doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023366

非奇异 H-矩阵的一组新判据

陶汶琪, 李 敏, 桑海风, 刘畔畔
(北华大学 数学与统计学院, 吉林 吉林 132013)

摘要: 基于广义严格 α-对角占优矩阵及其相关概念和性质, 通过对矩阵指标集进行划分并构造与之对应的正对角因子及设定新参数的方法, 给出一组实用的非奇异 H-矩阵新判据, 拓广了非奇异 H-矩阵的判定范围. 最后, 通过数值例子说明新判据的有效性.

关键词: 非奇异 H-矩阵; 广义严格 α-对角占优矩阵; 不可约 α-对角占优矩阵; 具有非零元素链的 α-对角占优矩阵

中图分类号: O151.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)04-0774-07

A New Set of Criteria for Nonsingular H-Matrices

TAO Wenqi, LI Min, SANG Haifeng, LIU Panpan
(*College of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin* 132013, *Jilin Province, China*)

Abstract: Based on the generalized strictly α-diagonally dominant matrices and its related concepts and properties, by dividing the matrix index set, forming corresponding positive diagonal factors and setting new parameters, we gave a set of practical new criteria for nonsingular H-matrices, expanding the judgment range of nonsingular H-matrices. Finally, numerical examples were used to illustrate the effectiveness of the new criterion.

Keywords: nonsingular H-matrix; generalized strictly α-diagonally dominant matrix; irreducible α-diagonally dominant matrix; α-diagonal dominant matrix with a nonzero elements chain

1 预备知识

非奇异 H-矩阵在矩阵理论、数值分析、控制理论、经济数学等领域应用广泛, 但如何判断一个矩阵是否是非奇异 H-矩阵很困难, 因此研究非奇异 H-矩阵的判定条件备受关注[1-11]. 由于 α-对角占优矩阵是一类非奇异 H-矩阵, 所以 α-对角占优矩阵理论是判定非奇异 H-矩阵的重要方法. 本文介绍一种α-对角占优矩阵, 借助其判别一个矩阵是否为非奇异 H-矩阵, 并通过数值实例说明新判据的有效性.

令 $\mathbb{C}^{n\times n}$表示 n 阶复方阵集合, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置. 记

$$N=\{1,2,\cdots,n\},\quad R_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j\in N,\ j\neq i}|a_{ij}|,\quad C_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j\in N,\ j\neq i}|a_{ji}|,\quad \forall\, i,j\in N.$$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 如果 $\forall\, i\in N$, $|a_{ii}|\geqslant(>)R_i(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为(严格)对角占优矩阵, 记为

收稿日期: 2023-09-06.

第一作者简介: 陶汶琪(2000—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事数值计算的研究, E-mail: 1021313335@qq.com. **通信作者简介:** 李 敏(1974—), 男, 汉族, 硕士, 副教授, 从事数值计算的研究, E-mail: bhulimin@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11701013)、吉林省教育厅科学技术研究项目(批准号: JJKH20170022KJ)和吉林省教育科学"十三五"规划一般项目(批准号: GH19057).

$\boldsymbol{A}\in D_0(\boldsymbol{A}\in D)$. 若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{AX}\in D$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为广义严格对角占优矩阵(也称为非奇异 H-矩阵)，记为 $\boldsymbol{A}\in D^*$. 因为非奇异 H-矩阵的主对角元素非零，故本文总假设所涉及的矩阵主对角元素的模大于零，即 $|a_{ii}|>0$，$\forall i\in N$. 若 $R_i(\boldsymbol{A})=0$(或 $C_i(\boldsymbol{A})=0$)，则对于指标 i 总有行(或列)占优的结论，故本文的矩阵假设 $R_i(\boldsymbol{A})\neq 0$，$C_i(\boldsymbol{A})\neq 0$.

定义 1[1]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若存在 $\alpha\in[0,1]$，使得对任意的 $i\in N$，都有 $|a_{ii}|>[R_i(\boldsymbol{A})]^{\alpha}\times[C_i(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为严格 α-对角占优矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in D(\alpha)$.

定义 2[1]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{AX}\in D(\alpha)$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为广义严格 α-对角占优矩阵，并记为 $\boldsymbol{A}\in D^*(\alpha)$.

定义 3[1]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是不可约矩阵，若存在 $\alpha\in[0,1]$，使得 $|a_{ii}|\geqslant[R_i(\boldsymbol{A})]^{\alpha}\times[C_i(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}$，$\forall i\in N$，且至少有一个严格不等式成立，则 $\boldsymbol{A}$ 称为不可约 α-对角占优矩阵.

定义 4[1]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若存在 $\alpha\in[0,1]$，使得 $|a_{ii}|\geqslant[R_i(\boldsymbol{A})]^{\alpha}[C_i(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}$，$\forall i\in N$，其中至少有一个严格不等式成立并且对每个使 $|a_{ii}|=[R_i(\boldsymbol{A})]^{\alpha}[C_i(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}$ 成立的 i，存在一个非零元素链 $a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k}\neq 0$，使得 $|a_{j_kj_k}|>[R_{j_k}(\boldsymbol{A})]^{\alpha}[C_{j_k}(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为具有非零元素链的 α-对角占优矩阵.

引理 1[2]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格对角占优矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格 α-对角占优矩阵.

引理 2[3]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}$ 为一个不可约 α-对角占优矩阵，或者 $\boldsymbol{A}$ 是一个具有非零元素链的 α-对角占优矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 为一个非奇异 H-矩阵.

引理 3[4]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若 $\boldsymbol{AX}$ 是一个非奇异 H-矩阵，且 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$，则 $\boldsymbol{A}$ 为一个非奇异 H-矩阵.

注 1　当 $\boldsymbol{A}$ 为严格 α-对角占优矩阵时，若 $\alpha=1$(或者 $\alpha=0$)，则有 $|a_{ii}|>R_i(\boldsymbol{A})$，$\forall i\in N$(或 $|a_{ii}|>C_i(\boldsymbol{A})$，$\forall i\in N$)即 $\boldsymbol{A}\in D$(或者 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\in D$). 当 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格 α-对角占优矩阵时，若 $\alpha=1$(或者 $\alpha=0$)，则有 $\boldsymbol{A}\in D^*$(或者 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\in D^*$). 总之，$\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵，故本文只考虑 $\alpha\in(0,1)$的情况. 为方便，记 $M_i(\boldsymbol{A})=[R_i(\boldsymbol{A})]^{\alpha}[C_i(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}$，$i\in N$.

2　主要结果

记 $N_0(\alpha)=\{i\in N\,|\,|a_{ii}|=M_i(\boldsymbol{A})\}$，$N_1(\alpha)=\{i\in N\,|\,0<|a_{ii}|<M_i(\boldsymbol{A})\}$，$N_2(\alpha)=\{i\in N\,|\,|a_{ii}|>M_i(\boldsymbol{A})\}$，显然，$N_u(\alpha)\cap N_v(\alpha)=\varnothing(u\neq v)$，并且 $N=N_0(\alpha)\cup N_1(\alpha)\cup N_2(\alpha)$. 记 $\sum\limits_{i\in\varnothing}\bullet=0$，

$$r=\max_{i\in N_2(\alpha)}\left\{\frac{\left(\sum\limits_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum\limits_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\right)[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}}{|a_{ii}|^{1/\alpha}-\sum\limits_{j\in N_2(\alpha),\,j\neq i}|a_{ij}|\,[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}}\right\},$$

$$s=\max_{i\in N_1(\alpha)}\left\{\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right\},\qquad \delta=\max\{r,s\},$$

$$P_{i,r}(\boldsymbol{A})=\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+r\sum_{j\in N_2(\alpha),\,j\neq i}|a_{ij}|\right)[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha},\qquad i\in N_2(\alpha),$$

$$h=\max_{i\in N_2(\alpha)}\left\{\frac{\left(\delta\sum\limits_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum\limits_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\dfrac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}\right)[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}}{P_{i,r}(\boldsymbol{A})-\sum\limits_{j\in N_2(\alpha),\,j\neq i}|a_{ij}|\dfrac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}}\right\}.$$

定理 1　令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，对某个 $\alpha\in(0,1)$，当 $i\in N_2(\alpha)$ 时，存在 $j_0\in N_0(\alpha)\cup N_1(\alpha)$，使得 $a_{ij_0}\neq 0$，且对任意的 $i\in N_1(\alpha)$，都有

$$|a_{ii}|\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}>\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha),\,j\neq i}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+h\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}\right)^{\alpha}\times$$

$$\left[C_i(\boldsymbol{A})\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right]^{1-\alpha} \tag{1}$$

成立，则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵.

证明：易知 $0<r<1$，$0<s<1$，则 $0<\delta<1$. 结合 r 的定义可知，对任意的 $i\in N_2(\alpha)$，有

$$r|a_{ii}|^{1/\alpha}>\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+r\sum_{j\in N_2(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\right)[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha},$$

再由 $P_{i,r}(\boldsymbol{A})$的定义可知，$P_{i,r}(\boldsymbol{A})<r|a_{ii}|^{1/\alpha}$，因此 $0<\dfrac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}<r\leqslant\delta<1(i\in N_2(\alpha))$.

对任意的 $i\in N_2(\alpha)$，有

$$\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}\right)[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}=P_{i,r}(\boldsymbol{A})-r\sum_{j\in N_2(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha},$$

因此

$$\frac{\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}\right)[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}}{P_{i,r}(\boldsymbol{A})-\sum_{j\in N_2(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\dfrac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}}=$$

$$\frac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})-r\sum_{j\in N_2(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}}{P_{i,r}(\boldsymbol{A})-\sum_{j\in N_2(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\dfrac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}}\leqslant 1,$$

再根据 h 的定义可得 $0<h\leqslant 1$，并且有

$$hP_{i,r}(\boldsymbol{A})\geqslant\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+h\sum_{j\in N_2(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}\right)[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}. \tag{2}$$

对任意的 $i\in N_1(\alpha)$，令

$$q_i=\left(|a_{ii}|\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right)^{1/\alpha}-\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+h\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}\right)\times$$

$$\left[C_i(\boldsymbol{A})\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right]^{(1-\alpha)/\alpha},$$

由式(1)可知 $q_i>0$. 再令

$$w_i=\frac{q_i}{\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\left[C_i(\boldsymbol{A})\dfrac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right]^{(1-\alpha)/\alpha}},\qquad i\in N_1(\alpha). \tag{3}$$

特别地，由式(1)可知，当 $\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|=0$ 时，取 $w_i=+\infty$；当 $\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\neq 0$ 时，$w_i>0$，$i\in N_1(\alpha)$.

注意到

$$0<\frac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}h\leqslant\frac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}<r\leqslant\delta<1\quad(i\in N_2(\alpha)),$$

因此必存在一个充分小正数 ε，满足

$$0<\varepsilon<\min_{i\in N_1(\alpha)}\{w_i\}\leqslant+\infty,\qquad\max_{i\in N_2(\alpha)}\left\{\frac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}h+\varepsilon\right\}<\delta<1.$$

构造一个正对角矩阵 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中

$$x_i=\begin{cases}\delta, & i\in N_0(\alpha),\\ \dfrac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}, & i\in N_1(\alpha),\\ \dfrac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}h+\varepsilon, & i\in N_2(\alpha).\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AX}=(b_{ij})$，下证 $\boldsymbol{B}\in D(\alpha)$.

对任意的 $i\in N_0(\alpha)$，由 $0<\delta<1$，$0<\dfrac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\leqslant\delta<1(i\in N_1(\alpha))$，$0<\dfrac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}h+\varepsilon<\delta<1$ $(i\in N_2(\alpha))$，得

$$M_i(\boldsymbol{B})=\left[\delta\sum_{j\in N_0(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\left(\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}h+\varepsilon\right)\right]^{\alpha}[\delta C_i(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}<$$

$$\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|+\delta\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|+\delta\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\right)^{\alpha}[\delta C_i(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}=\delta|a_{ii}|=|b_{ii}|,$$

故 $|b_{ii}|>M_i(\boldsymbol{B})$，$i\in N_0(\alpha)$. 对任意的 $i\in N_1(\alpha)$，若 $\sum\limits_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|=0$，则由式(1)可知

$$M_i(\boldsymbol{B})=\left[\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\left(\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}h+\varepsilon\right)\right]^{\alpha}\times$$

$$\left[C_i(\boldsymbol{A})\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right]^{1-\alpha}<|a_{ii}|\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}=|b_{ii}|.$$

若 $\sum\limits_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\neq 0$，则由式(3)及 ε 取值范围可得

$$[M_i(\boldsymbol{B})]^{1/\alpha}=\left[\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\left(\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}h+\varepsilon\right)\right]\times$$

$$\left[C_i(\boldsymbol{A})\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right]^{(1-\alpha)/\alpha}<$$

$$\left[\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\left(\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}h\right)\right]\times$$

$$\left[C_i(\boldsymbol{A})\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right]^{(1-\alpha)/\alpha}+w_i\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\left[C_i(\boldsymbol{A})\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right]^{(1-\alpha)/\alpha}=$$

$$\left(|a_{ii}|\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right)^{1/\alpha}=|b_{ii}|^{1/\alpha},$$

故 $|b_{ii}|>M_i(\boldsymbol{B})$，$i\in N_1(\alpha)$.

对任意的 $i\in N_2(\alpha)$，由

$$|a_{ii}|^{1/\alpha}>R_i(\boldsymbol{A})[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}>\left[\sum_{j\in N_2(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\right][C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha}$$

和式(2)可知

$$|a_{ii}|^{1/\alpha}\left(\frac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}h+\varepsilon\right)=P_{i,r}(\boldsymbol{A})h+\varepsilon|a_{ii}|^{1/\alpha}>\left[\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+\right.$$

$$\left.\sum_{j\in N_2(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\left(\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}h+\varepsilon\right)\right][C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha},$$

从而可得

$$|b_{ii}|=|a_{ii}|\left(\frac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}h+\varepsilon\right)>\left[\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+\right.$$

$$\left.\sum_{j\in N_2(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\left(\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}h+\varepsilon\right)\right]^{\alpha}\left[C_i(\boldsymbol{A})\left(\frac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}h+\varepsilon\right)\right]^{1-\alpha}=M_i(\boldsymbol{B}),$$

即 $|b_{ii}|>M_i(\boldsymbol{B})$，$i\in N_2(\alpha)$.

综上可知 $|b_{ii}|>M_i(\boldsymbol{B})$，$i\in N_0(\alpha)\cup N_1(\alpha)\cup N_2(\alpha)=N$，故 $B\in D(\alpha)$，从而 $\boldsymbol{A}\in D^*(\alpha)$. 于是由引理 1 可知，$\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵.

定理 2　令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个不可约矩阵，对于某个 $\alpha\in(0,1)$，对任意的 $i\in N_1(\alpha)$，有

$$|a_{ii}|\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\geqslant\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+h\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}\right)^{\alpha}\times$$

$$\left[C_i(\boldsymbol{A})\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right]^{1-\alpha}, \tag{4}$$

且式(4)中至少有一个严格不等式成立，则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵.

证明：构造一个正对角矩阵 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中

$$x_i=\begin{cases}\delta, & i\in N_0(\alpha),\\ \dfrac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}, & i\in N_1(\alpha),\\ \dfrac{hP_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}, & i\in N_2(\alpha).\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AX}=(b_{ij})$，下证 $\boldsymbol{B}$ 为不可约 α-对角占优矩阵.

对任意的 $i\in N_0(\alpha)$，由 $0<\delta<1$，$0<\dfrac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\leqslant\delta<1(i\in N_1(\alpha))$，$0<\dfrac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}h\leqslant\delta<1$ $(i\in N_2(\alpha))$，有

$$M_i(\boldsymbol{B})=\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+h\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}\right)^{\alpha}[\delta C_i(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}\leqslant$$

$$\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|+\delta\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|+\delta\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\right)^{\alpha}[\delta C_i(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}=\delta|a_{ii}|=|b_{ii}|,$$

故 $|b_{ii}|\geqslant M_i(\boldsymbol{B})$，$i\in N_0(\alpha)$.

对任意的 $i\in N_1(\alpha)$，由式(4)可知

$$M_i(\boldsymbol{B})=\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+h\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{ij}|\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}\right)^{\alpha}\times$$

$$\left[C_i(\boldsymbol{A})\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}\right]^{1-\alpha}\leqslant|a_{ii}|\frac{M_i(\boldsymbol{A})-|a_{ii}|}{M_i(\boldsymbol{A})}=|b_{ii}|,$$

故 $|b_{ii}|\geqslant M_i(\boldsymbol{B})$，$i\in N_1(\alpha)$. 由定理条件可知，其中至少有一个严格不等式成立.

对任意的 $i\in N_2(\alpha)$，由式(2)可知

$$|a_{ii}|^{1/\alpha}\left(\frac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}h\right)=P_{i,r}(\boldsymbol{A})h\geqslant\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+\right.$$

$$\left.h\sum_{j\in N_2(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}\right)[C_i(\boldsymbol{A})]^{(1-\alpha)/\alpha},$$

从而可得

$$|b_{ii}|=|a_{ii}|\left(\frac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}h\right)\geqslant\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{ij}|+\sum_{j\in N_1(\alpha)}|a_{ij}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+\right.$$

$$\left.h\sum_{j\in N_2(\alpha),\ j\neq i}|a_{ij}|\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}\right)^{\alpha}\left[C_i(\boldsymbol{A})\frac{P_{i,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{1/\alpha}}h\right]^{1-\alpha}=M_i(\boldsymbol{B}),$$

即 $|b_{ii}|\geqslant M_i(\boldsymbol{B})$，$i\in N_2(\alpha)$.

综上可知 $|b_{ii}|\geqslant M_i(\boldsymbol{B})$，$i\in N_0(\alpha)\cup N_1(\alpha)\cup N_2(\alpha)=N$，且至少有一个严格不等式成立. 由 $\boldsymbol{A}$ 是一个不可约矩阵可知 $\boldsymbol{B}$ 不可约，因此 $\boldsymbol{B}$ 是一个不可约 α-对角占优矩阵. 由引理 2 可知 $\boldsymbol{B}$ 是非奇异 H-矩阵，再由引理 3 可知 $\boldsymbol{A}$ 为一个非奇异 H-矩阵.

定理 3 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，存在 $\alpha\in(0,1)$，使得对任意的 $i\in N_1(\alpha)$，式(4)成立，并且对使式(4)中等式成立的指标 i，均存在非零元素链 $a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k}\neq0$，使得

$$|a_{j_kj_k}|\frac{M_{j_k}(\boldsymbol{A})-|a_{j_kj_k}|}{M_{j_k}(\boldsymbol{A})}>\left(\delta\sum_{j\in N_0(\alpha)}|a_{j_kj}|+\sum_{j\in N_1(\alpha),\ j\neq j_k}|a_{j_kj}|\frac{M_j(\boldsymbol{A})-|a_{jj}|}{M_j(\boldsymbol{A})}+h\sum_{j\in N_2(\alpha)}|a_{j_kj}|\frac{P_{j,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{1/\alpha}}\right)^{\alpha}\times$$

$$\left[C_{j_k}(\boldsymbol{A})\frac{M_{j_k}(\boldsymbol{A})-|a_{j_kj_k}|}{M_{j_k}(\boldsymbol{A})}\right]^{1-\alpha}, \tag{5}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵.

证明：类似定理 2 的证明构造一个正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$，易证：对任意的 $i\in N$，都有 $|b_{ii}|\geqslant M_i(\boldsymbol{B})$，且对满足 $|b_{ii}|=M_i(\boldsymbol{B})$的行指标 i，有非零元素链 $b_{ij_1}b_{j_1j_2}\cdots b_{j_{k-1}j_k}\neq 0$，使得 $|b_{j_kj_k}|>M_{j_k}(\boldsymbol{B})$，从而 $\boldsymbol{B}$ 为具有非零元素链的 α-对角占优矩阵，由引理 2 可知 $\boldsymbol{B}$ 为非奇异 H-矩阵，进一步由引理 3 可知 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵.

3　数值实例

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2.3 & 1 & 5 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 9\end{pmatrix}.$$

取 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，通过计算可得 $N_0(\alpha)=\{1\}$，$N_1(\alpha)=\{2,3\}$，$N_2(\alpha)=\{4,5\}$，$r=\dfrac{2}{7}$，$s=\dfrac{\sqrt{14}-2.3}{\sqrt{14}}$，$\delta=\dfrac{\sqrt{14}-2.3}{\sqrt{14}}$，$P_{4,r}(\boldsymbol{A})=4.088\ 940\ 931\ 782\ 2$，$P_{5,r}(\boldsymbol{A})=2.013\ 040\ 287\ 947\ 1$，$h=0.691\ 204\ 174\ 769\ 0$.

故

$$|a_{22}|\frac{M_2(\boldsymbol{A})-|a_{22}|}{M_2(\boldsymbol{A})}=0.886\ 188\ 030\ 283\ 2>0.879\ 259\ 615\ 852\ 9=$$
$$\left[\delta\cdot|a_{21}|+|a_{23}|\frac{M_3(\boldsymbol{A})-|a_{33}|}{M_3(\boldsymbol{A})}+h\cdot\left(|a_{24}|\frac{P_{4,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{44}|^{1/\alpha}}+|a_{25}|\frac{P_{5,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{55}|^{1/\alpha}}\right)\right]^{\alpha}\times$$
$$\left[C_2(\boldsymbol{A})\frac{M_2(\boldsymbol{A})-|a_{22}|}{M_2(\boldsymbol{A})}\right]^{1-\alpha},$$

$$|a_{33}|\frac{M_3(\boldsymbol{A})-|a_{33}|}{M_3(\boldsymbol{A})}=0.676\ 209\ 992\ 275\ 5>0.624\ 460\ 601\ 870\ 8=$$
$$\left[\delta\cdot|a_{31}|+|a_{32}|\frac{M_2(\boldsymbol{A})-|a_{22}|}{M_2(\boldsymbol{A})}+h\cdot\left(|a_{34}|\frac{P_{4,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{44}|^{1/\alpha}}+|a_{35}|\frac{P_{5,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{55}|^{1/\alpha}}\right)\right]^{\alpha}\times$$
$$\left[C_3(\boldsymbol{A})\frac{M_3(\boldsymbol{A})-|a_{33}|}{M_3(\boldsymbol{A})}\right]^{1-\alpha}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足定理 1 的条件，所以 $\boldsymbol{A}$ 是一个非奇异 H-矩阵.

采用文献[7]中的记号和公式，通过计算有

$$|a_{22}|\frac{\Lambda_2(\boldsymbol{A})-|a_{22}|}{\Lambda_2(\boldsymbol{A})}=1.124\ 444\ 444\ 444\ 4<1.196\ 794\ 871\ 794\ 7=$$
$$\alpha\left[\delta\cdot|a_{21}|+|a_{23}|\frac{\Lambda_3(\boldsymbol{A})-|a_{33}|}{\Lambda_3(\boldsymbol{A})}+h\cdot\left(|a_{24}|\frac{P_{4,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{44}|}+|a_{25}|\frac{P_{5,r}(\boldsymbol{A})}{|a_{55}|}\right)\right]+$$
$$(1-\alpha)C_2(\boldsymbol{A})\frac{\Lambda_2(\boldsymbol{A})-|a_{22}|}{\Lambda_2(\boldsymbol{A})},$$

显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不满足文献[7]中定理的条件，故不能判定 $\boldsymbol{A}$ 是一个非奇异 H-矩阵. 采用文献[8]中的记号和公式，通过计算得

$$|a_{22}|=2.3<\frac{\Lambda_2(\boldsymbol{A})}{|a_{22}|}\left(|a_{21}|\frac{|a_{11}|}{\Lambda_1(\boldsymbol{A})}+|a_{23}|\frac{|a_{33}|}{\Lambda_3(\boldsymbol{A})}+\frac{\Lambda_4(\boldsymbol{A})}{|a_{44}|}+\frac{\Lambda_5(\boldsymbol{A})}{|a_{55}|}\right)=7.371\ 980\ 676\ 328\ 5,$$

显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不满足文献[8]中定理的条件，故不能判定 $\boldsymbol{A}$ 是一个非奇异 H-矩阵. 采用文献[9]中的记号和公式，通过计算得

$$|a_{22}|=2.3<\frac{\Lambda_2(\boldsymbol{A})}{\Lambda_2(\boldsymbol{A})-|a_{22}|}\left(|a_{21}|+|a_{23}|\frac{\Lambda_3(\boldsymbol{A})-|a_{33}|}{\Lambda_3(\boldsymbol{A})}+|a_{24}|\frac{\Lambda_4(\boldsymbol{A})}{|a_{44}|}+|a_{25}|\frac{\Lambda_5(\boldsymbol{A})}{|a_{55}|}\right)=$$
$$4.567\ 375\ 886\ 524\ 8,$$

显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不满足文献[9]中定理的条件，故不能判定 $\boldsymbol{A}$ 是一个非奇异 H-矩阵. 采用文献[10]中的记号和公式，通过计算得

$$r=\frac{1}{5},\quad P_4(\boldsymbol{A})=\frac{6}{5},\quad P_5(\boldsymbol{A})=\frac{6}{5},$$

$$|a_{33}|=3<\frac{\Lambda_3(\boldsymbol{A})}{\Lambda_3(\boldsymbol{A})-|a_{33}|}\left(|a_{31}|+|a_{32}|\frac{\Lambda_2(\boldsymbol{A})-|a_{22}|}{\Lambda_2(\boldsymbol{A})}+|a_{34}|\frac{P_4(\boldsymbol{A})}{|a_{44}|}+|a_{35}|\frac{P_5(\boldsymbol{A})}{|a_{55}|}\right)=5.845\ 238\ 095\ 238\ 0,$$

显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不满足文献[10]中定理的条件，故不能判定 $\boldsymbol{A}$ 是一个非奇异 H-矩阵. 采用文献[11]中的记号和公式，通过计算有

$$|a_{22}|=2.3<3.423\ 820\ 004\ 891\ 1=\frac{1}{\sigma_2}\left(|a_{21}|\sigma_1+|a_{23}|\sigma_3+|a_{24}|\frac{kR_4(\boldsymbol{A})}{|a_{44}|}+|a_{25}|\frac{kR_5(\boldsymbol{A})}{|a_{55}|}\right),$$

显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不满足文献[11]中定理的条件，故不能判定 $\boldsymbol{A}$ 是一个非奇异 H-矩阵.

参 考 文 献

[1] CHEN Q, LI M. Criteria for Nonsingular H-Matrices [C]//Conference of the 2nd International Conference on Computer Science and Electronics Engineering (ICCSEE 2013). [S. l.]: Atlantis Press, 2013: 582-585.

[2] SUN Y X. An Improvement on a Theorem by Ostrowski and Its Applications [J]. Northeastern Math J, 1991, 7(4): 497-502.

[3] 冷春勇. 非奇异 H-矩阵的判定 [J]. 应用数学学报, 2011, 34(1): 50-56. (LENG C Y. Criteria for Nonsingular H-Matrices [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2011, 34(1): 50-56.)

[4] BERMAN A, PLEMMONS R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences [M]. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994: 1-340.

[5] 李敏, 桑海风, 刘畔畔, 等. 非奇异 H-矩阵的细分迭代判定 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(5): 1101-1106. (LI M, SANG H F, LIU P P, et al. Subdivided Iterative Criteria for Nonsingular H-Matrices [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2017, 55(5): 1101-1106.)

[6] 李敏, 桑海风, 龚言, 等. 非奇异 H-矩阵的迭代判定 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2022, 60(3): 597-603. (LI M, SANG H F, GONG Y, et al. Iterative Criteria for Nonsingular H-Matrices [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2022, 60(3): 597-603.)

[7] LIU P P, SANG H F, LI M, et al. New Criteria for Nonsingular H-Matrices [J]. AIMS Mathematics, 2023, 8(8): 17484-17502.

[8] GAN T B, HUANG T Z. Simple Criteria for Nonsingular H-Matrices [J]. Linear Algebra Appl, 2003, 374: 317-326.

[9] 干泰彬, 黄廷祝. 非奇异 H 矩阵的实用充分条件 [J]. 计算数学, 2004, 26(1): 109-116. (GAN T B, HUANG T Z. Practical Sufficient Conditions for Nonsingular H-Matrices [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2004, 26(1): 109-116.)

[10] 庹清, 朱砾, 刘建州. 一类非奇异 H-矩阵判定的新条件 [J]. 计算数学, 2008, 30(2): 177-182. (TUO Q, ZHU L, LIU J Z. One Type of New Criteria Conditions for Nonsingular H-Matrices [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2008, 30(2): 177-182.)

[11] 邰志艳. 非奇异 H-矩阵的实用新判据 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2009, 41(2): 13-17. (TAI Z Y. New Practical Criteria for Nonsingular H-Matrices [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 2009, 41(2): 13-17.)

(责任编辑：赵立芹)