Economics，1976，3(1/2)：125-144.

[4] KWOK Y K. Mathematical Models of Financial Derivatives[M]. Berlin：Springer，2008：99-125.

[5] 黄本尧. Black-Scholes期权定价模型的精确性及适用性分析[J]. 财贸研究，2002(6)：56-59.（HUANG B Y. Accuracy and Applicability Analysis of Black Scholes Option Pricing Model[J]. Finance and Trade Research，2002(6)：56-59.）

[6] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京：高等教育出版社，2008：74-89.（JIANG L S. Mathematical Models and Methods for Option Pricing[M]. Beijing：Higher Education Press，2008：74-89.）

[7] EGGER H，ENGL H W. Tikhonov Regularization Applied to the Inverse Problem of Option Pricing：Convergence Analysis and Rate[J]. Inverse Problems，2005，21(3)：1027-1045.

[8] 杨柳. 具奇异或退化性质的二阶抛物型方程的系数反演问题[D]. 兰州：兰州大学，2016.（YANG L. Inverse Coefficient Problem for Second Order Parabolic Equations with Singular or Degenerate Properties[D]. Lanzhou：Lanzhou University，2016.）

[9] DENG Z C，YANG L. An Inverse Problem of Identifying the Radiative Coefficient in a Degenerate Parabolic Equation[J]. Chinese Annals of Mathematics (Series B)，2014，35(3)：355-382.

[10] 张泰年，李照兴. 一类退化抛物型方程反问题的收敛性分析[J]. 山东大学学报(理学版)，2017，52(8)：35-42.（ZHANG T N，LI Z X. Convergence Analysis of a Class of Inverse Problems in a Degenerate Parabolic Equations[J]. Journal of Shandong University (Natural Edition)，2017，52(8)：35-42.）

[11] 詹华税，袁洪君. 具有变指数的退化抛物方程解的唯一性[J]. 吉林大学学报(理学版)，2021，59(1)：1-6.（ZHAN H S，YUAN H J. Uniqueness of Solutions to Degenerate Parabolic Equations with Variable Exponents[J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2021，59(1)：1-6.）

[12] 周亚楠. 退化抛物方程的Carleman估计及零可控性[D]. 长春：吉林大学，2022.（ZHOU Y N. Carleman Estimates and Null Controllability of Degenerate Parabolic Equations[D]. Changchun：Jilin University，2022.）

[13] 秦丹丹，王大铭，黄文竹. 二阶非线性抛物方程的B样条有限元法[J]. 吉林大学学报(理学版)，2024，62(4)：878-885.（QIN D D，WANG D M，HUANG W Z. B-Spline Finite Element Method of Second Order Nonlinear Parabolic Equation[J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2024，62(4)：878-885.）

[14] CHENG T，HU J J，JIANG D J. Simultaneous Identification of Convection Velocity and Source Strength in a Convection-Diffusion Equation[J]. Applicable Analysis，2020，99(12)：2170-2189.

[15] OLEĬNIK O A，RADKEVIČ E V. Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form[M]. New York：Plenum Press，1973：1-259.

[16] 姜礼尚，陈亚浙，刘西垣，等. 数学物理方程讲义[M]. 北京：高等教育出版社，2007：225-238.（JIANG L S，CHEN Y Z，LIU X Y，et al. Lecture Notes on Mathematical and Physical Equations[M]. Beijing：Higher Education Press，2007：225-238.）

（责任编辑：赵立芹）