

罗新刚,王万银. 基于正则化思想的 tilt-Euler 法在边缘深度反演中的应用. 吉林大学学报(地球科学版), 2024, 54(2): 633 - 646. doi:10.13278/j.cnki.jjuese.20230035.

Luo Xingang, Wang Wanyin. Application of Tilt-Euler Method Based on Regularization in Edge Depth Inversion. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2024, 54 (2): 633 - 646. doi:10.13278/j.cnki.jjuese.20230035.

# 基于正则化思想的 tilt-Euler 法 在边缘深度反演中的应用

罗新刚<sup>1,2</sup>, 王万银<sup>1,3,4</sup>

1. 长安大学重磁方法技术研究所/长安大学地质工程与测绘学院/西部矿产资源与地质工程教育部重点实验室(长安大学), 西安 710054
2. 中国地质调查局西安地质调查中心/西北地质科技创新中心, 西安 710119
3. 海洋油气勘探国家工程研究中心, 北京 100028
4. 中国科学院海洋地质与环境重点实验室, 山东 青岛 266071

**摘要:**地质体边缘深度在重、磁位场数据半定量解释中起着至关重要的作用。由于重、磁异常及其各阶导数均满足欧拉齐次方程, tilt-Euler 法在边缘深度反演方面备受青睐。然而, 当重、磁异常的总水平导数或者总梯度模等于 0 时, 倾斜角的一阶导数无法计算, 导致倾斜角不能满足欧拉方程, tilt-Euler 法无法使用。为了解决此问题, 本文基于正则化思想, 对倾斜角的一阶导数进行修改, 使得重、磁异常的总水平导数或者总梯度模等于 0 时, 倾斜角的一阶导数依然可以计算, 修改后的倾斜角导数依然满足欧拉方程, 称改进的方法为 rtilt-Euler 法; 同时利用识别精度更高的归一化总水平导数垂向导数(NVDR-THDR)边缘识别方法对反演结果进行约束, 剔除偏离边缘位置的坏点。理论模型试验结果表明, 改进后的方法消除了重、磁异常总水平导数或者总梯度模很小或者等于 0 时, 倾斜角导数无法计算以及反演结果不稳定的问题。将该方法应用到澳大利亚奥林匹克坝氧化铁铜金矿床边缘深度反演中, 反演结果显示氧化铁铜金矿床边缘深度主要集中在 0~100 m 和 100~200 m 这两个深度段内, 与沉积物剖面显示的矿床边缘深度 0~200 m 相符, 证明了该方法的有效性。

**关键词:**地质体边缘深度; 重磁位场; 正则化; rtilt-Euler; NVDR-THDR

doi:10.13278/j.cnki.jjuese.20230035

中图分类号: P631

文献标志码: A

## Application of Tilt-Euler Method Based on Regularization in Edge Depth Inversion

Luo Xingang<sup>1,2</sup>, Wang Wanyin<sup>1,3,4</sup>

收稿日期: 2023-02-21

作者简介: 罗新刚(1991-), 男, 博士, 主要从事重、磁方法理论及应用方面的研究, E-mail: lxg\_chd@163.com

通信作者: 王万银(1962-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事重、磁方法理论及应用方面的研究和教学工作, E-mail: wwy7902@chd.edu.cn

基金项目: 中海石油有限公司科技项目(CCL2021RCPS0167KQN); 中央高校基本科研业务费专项资金(300102261714)

Supported by the Scientific and Technological Project of China National Offshore Oil Corporation Co., Ltd. (CCL2021RCPS0167KQN) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, CHD (300102261714)

1. Institute of Gravity and Magnetic Technology, Chang'an University/ College of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University/ Key Laboratory of Western China's Mineral Resources and Geological Engineering (Chang'an University), Ministry of Education, Xi'an 710054, China
2. Xi'an Center of China Geological Survey/ Northwest China Center for Geoscience Innovation, Xi'an 710119, China
3. National Engineering Research Center of Offshore Oil and Gas Exploration, Beijing 100028, China
4. Key Laboratory of Marine Geology and Environment, Chinese Academy of Science, Qingdao 266071, Shandong, China

**Abstract:** The edge depth of geological bodies plays a critical role in the semi-quantitative interpretation of gravity and magnetic field data. Since gravity and magnetic anomalies and their derivatives of all orders satisfy the Euler homogeneous equation, the tilt-Euler method is favored for inversion of edge depth. However, it is found that when the total horizontal derivative or the total gradient mode of gravity or magnetic anomalies is equal to zero, the first-order derivative of the tilt angle cannot be calculated, resulting in the tilt angle cannot satisfy the Euler equation, and the tilt-Euler method cannot be used. In order to solve this problem, based on the regularization idea, we modified the first-order derivative of the tilt angle, so that the first-order derivative of the tilt angle can still be calculated when the total horizontal derivative or the total gradient mode of gravity or magnetic anomalies is equal to zero, and the modified derivatives of the tilt angle still satisfy the Euler equation. We call the improved method the rtilt-Euler method. At the same time, the normalized vertical derivative of the total horizontal derivative (NVDR-THDR) with higher edge recognition accuracy was used to constrain the inversion results and eliminate the bad points deviating from the edge position. The results of the model test show that the improved method eliminates the problems that the tilt angle derivative cannot be calculated and the instability of the inversion results when the total horizontal derivative or the total gradient mode of gravity or magnetic anomalies is zero or very small. This method was applied to the edge depth inversion of iron oxide, copper-gold (IOCG) deposit of the Olympic Dam in Australia. The results show that the edge depth of the iron oxide, copper-gold deposit is mainly concentrated in the depth ranges of 0 – 100 m and 100 – 200 m, which is consistent with the edge depth of 0 – 200 m shown by the sedimentary profile, proving the effectiveness of the method.

**Key words:** edge depth of geological bodies; gravity and magnetic fields; regularization; rtilt-Euler; NVDR-THDR

## 0 引言

重磁位场勘探方法以不同岩、矿石之间物理性质(密度、磁性等)的差异为基础,当不同地质体边界处存在明显的密度或磁性差异时,可以根据重、磁异常来推断地质体边界的空间位置<sup>[1-2]</sup>。20 世纪 80 年代以来,随着位场资料处理技术的发展,出现了一些地质体边缘深度反演新方法,主要包括欧拉(Euler)反褶积法、沃纳(Werner)反褶积法、局部波数法、解析信号振幅法、tilt-depth 法和曲率属性反演法等。其中:沃纳反褶积法、局部波数法、解析信号振幅法、tilt-depth 法和曲率属性反演法都是从二维模型推广到三维模型中,因此在三维模型中的应

用受到了理论基础的限制;而欧拉反褶积法是基于欧拉齐次方程提出的,位场数据及其各阶导数均满足欧拉齐次方程,因此该方法在边缘深度反演方面备受青睐。

欧拉反褶积法是 Thompson<sup>[3]</sup> 在 1982 年基于欧拉齐次方程首次提出的。1990 年,Reid 等<sup>[4]</sup>对欧拉反褶积法做了进一步研究,将欧拉反褶积法推广到三维空间,提出了基于欧拉方程的边缘识别方法。1998 年,Keating<sup>[5]</sup>针对不规则重力数据分布导致解发散的问题,提出用正比于测点精度的误差函数对欧拉反褶积法的结果进行加权,消除了部分发散的解。2003 年,Salem 等<sup>[6]</sup>提出 AN – EUL 法,将总梯度模和欧拉反褶积两种方法结合,识别地磁或

航磁异常体的边界,但这种方法受高频干扰较大。2006年,范美宁<sup>[7]</sup>对欧拉反褶积进行了比较系统的研究,用不同类型的数据作为原始数据进行反演,使反演结果的收敛性有较大的改善。后续很多学者针对欧拉反褶积法解发散的问题做了大量的研究<sup>[8-13]</sup>,改善了其反演精度和稳定性。由于最开始欧拉反褶积法在使用时必须提前已知构造指数,而构造指数是与场源形状有关的参数,当已知场源先验信息较少时,构造指数的获取非常困难,尤其是存在多个场源时,受到异常叠加效应的影响,构造指数几乎是不可能得到的。前人关于构造指数的选取也做了大量的研究<sup>[14-16]</sup>,反演效果有所改善,但这仍然制约着该方法在位场数据中的应用。因此许多学者基于欧拉齐次方程尝试使用不同的数据源类型来消除反演结果对构造指数的依赖<sup>[15, 17-22]</sup>。Salem等<sup>[19]</sup>将倾斜角(tilt angle)法和欧拉反褶积法结合起来,消除了反演结果对构造指数的依赖,称之为 tilt-Euler 法。该方法在边缘位置探测和边缘深度反演方面得到了广泛的应用<sup>[23-26]</sup>。2019年,Liang等<sup>[27]</sup>通过对 tilt-Euler 法的研究,发现当位场数据的总水平导数等于0时,倾斜角的导数无法计算,存在奇点,因此对该方法进行了改进,重新定义了倾斜角的表达式,解决了该问题。然而本文在研究过程中发现当总梯度模等于0时,倾斜角的导数依然无法计算,存在奇点,并且当总梯度模很小时,倾斜角的导数非常不稳定,这势必也会引起反演结果的不稳定。欧拉反褶积法存在的另一个问题是解的筛选,由于实际资料存在噪声,因此反演结果中必然存在许多虚假解。针对解的筛选问题,Salem等<sup>[19]</sup>利用倾斜角总水平导数的峰值位置对反演数据范围进行约束,但当异常的总梯度模等于0时,倾斜角的总水平导数仍然无法计算,存在奇点。

本文基于正则化思想,对倾斜角的导数进行修改,消除奇点,并且证明修改后倾斜角各个方向的导数依然满足 tilt-Euler 方程;同时利用识别精度更高的归一化总水平导数垂向导数(NVDR-THDR)边缘识别方法<sup>[28-30]</sup>对反演数据范围进行约束,使得反演的结果集中在边缘位置附近;利用模型试验证明改进后的方法解决总梯度模等于0时奇点问题以及总梯度模很小时反演结果不稳定性问题的有效性。最后,将该方法应用于澳大利亚奥林匹克坝氧化铁铜金矿床的边缘深度反演,为矿产资源储量估算提

供参考资料。

## 1 基本原理

### 1.1 tilt-Euler 法

欧拉方程的基本公式<sup>[3]</sup>为

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z} = -N(f - B). \quad (1)$$

式中:  $(x, y, z)$  为观测点坐标;  $(x_0, y_0, z_0)$  为场源坐标;  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  分别为总磁异常  $f$  沿  $x, y, z$  三个方向的一阶导数;  $N$  为构造指数,其大小与场源的几何形状有关;  $B$  为背景场。在实际应用中,由于场源的几何形状很难获得,因此无法确定  $N$  的大小。

1994年,Miller等<sup>[31]</sup>将解析信号相位概念引入到边缘识别,称之为倾斜角( $\theta$ ),其计算公式为

$$\theta(x, z) = \arctan\left(\frac{\partial f / \partial z}{\partial f / \partial h}\right). \quad (2)$$

式中,  $\partial f / \partial h$  为位场  $f$  的总水平导数:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}. \quad (3)$$

倾斜角总水平导数( $\theta_{\text{THDR}}$ )由 Verduzco 等<sup>[32]</sup>首次提出,其计算公式为

$$\theta_{\text{THDR}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2}. \quad (4)$$

Salem等<sup>[19]</sup>推导了倾斜角三个方向的导数  $k_x, k_y, k_z$ ,发现它们满足

$$xk_x + yk_y + zk_z = x_0k_x + y_0k_y + z_0k_z. \quad (5)$$

其中:

$$\begin{cases} k_x = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{A^2} \left[ \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \left( \frac{\partial f / \partial z}{\partial f / \partial h} \right) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \right]; \\ k_y = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{A^2} \left[ \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \left( \frac{\partial f / \partial z}{\partial f / \partial h} \right) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right]; \\ k_z = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{A^2} \left[ \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left( \frac{\partial f / \partial z}{\partial f / \partial h} \right) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \right]. \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $A$  为总梯度模。基于此, Salem等<sup>[19]</sup>提出了 tilt-Euler法,并利用此关系反演了地质体的深度。

2019 年,Liang 等<sup>[27]</sup>通过对 tilt-Euler 法的研究发现,由于倾斜角不是调和函数,无法通过位场理论求得  $k_z$ ,只能通过式(6)计算,而当异常的总水平导数等于 0 时,式(6)存在奇点。这是由于

$$\lim_{\frac{\partial f}{\partial h} \rightarrow 0} \left( \frac{\partial f / \partial z}{\partial f / \partial h} \right) = \infty. \tag{7}$$

因此,Liang 等<sup>[27]</sup>重新定义了倾斜角( $\theta'$ ):

$$\theta'(x,z) = \arctan \left( \frac{\partial f}{\partial z} / \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} \right). \tag{8}$$

求取  $\theta'(x,z)$  的一阶导数  $k'_x, k'_y, k'_z$ , 并证明了其依然满足

$$xk'_x + yk'_y + zk'_z = x_0k'_x + y_0k'_y + z_0k'_z. \tag{9}$$

其中:

$$\begin{cases} k'_x = \frac{\partial \theta'}{\partial x} = \frac{1}{A'^2} \left[ A \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) / A \right]; \\ k'_y = \frac{\partial \theta'}{\partial y} = \frac{1}{A'^2} \left[ A \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) / A \right]; \\ k'_z = \frac{\partial \theta'}{\partial z} = \frac{1}{A'^2} \left[ A \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) / A \right]. \end{cases} \tag{10}$$

$$A' = \sqrt{A^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}. \tag{11}$$

显然,式(10)中

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow 0} \left( \frac{\partial f}{\partial z} / A \right) &= \\ \lim_{\substack{\partial T / \partial x \rightarrow 0 \\ \partial T / \partial y \rightarrow 0 \\ \partial T / \partial z \rightarrow 0}} \left( \frac{\partial f}{\partial z} / \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} \right) &= \\ \lim_{\substack{\partial T / \partial x \rightarrow 0 \\ \partial T / \partial y \rightarrow 0 \\ \partial T / \partial z \rightarrow 0}} \left( 1 / \sqrt{\left( \frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial z} \right)^2 + 1} \right) &\leq 1. \end{aligned} \tag{12}$$

因此,该方法当总水平导数等于 0 时不存在奇点,但

是当  $A \rightarrow 0$  时,  $A' \rightarrow 0, k'_z$  无法计算,奇点依然存在。

1.2 基于正则化思想改进的 tilt-Euler 法 (rtilt-Euler)

本文针对 tilt-Euler 法中的奇点问题,基于正则化思想,对倾斜角的各阶导数引入正则化因子,表达式为

$$\begin{cases} k_x'' = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} \cdot \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \right]; \\ k_y'' = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} \cdot \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right]; \\ k_z'' = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} \cdot \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \right]. \end{cases} \tag{13}$$

式中:  $\max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)$  为观测面上所有  $A^2 \frac{\partial f}{\partial h}$  中的最大值;  $\alpha$  为正则化因子,是大于 0 的常数。

下面证明式(13)依然满足 tilt-Euler 方程:

$$k_x''x_0 + k_y''y_0 + k_z''z_0 = k_x''x + k_y''y + k_z''z. \tag{14}$$

对式(1)两边同时关于  $x, y, z$  三个方向求导,可得:

$$\begin{aligned} (x - x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \\ (z - z_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= -(N + 1) \frac{\partial f}{\partial x}; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} (x - x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \\ (z - z_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= -(N + 1) \frac{\partial f}{\partial y}; \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} (x - x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + (y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \\ (z - z_0) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= -(N + 1) \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \tag{17}$$

式(15)乘以  $\frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)}$ , 得到

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial z} \left[ (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} +$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial z} (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} =$$

$$\frac{- (N + 1) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial z}}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)};$$

$$(18)$$

式(17)乘以  $\frac{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)}$ , 得到

$$\frac{(x - x_0) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + (y - y_0) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} +$$

$$\frac{(z - z_0) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} =$$

$$\frac{- (N + 1) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial z}}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)}.$$

式(19)减去式(18)可得

$$\frac{(x - x_0) \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} +$$

$$\frac{(y - y_0) \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} +$$

$$\frac{(z - z_0) \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right]}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} = 0.$$

同样, 将式(17)乘以  $\frac{\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)}$ , 式

$$(16) \text{ 乘以 } \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z}}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)}, \text{ 并将得到的两}$$

$$\text{式相减, 可以得到}$$

$$\frac{(x - x_0) \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} +$$

$$\frac{(y - y_0) \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} +$$

$$\frac{(z - z_0) \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right]}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} = 0.$$

$$(21)$$

对式(20)和式(21)求和可得

$$\frac{(x - x_0)}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} \cdot$$

$$\left[ \left( \frac{\partial f}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \right] +$$

$$\frac{(y - y_0)}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} \cdot$$

$$\left[ \left( \frac{\partial f}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \right] +$$

$$\frac{(z - z_0)}{A^2 \frac{\partial f}{\partial h} + \alpha \max \left( A^2 \frac{\partial f}{\partial h} \right)} \cdot$$

$$\left[ \left( \frac{\partial f}{\partial h} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \right] = 0.$$

$$(22)$$

即

$$(x - x_0) k_x'' + (y - y_0) k_y'' + (z - z_0) k_z'' = 0.$$

$$(23)$$

因此引入正则化因子的倾斜角一阶导数满足式(14), 本文称之为基于正则化方法的 tilt-Euler 法 (rtilt-Euler)。

显然对于 rtilt-Euler 法, 当  $\alpha > 0$  时, 无论当总水平导数还是总梯度模等于 0, 该方法都不存在奇点; 同时, 当总水平导数或总梯度模很小时, 可以通过正则化因子提高解的稳定性。由于引入正则化因子的目的是为了避开倾斜角的一阶导数在计算时分

(20)

母过小导致的计算不稳定,那么该正则化因子选择多少合适? 本文计算了不同正则化因子边缘深度反演结果的相对误差(图 1)。由图 1 可知:随着正则化因子的增大,反演结果的相对误差在逐渐减小;但当  $\alpha \geq 1$  后,相对误差基本不再发生变化,稳定在 10% 左右。因此一般情况下建议  $\alpha$  取 1 即可。

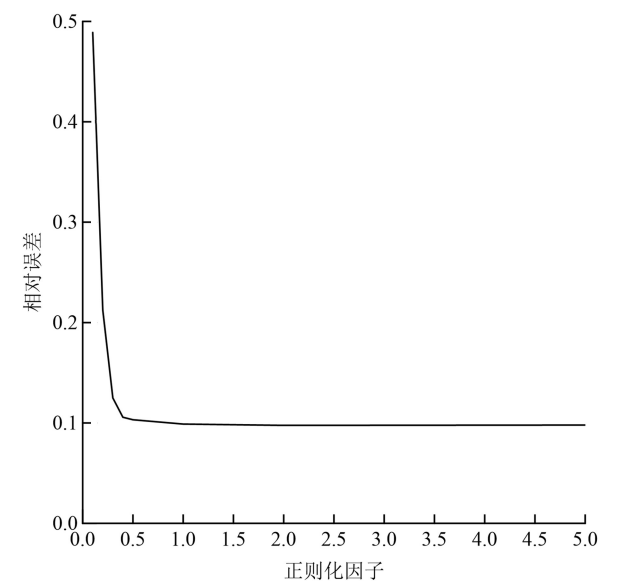


图 1 正则化因子与相对误差的关系图

Fig.1 Relationship between regularization factor and relative error

2 模型试算

本次模型试算选取 3 个重力异常模型,模型参数见表 1。通过对比 tilt-Euler 法和 rtilt-Euler 法的反演结果,验证本文提出的正则化方法的有效性。各模型重力异常及边界位置如图 2 所示。

2.1 模型 A——单一直立六面体模型

图 3 为模型 A 的边缘深度反演结果及其分段直方图。由边缘深度反演结果可知,对于单一直立六面体来说,tilt-Euler 法(图 3a)和 rtilt-Euler 法(图 3c)的反演结果基本相同。这是由于单一直立六面体在边界处不存在奇点,同时也证明了改进方法的正确性。从反演结果的分段直方图上可以看出,改进方法在深度上更靠近直立六面体边缘深度的顶面位置,众值集中在 100~120 m 的范围内(图 3d),而原来的方法集中在 110~130 m 之间(图 3b)。由图 3e 和图 3f 可知,如果以 NVDR-THDR 对边缘位置进行约束,其反演效果会更好,剔除了边界外的其他坏点。但由图 3b、图 3d 和图 3f 可知,即使是使用 NVDR-THDR 对边缘位置进行约束,边界上的反演结果值虽然大部分靠近模型的顶面深度,但也有小部分点的深度偏离顶面深度较远,最深达到了 120 m。这实际上是因为 tilt-Euler 法最开始是用来反演孤立球体的中心深度的,当将 tilt-Euler 法推广到边缘深度反演中时,对模型是有要求的,理论上来说要求台阶模型在走向方向无限延伸,在垂直于走向的方向满足一侧无限延伸,同时台阶的下底深度要远远大于顶面埋深。如果满足这些条件,那么反演的结果将不存在额外的结果,所有反演解都将集中在地质体边缘顶面深度的位置。但在实际应用中,这些条件是不可能满足的,为了模拟真实的地质情况,本文设计的模型 A 也不满足这些条件。

2.2 模型 B——相同埋深的两个组合直立六面体模型

图 4 为模型 B 的边缘深度反演结果及其分段直方图。由边缘深度反演结果可知:对于两个相同埋深的直立六面体,tilt-Euler 法(图 4a)和 rtilt-Euler

表 1 模型参数  
Table 1 Model parameters

| 模型 | 形体数目 | 密度/(g/cm <sup>3</sup> ) | 坐标        |          |         | 间隔/m |
|----|------|-------------------------|-----------|----------|---------|------|
|    |      |                         | x/m       | y/m      | z/m     |      |
| A  | 1    | 0.3                     | -300~300  | -500~500 | 100~500 | 200  |
| B  | 2    | 0.3                     | -500~-100 | -500~500 | 100~500 |      |
|    |      |                         | 100~500   | -500~500 | 100~500 |      |
| C  | 3    | 0.3                     | -800~-500 | -500~500 | 50~500  | 350  |
|    |      |                         | -150~150  | -500~500 | 100~500 |      |
|    |      |                         | 500~800   | -500~500 | 150~500 |      |

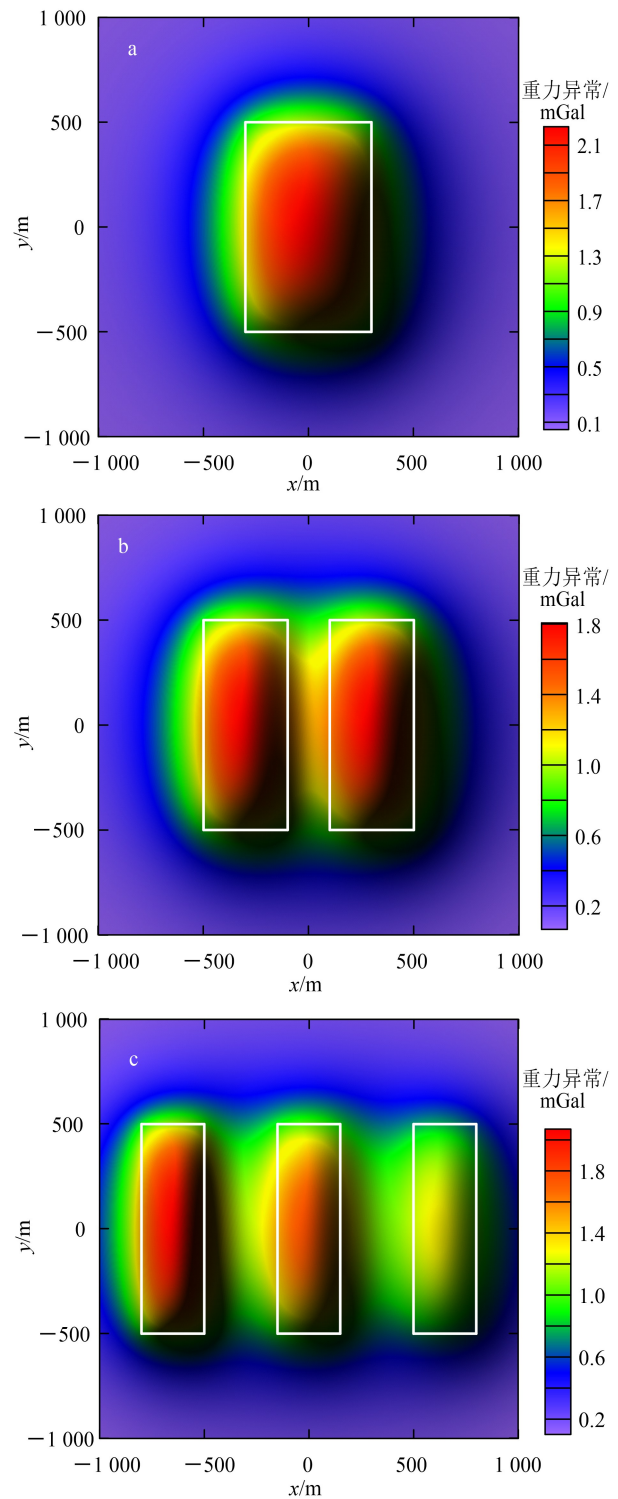


图 2 理论模型边界及重力异常

Fig.2 Theoretical model boundary and their gravity anomaly

法(图 4c)在非相邻边界上反演结果基本相同,深度基本位于 100~140 m 之间(图 4b 和图 4d);在相邻边界处,rtilt-Euler 法反演结果的连续性优于 tilt-

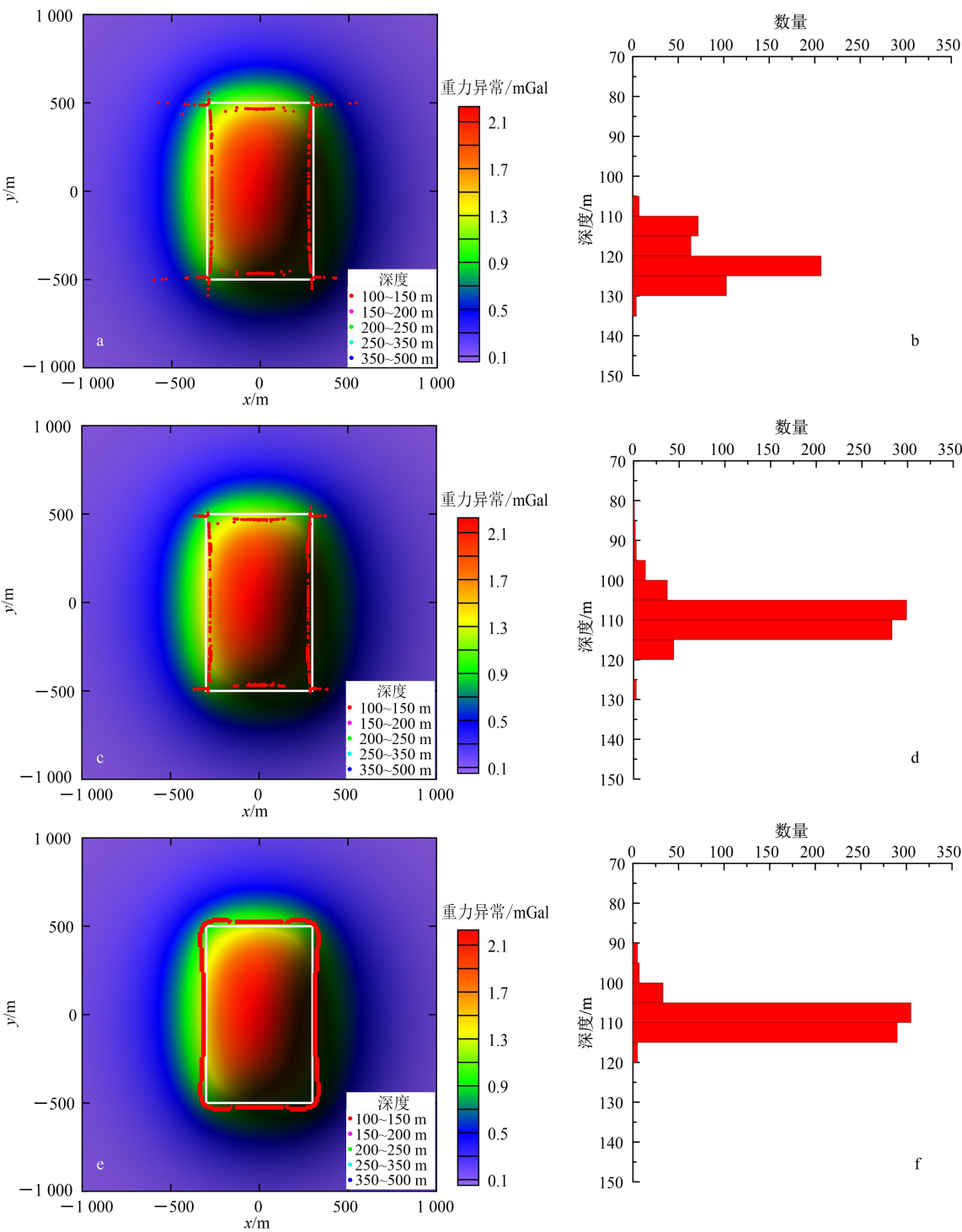
Euler 法。这是因为在形体的相邻边界处可能出现奇点,而 rtilt-Euler 法消除了奇点,提高了解的稳定性,反演的深度位于 200~360 m 之间(图 4d)。如果以 NVDR-THDR 对边缘位置进行约束,其反演结果(图 4e)会集中在模型体的边缘位置,尤其是较窄的边能够得到很好的改善。另外,由图 4b、图 4d 和图 4f 可知,相较于模型 A,模型 B 的反演结果具有两个深度峰值,深度较浅的峰值(100~140 m)为直立六面体非相邻的两个边的顶面埋深,深度较大的峰值(200~360 m)为相邻两个边的反演结果,该峰值明显大于模型边缘的顶面埋深。这是由于当将 tilt-Euler 法推广到边缘深度反演中时,除了要求台阶模型在走向方向无限延伸、在垂直于走向的方向满足一侧无限延伸、台阶的下底深度远远大于顶面埋深外,还要求模型为孤立形体。所以当地质体不是孤立形体时,受相邻形体的叠加异常影响,反演的结果会偏深。

2.3 模型 C——不同埋深的多个组合直立六面体模型

图 5 为模型 C 的边缘深度反演结果。由边缘深度反演结果可知,对于不同埋深的组合直立六面体来说,rtilt-Euler 法的反演结果(图 5c)明显优于 tilt-Euler 法(图 5a)。这是由于当模型增多、埋深变化时,倾斜角导数奇点数量增多,tilt-Euler 法反演的结果变得极为不稳定。从深度的反演结果上来看,tilt-Euler 法(图 5a)仅能刻画埋深最浅形体远离其他形体的那一条边界,剩下的形体边界均无法刻画。rtilt-Euler 法反演结果(图 5c)能够清晰刻画埋深较浅形体的边界位置,对于埋深较大的形体能够刻画部分边界;但受浅部形体异常的影响,随着形体顶面埋深的增加,反演结果的精度越来越差,因此在实际使用中应对异常做适当的分离。如果以 NVDR-THDR 对边缘位置进行约束,rtilt-Euler 法反演结果会集中在模型体的边缘位置。另外,相较于模型 A 和模型 B,模型 C 的反演结果较为复杂。tilt-Euler 法反演的结果虽然深度峰值较多(图 5b),但结合图 5a 可知,除了最浅的深度峰值外,其他的都是假峰值,与模型的边缘位置并不对应。改进后的 rtilt-Euler 法反演结果具有两个明显的深度峰值(图 5d),较浅的峰值(60~80 m)对应的是埋深最小的模型,较深的峰值(180~300 m)对应另外两个埋深较大模型。使用 NVDR-THDR 对边缘位置进行约束后,其反演结果(图 5f)具有四个深度峰值:

40~80 m、120~160 m、180~220 m、220~300 m。值分别对应第二个直立六面体的窄边和宽边;220~40~80 m 的深度峰值对应埋深最浅的直立六面体的边缘;120~160m 和 180~220 m 的两个深度峰

值分别对应第二个直立六面体的窄边和宽边;220~300 m 的深度峰值对应于埋深最大的直立六面体的边缘。



a、c、e 分别为 tilt-Euler、rtilt-Euler 以及使用 NVDR-THDR 约束的 rtilt-Euler 的反演结果;b、d、f 分别为 tilt-Euler、rtilt-Euler 以及使用 NVDR-THDR 约束的 rtilt-Euler 反演结果对应的分段直方图。

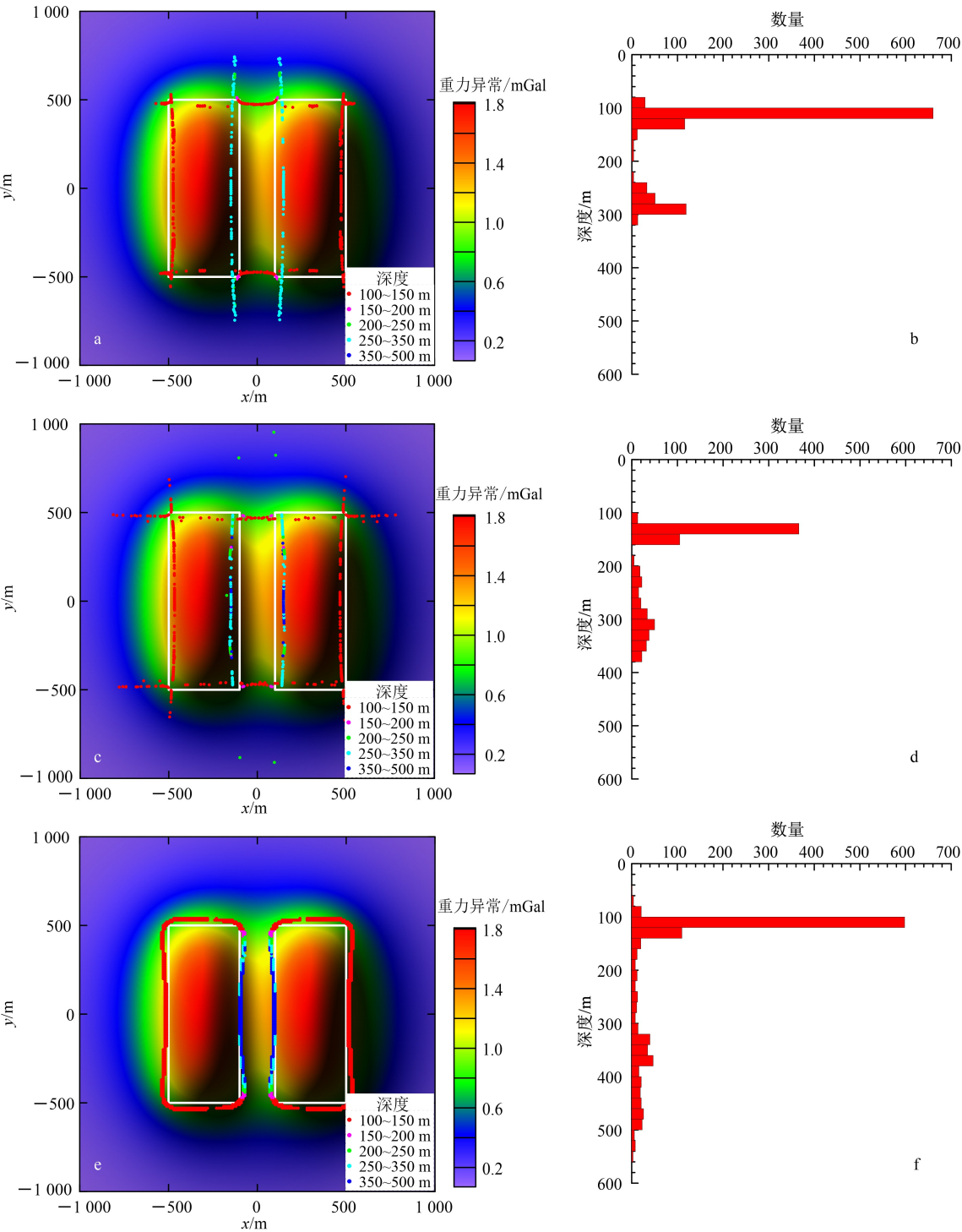
图 3 模型 A 的边缘深度反演结果及其分段直方图

Fig.3 Edge depth inversion results of Model A and its segmented histogram

3 实际资料处理

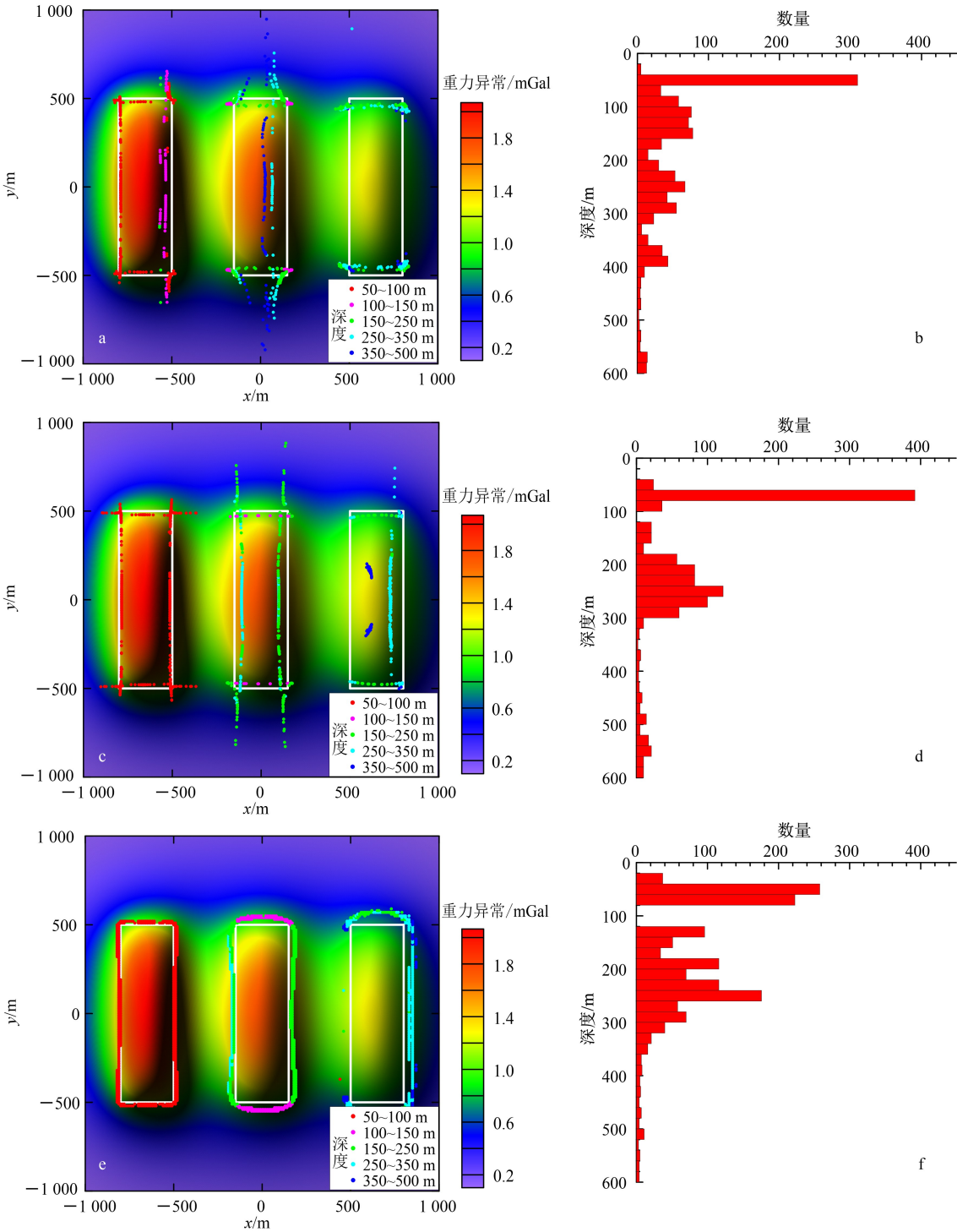
澳大利亚奥林匹克坝氧化铁铜金矿床(IOCg) Mount Isa Block 和 Gawler Craton<sup>[33]</sup>。奥林匹克坝

是澳大利亚价值最大的矿产出口源,矿产主要包括铁、金、铜和铀。澳大利亚有两个主要的 IOCg 省:



a、c、e 分别为 tilt-Euler、rttilt-Euler 以及使用 NVDR-THDR 约束的 rttilt-Euler 的反演结果;b、d、f 分别为 tilt-Euler、rttilt-Euler 以及使用 NVDR-THDR 约束的 rttilt-Euler 反演结果对应的分段直方图。

图 4 模型 B 的边缘深度反演结果及其分段直方图  
Fig.4 Edge depth inversion results of Model B and its segmented histogram



a、c、e 分别为 tilt-Euler、rtilt-Euler 以及使用 NVDR-THDR 约束的 rtilt-Euler 的反演结果；b、d、f 分别为 tilt-Euler、rtilt-Euler 以及使用 NVDR-THDR 约束的 rtilt-Euler 反演结果对应的分段直方图。

图 5 模型 C 的边缘深度反演结果及其分段直方图

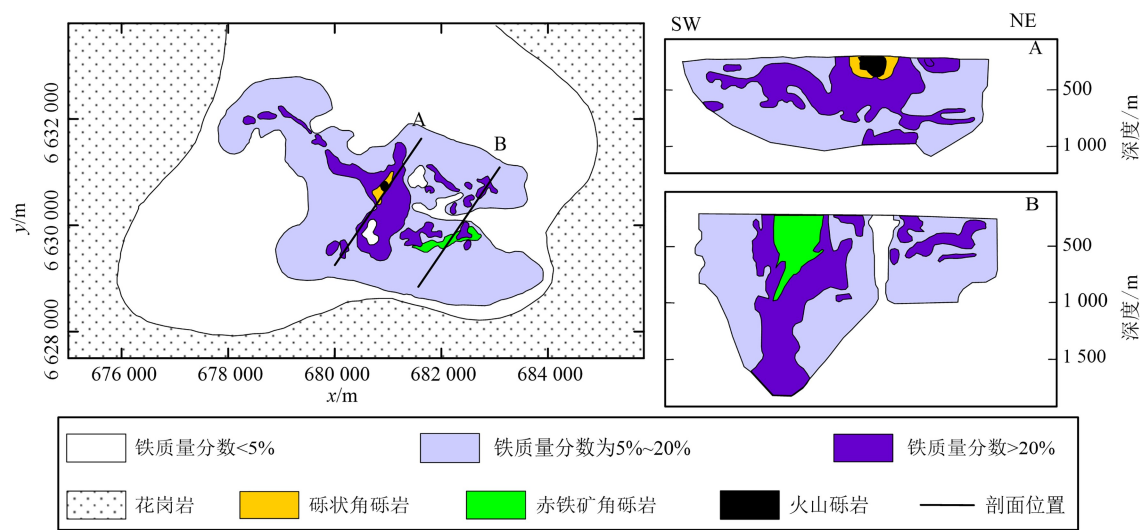
Fig.5 Edge depth inversion results of Model C and its segmented histogram

Cu - U - Au - Ag 矿床是太古宙—元古代 Gawler Craton 边缘的几个氧化铁铜金-铀(IOCG - U)矿床中最大的矿床,如图 6 所示<sup>[34]</sup>,Fe 矿床的平均深度为 0~1 000 m,最深部分达 1 500 m。奥林匹克坝与高重力异常有关,通常由大量赤铁矿角砾岩引起<sup>[33]</sup>。因此,基于重力异常可以反演该矿床的边缘

深度,对矿床储量评估提供参考。

研究区的布格重力异常(图 7a)来自于 SARIG (sarig.pir.sa.gov.au)。为了得到奥林匹克坝氧化铁铜金矿床引起的重力异常,本文使用最小曲率分离方法<sup>[35]</sup>对布格重力异常进行位场分离,得到研究区的剩余布格重力异常(图 7b),认为该重力异常是由奥林匹克坝氧化铁铜金矿床引起的。同时使用 NVDR-THDR 方法识别了该矿床的边缘位置。以 NVDR-THDR 方法识别结果作为约束,使用 rtilt-Euler 法反演矿体的边缘深度(图 8a)。反演结

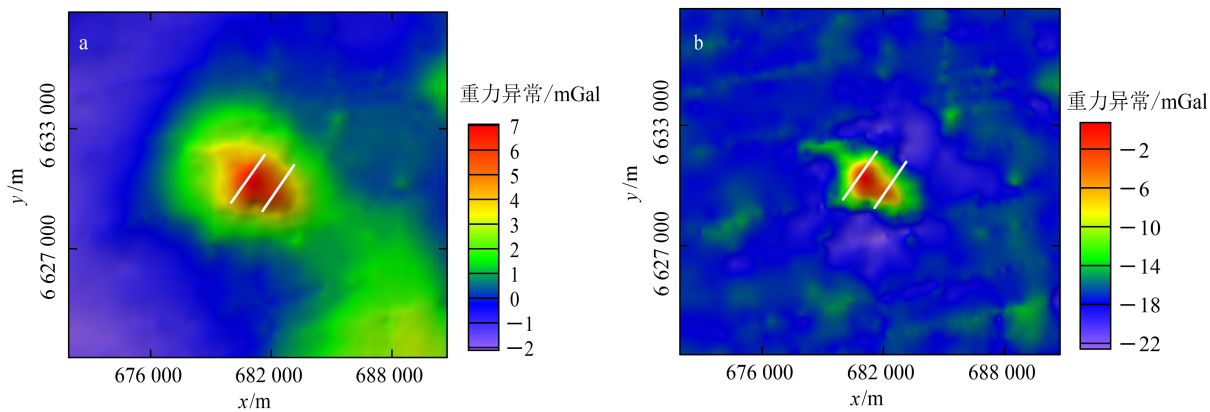
果显示氧化铁铜金矿床边缘深度主要集中在 0~200 m 之间,反演结果的分段直方图(图 8b)也显示深度主要集中在 0~100 m 和 100~200 m 这两个深度段内。图 6 中沉积物剖面受起始深度限制,显示的矿床顶面边缘深度在 200 m 左右;但根据剖面图中沉积物的形态,可以推测其在 200 m 以浅明显还有延伸。因此 rtilt-Euler 法反演矿体的边缘深度与实际情况相符,证明了该方法的有效性和正确性。



据文献[34]修编。

图 6 奥林匹克坝沉积物图

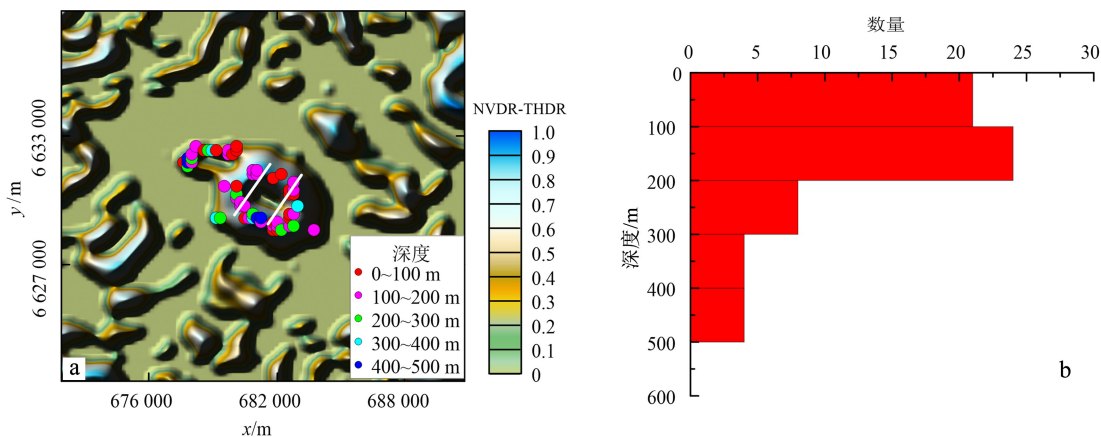
Fig.6 Olympic Dam sediments



a. 布格重力异常(数据来自于 SARIG (sarig.pir.sa.gov.au)); b. 剩余布格重力异常。

图 7 奥林匹克坝重力异常图

Fig.7 Gravity anomaly map of Olympic Dam



a. 使用 NVDR-THDR 方法做作约束的 rtilt-Euler 法边缘深度反演结果;b. 反演结果的分段直方图。

图 8 奥林匹克矿床 rtilt-Euler 法边缘深度反演结果及其分段直方图

Fig.8 Edge depth inversion results of Olympic deposit by rtilt-Euler method and its segmented histogram

4 结论与展望

根据模型试算和实际资料处理结果,本文得出以下几点结论:

1)对于单一直立六面体来说,tilt-Euler 法和 rtilt-Euler 法的反演结果基本相同;这是由于单一直立六面体在边界处不存在奇点,同时也证明了改进后的方法的正确性。为了消除奇点,引入的正则化因子通常情况下取 1 即可。

2)对于不同埋深的组合直立六面体来说,rtilt-Euler 法的反演结果明显优于 tilt-Euler 法。从深度的反演结果上来看,tilt-Euler 法仅能刻画埋深最浅形体远离其他形体的那一条边界,剩下的形体边界均无法刻画;rtilt-Euler 法反演结果能够清晰刻画埋深较浅形体的边界位置,对于埋深较大的形体也能刻画部分边界。另外,受浅部形体异常的影响,随着形体顶面埋深的增加,反演结果的精度越来越差,因此在实际应用中应对异常做适当的分离。

3)使用 NVDR-THDR 边缘识别方法对反演结果进行约束,无论是单一模型还是组合模型,边缘深度的反演结果都位于形体边界附近,剔除了形体边界以外的坏点,反演效果得到了改善。

模型试算和实际资料处理表明 rtilt-Euler 法反演边缘深度的结果优于 tilt-Euler 法,证明了该方法消除奇点的有效性。实际上边缘深度反演还存在许多问题,如数据源的适应性、方法的稳定性、解的筛选问题等,本文只是解决了 tilt-Euler 法的奇点问题和解的筛选问题,而数据源的适应性和方法的稳定

性问题本文并没有讨论,但这两个问题对边缘深度反演非常重要。因此在未来的研究工作中,应从理论模型的正演公式出发,研究不同输入数据的适应性和影响反演方法稳定性的因素,进而对边缘深度反演方法进行改进和创新。

参考文献(References):

[1] 赵强,管彦武,卢鹏羽,等. 基于归一化特征值的重磁数据边界识别方法及其在西藏古堆地热勘探中的应用[J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2023, 53(2): 578-588.  
Zhao Qiang, Guan Yanwu, Lu Pengyu, et al. Edge Detection Method of Gravity and Magnetic Data Based on Normalized Eigenvalue and Its Application of Geothermal Exploration in Gudui, Tibet[J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2023, 53(2): 578-588.  
[2] 鲁宝亮,苏子旺,赵志刚,等. 基于卫星重力异常的南海南部中生界反演[J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2023, 53(1): 261-273.  
Lu Baoliang, Su Ziwan, Zhao Zhigang, et al. Mesozoic Distribution Derived from Satellite Gravity Anomaly in the Southern South China Sea[J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2023, 53(1): 261-273.  
[3] Thompson D T. EULDPH: A New Technique for Making Computer Assisted Depth Estimates from Magnetic Data[J]. Geophysics, 1982, 47(1): 31-37.  
[4] Reid A B, Allsop J M, Granser H, et al. Magnetic Interpretation in Three Dimensions Using Euler

- Deconvolution[J]. *Geophysics*, 1990, 55(1): 80–91.
- [5] Keating P B. Weighted Euler Deconvolution of Gravity Data[J]. *Geophysics*, 1998, 63(5): 1595–1603.
- [6] Salem A, Ravat D. A Combined Analytic Signal and Euler Method (An-Eul) for Automatic Interpretation of Magnetic Data[J]. *Geophysics*, 2003, 68(6): 1952–1961.
- [7] 范美宁. 欧拉反褶积方法的研究与应用[D]. 长春: 吉林大学, 2006.
- Fan Meining. The Study and Application of Euler Deconvolution Method [D]. Changchun: Jilin University, 2006.
- [8] Fedi M, Florio G, Quarta T A M. Multi-Ridge Analysis of Potential Fields: Geometric Method and Reduced Euler Deconvolution[J]. *Geophysics*, 2009, 74(4): 53–65.
- [9] 马国庆, 孟令顺, 李丽丽. 龙门山及邻区断裂分布及地震前后断裂形态差异[J]. *吉林大学学报(地球科学版)*, 2012, 42(2): 519–525, 553.
- Ma Guoqing, Meng Lingshun, Li Lili. Fault Distribution of Longmenshan and Adjacent Regions and Fault Morphological Differences Before and After the Earthquake[J]. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)*, 2012, 42(2): 519–525, 553.
- [10] Reid A B, Ebbing J, Webb S J. Avoidable Euler Errors: The Use and Abuse of Euler Deconvolution Applied to Potential Fields [J]. *Geophysical Prospecting*, 2015, 62(5): 1162–1168.
- [11] Zhou W, Nan Z, Li J. Self-Constrained Euler Deconvolution Using Potential Field Data of Different Altitudes[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2016, 173(6): 2073–2085.
- [12] 姚刚, 董向欣, 李丽丽, 等. 东海陆架盆地构造划分的高精度重磁解释技术[J]. *吉林大学学报(地球科学版)*, 2018, 48(2): 517–524.
- Yao Gang, Dong Xiangxin, Li Lili, et al. High-Precision Gravity and Magnetic Interpretation Technique in Tectonic Division of East China Sea Shelf Basin[J]. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)*, 2018, 48(2): 517–524.
- [13] 乔中坤, 马国庆, 于平, 等. 基于欧拉反褶积法的无人机航磁找矿应用[J]. *吉林大学学报(地球科学版)*, 2021, 51(2): 552–560.
- Qiao Zhongkun, Ma Guoqing, Yu Ping, et al. Application of UAV Aeromagnetic Prospecting Based on Euler Deconvolution[J]. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)*, 2021, 51(2): 552–560.
- [14] Barbosa V C F, Silva J B C, Medeiros W E. Stability Analysis and Improvement of Structural Index Estimation in Euler Deconvolution[J]. *Geophysics*, 1999, 64(1): 48–60.
- [15] Fedi M. DEXP: A Fast Method to Determine the Depth and the Structural Index of Potential Fields Sources[J]. *Geophysics*, 2007, 72(1): I1–I11.
- [16] Melo F F, Barbosa V C F. Correct Structural Index in Euler Deconvolution Via Base-Level Estimates[J]. *Geophysics*, 2018, 83(6): J87–J98.
- [17] Hsu S K. Imaging Magnetic Sources Using Euler's Equation[J]. *Geophysical Prospecting*, 2010, 50(1): 15–25.
- [18] Salem A, Ravat D, Smith R, et al. Interpretation of Magnetic Data Using an Enhanced Local Wavenumber (ELW) Method[J]. *Geophysics*, 2005, 70(2): L7–L12.
- [19] Salem A, Williams S, Fairhead D, et al. Interpretation of Magnetic Data Using Tilt-Angle Derivatives[J]. *Geophysics*, 2008, 73(1): L1–L10.
- [20] Ma G. Combination of Horizontal Gradient Ratio and Euler (HGR-EUL) Methods for the Interpretation of Potential Field Data[J]. *Geophysics*, 2013, 78(5): J53–J60.
- [21] Cooper G R J, Whitehead R C. Determining the Distance to Magnetic Sources[J]. *Geophysics*, 2016, 81(2): J25–J34.
- [22] Cooper G R J. Determining the Depth and Location of Potential Field Sources Without Specifying the Structural Index[J]. *Arabian Journal of Geosciences*, 2017, 10(19): 438–445.
- [23] Rahman M M, Ullah S E. Constrained Interpretation of Aeromagnetic Data Using Tilt-Angle Derivatives from North-Western Part of Bangladesh[J]. *Global Advanced Research Journal of Engineering, Technology and Innovation*, 2013, 2(5): 196–204.
- [24] Khan S D, Fathy M S, Abdelazeem M. Remote Sensing and Geophysical Investigations of Moghra Lake in the Qattara Depression, Western Desert, Egypt[J]. *Geomorphology*, 2014, 207(1): 10–22.
- [25] Yandjimain J, Ndougsa-Mbarga T, Meying A, et al. Combination of Tilt-Angle and Euler Deconvolution Approaches to Determine Structural Features from Aeromagnetic Data Modeling over Akonolinga-Loum Area (Centre-East, Cameroon) [J]. *International Journal of Geosciences*, 2017, 8(7): 925–947.
- [26] 罗潇, 王彦国, 葛坤朋, 等. 基于方向 tilt-Euler 的三

维磁数据快速反演[J]. 地球物理学报, 2021, 64(6): 2127 - 2140.

Luo Xiao, Wang Yanguo, Ge Kunpeng, et al. Fast Inversion of 3D Magnetic Data Based on the Directional Tilt-Euler Method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2021, 64(6): 2127 - 2140.

[27] Liang H, Henglei Z, Sence S, et al. An Improved Tilt-Euler Deconvolution and Its Application on a Fe - Polymetallic Deposit [J]. Ore Geology Reviews, 2019, 114: 103114 - 103122.

[28] Wang W, Pan Y, Qiu Z. A New Edge Recognition Technology Based on the Normalized Vertical Derivative of the Total Horizontal Derivative for Potential Field Data[J]. Applied Geophysics, 2009, 6 (3): 226 - 233.

[29] 何涛, 王万银, 黄金明, 等. 正则化方法在比值类位场边缘识别方法中的研究[J]. 物探与化探, 2019, 43 (2): 308 - 319.

He Tao, Wang Wanyin, Huang Jinming, et al. The Research of the Regularization Method in the Ratio Methods of Edge Recognition by Potential Field[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2019, 43 (2): 308 - 319.

[30] Zhu Y, Wang W, Farquharson C G, et al. Normalized Vertical Derivatives in the Edge Enhancement of Maximum-Edge-Recognition Methods in Potential Fields[J]. Geophysics, 2021, 86(4): G23 - G34.

[31] Miller H G, Singh V. Potential Field Tilt: A New Concept for Location of Potential Field Sources[J]. Journal of Applied Geophysics, 1994, 32 (2/3): 213 - 217.

[32] Verduzco B, Fairhead J D, Green C M, et al. The Meter Reader-New Insights into Magnetic Derivatives for Structural Mapping[J]. The Leading Edge, 2004, 23(2): 116 - 119.

[33] Austin J, Foss C. Rich, Attractive and Extremely Dense; A Geophysical Review of Australian IOCGs [C]// ASEG Extended Abstracts. Brisbane: ASEG, 2012: 1 - 4.

[34] Kirchenbaur M, Maas R, Ehrig K, et al. Uranium and Sm Isotope Studies of the Supergiant Olympic Dam Cu - Au - U - Ag Deposit, South Australia[J]. Geochimica et Cosmochimica Acta, 2016, 180: 15 - 32.

[35] 纪晓琳, 王万银, 邱之云. 最小曲率位场分离方法研究[J]. 地球物理学报, 2015, 58(3): 1042 - 1058.

Ji Xiaolin, Wang Wanyin, Qiu Zhiyun. The Research to the Minimum Curvature Technique for Potential Field Data Separation [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2015, 58(3): 1042 - 1058.