華東理工大學学报 自然科学版 Natural Science Edition
JOURNAL OF EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

混合攻击下随机MIMO非线性CPSs的事件触发自适应逆最优控制

余宏岩 秦子佳 余昭旭 李树刚

Event-Triggered Adaptive Inverse Optimal Control for Stochastic MIMO Nonlinear CPSs under Hybrid Cyber-Attacks

YU Hongyan, QIN Zijia, YU Zhaoxu, LI Shugang

在线阅读 View online: http://doi.org/10.14135/j.cnki.1006-3080.20260203002

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

网络攻击下非线性CPSs的事件触发自适应控制

Event-Triggered Adaptive Control of Nonlinear Cyber-Physical Systems Under Network Attacks

华东理工大学学报（自然科学版）. 2024, 50(3): 411-417 http://doi.org/10.14135/j.cnki.1006-3080.20230518001

基于自适应事件触发的交通网络预测控制

Traffic Network Predictive Control Based on An Adaptive Event-Triggered Scheme

华东理工大学学报（自然科学版）. 2021, 47(3): 316-322 http://doi.org/10.14135/j.cnki.1006-3080.20191230002

基于周期事件触发的永磁同步电机滑模控制

Periodic Event-Triggered Sliding Mode Control of Permanent Magnet Synchronous Motor

华东理工大学学报（自然科学版）. 2022, 48(6): 832-840 http://doi.org/10.14135/j.cnki.1006-3080.20210702002

基于KL散度检测器下的最优线性欺诈攻击

Optimal Linear Deception Attack Based on KL Divergence Detector

华东理工大学学报（自然科学版）. 2021, 47(5): 627-634 http://doi.org/10.14135/j.cnki.1006-3080.20200802001

基于深度学习的工控系统网络攻击多分类检测

Multi-Class Detection of Cyber Attacks in Industrial Control Systems Based on Deep Learning

华东理工大学学报（自然科学版）. 2026, 52(2): 247-256 http://doi.org/10.14135/j.cnki.1006-3080.20250603001

一种基于事件触发的异构WSN分布式定位方法

An Event-Triggering Distributed Positioning Method of A Heterogeneous WSN

华东理工大学学报（自然科学版）. 2023, 49(4): 554-561 http://doi.org/10.14135/j.cnki.1006-3080.20220211001

扫码关注公众号，获取更多信息！

文章编号：1006-3080(2026)05-0705-08 DOI：10.14135/j.cnki.1006-3080.20260203002

混合攻击下随机 MIMO 非线性 CPSs 的事件触发自适应逆最优控制

余宏岩[1]， 秦子佳[1]， 余昭旭[1]， 李树刚[2]
（1. 华东理工大学能源化工过程智能制造教育部重点实验室，上海 200237；
2. 上海大学信息管理系，上海 200444）

摘要：本文针对混合网络攻击环境下的一类多输入多输出 (Multiple-Input Multiple-Output, MIMO) 随机非线性信息物理系统 (Cyber-Physical Systems, CPSs)，研究其事件触发自适应逆最优控制问题。拒绝服务攻击 (Denial-of-Service, DoS) 和欺骗攻击 (False Data Injection, FDI) 组成的混合网络攻击模型采用概率伯努利模型，贴近真实攻击模型。在 Backstepping 方法的基础上，通过结合逆最优设计和切换阈值的事件触发机制，本文提出了一种事件触发自适应最优控制策略。该控制策略适用于随机 MIMO 系统，保证闭环系统在概率意义下半全局一致最终有界。仿真结果验证了所提策略的有效性和可行性。

关键词：随机非线性 CPSs；混合网络攻击；事件触发；逆最优控制；MIMO

中图分类号：TP13 **文献标志码：**A

信息物理系统 (Cyber-Physical Systems, CPSs) 在智能电网、智慧城市、智能制造以及自动驾驶领域等被广泛应用，但其也面临着一系列挑战和威胁。网络安全问题是目前 CPSs 面临的重大挑战之一，其中拒绝服务攻击 (Denial-of-Service, DoS) 和欺骗攻击 (False Data Injection, FDI) 是主要的网络攻击类型[1]，亟须设计高效的安全控制策略以保障其稳定可靠运行。

目前关于网络攻击的研究取得了不少研究成果。针对 DoS 或者 FDI 单一攻击类型的研究，学者们可以很好地对攻击模型进行建模，并设计相应的控制策略，以削弱网络攻击给系统状态或者控制信号带来的影响[2-3]。其中文献 [2] 在未知传感器和执行器欺骗攻击下，设计事件触发的自适应神经网络安全跟踪控制方法。但实际系统通常受到混合形式的网络攻击。相较于单一的攻击类型，混合网络攻击情况下的 CPSs[4-6] 不仅面临系统状态无法获取的问题，而且控制输入信号也受到污染。文献 [4] 结合前人研究工作，解决开关时延非线性 CPS 的跟踪控制问题。文献 [5-6] 将混合网络攻击建模成概率模型，不仅简化模型，而且更接近现实不确定性。

此外，针对网络攻击的控制系统研究仍主要聚焦于严格或者非严格反馈的非线性系统。然而，针对一类高阶随机非线性系统，文献 [7] 考虑具有输出约束的概率有限时间稳定问题。文献 [8] 研究 MIMO 不确定随机非线性严格反馈系统，提出一种不测量状态自适应模糊输出反馈控制方法。但是，这些工作都未考虑网络攻击的影响。

综上所述，本文结合 Backstepping 与逆最优控制 (Inverse Optimal Control, IOC) 方法，提出网络攻击下 MIMO 随机非线性系统的事件触发最优安全自适应控制策略。与传统的严格反馈系统相比，本文聚焦于更复杂的大规模 MIMO系统，在保证系统安全稳定的同时兼顾性能优化，并构建更贴近实际的混合攻击模型以增强工程适用性。本文还引入事件触

收稿日期： 2026-02-03
基金项目： 国家自然科学基金（71871135）；广东省可再生能源重点实验室项目（E539kf0601）
作者简介： 余宏岩（2000—），男，江西人，硕士生，主要研究方向为信息物理系统安全控制。E-mail: Y30230965@mail.ecust.edu.cn
通信联系人： 余昭旭，E-mail: yyzx@ecust.edu.cn
引用本文： 余宏岩，秦子佳，余昭旭，等. 混合攻击下随机 MIMO 非线性 CPSs 的事件触发自适应逆最优控制 [J]. 华东理工大学学报（自然科学版），2026, 52(5): 705-712.
Citation: YU Hongyan, QIN Zijia, YU Zhaoxu, *et al*. Event-Triggered Adaptive Inverse Optimal Control for Stochastic MIMO Nonlinear CPSs under Hybrid Cyber-Attacks[J]. Journal of East China University of Science and Technology, 2026, 52(5): 705-712.

发机制与 IOC 相结合,在保证系统稳定性的同时降低控制通信负担。

1 准备工作

考虑如下形式的非线性 CPSs 模型:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = f(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}t + \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}w \tag{1}$$

其中,状态 $\boldsymbol{\xi}\in\mathrm{R}^m$, w 是 r 维的独立标准维纳过程。$f(\cdot)$: $\mathrm{R}^m\to\mathrm{R}^m$ 和 $h(\cdot)$: $\mathrm{R}^m\to\mathrm{R}^{m\times r}$ 是 Lipschitz 连续的非线性函数,且满足 $f(0)=0$ 和 $h(0)=0$。

本文控制设计与分析所用到的定义和引理见定义 1 及引理 1~7。

定义 1[9]: 对于任意函数 $V(\boldsymbol{\xi})$ 和系统 (1),微分算子 $\mathcal{L}$ 定义如下:

$$\mathcal{L}V(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{f} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{\xi}^2}\boldsymbol{h}\right\} \tag{2}$$

引理 1[8]: 对于任意 $\nu\in R$ 以及 $\tau>0$,不等式 $0\leqslant|\nu|-\nu\tanh\left(\frac{\nu}{\tau}\right)\leqslant 0.278\,5\tau$ 成立。

引理 2 (Young 不等式)[8]: 如果 $\upsilon>0$, $m>1$, $n>1$, 以及 $(m-1)(n-1)=1$,则对任意 $x\in R$, $y\in R$,不等式 $xy\leqslant\frac{\upsilon^m}{m}|x|^m+\frac{1}{n\upsilon^n}|y|^n$ 始终成立。

引理 3[9]: 对于 $r\in[0,w]$,如果连续标量函数 $\gamma(r)$ 严格单调递增,且 $\gamma(0)=0$,则 $\gamma(r)\in\mathcal{K}$ 类函数。当 $r\to\infty$ 时 $\gamma(r)\to\infty$,则 $\gamma(r)\in\mathcal{K}_\infty$ 类函数。对任意 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数 $\gamma(r)$ 及其导数 $\gamma'(r)$,有如下性质: (1) $\ell\gamma(r)=r(\gamma')^{-1}(r)-\gamma\left((\gamma')^{-1}(r)\right)=\int_0^r(\gamma')^{-1}(s)\mathrm{d}s\in\mathcal{K}_\infty$; (2) $\ell\ell\gamma=\gamma$; (3) $\ell\gamma(\gamma'(r))=r\gamma'(r)-\gamma(r)$。

引理 4[9]: 对于两个 n 维列向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$,不等式 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\leqslant\gamma(\|\boldsymbol{X}\|)+\ell\gamma(\|\boldsymbol{Y}\|)$ 成立。当且仅当 $\boldsymbol{X}=\gamma^{-1}(\|\boldsymbol{Y}\|)\frac{\boldsymbol{Y}}{\|\boldsymbol{Y}\|}$ 时等号成立。

引理 5[8]: 对定义在紧集 Ω 上的任意连续函数 $f(\boldsymbol{\xi})$,存在一个 FLS 函数 $\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\xi})$,使得 $\sup\limits_{\boldsymbol{\xi}\in\Omega}|f(\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\xi})|\leqslant\epsilon$,其中 $\epsilon>0$,权重向量 $\boldsymbol{\Theta}=[\boldsymbol{\Theta}_1,\boldsymbol{\Theta}_2,\cdots,\boldsymbol{\Theta}_N]^{\mathrm{T}}$,核向量 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\xi})=[s_1(\boldsymbol{\xi}),s_2(\boldsymbol{\xi}),\cdots,s_N(\boldsymbol{\xi})]^{\mathrm{T}}$,模糊基函数 $s_i(\boldsymbol{\xi})$ 选取高斯函数, N 为模糊规则数。

基于引理 5,任意未知连续函数 $f(\boldsymbol{\xi})$ 可表示为 $f(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\xi})+\Xi(\boldsymbol{\xi})$,且 $|\Xi(\boldsymbol{\xi})|\leqslant\epsilon$,其中 $\Xi(\boldsymbol{\xi})$ 为估计误差。

引理 6[10]: 对任意 $\tau\in R$ 和常数 $\sigma>0$,恒有 $\lim\limits_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\tanh^2(\tau/\sigma)=0$。

引理 7[10]: 对任意 $m>0$,对于变量 $\tau\notin\boldsymbol{\Theta}:=\{\tau\in\mathrm{R}\,|\,|\tau|\leqslant 0.881\,4m\}$, 不等式 $1-2\tanh^2(\tau/m)\leqslant 0$ 恒成立。

2 问题描述

考虑如下方程描述的 MIMO 随机非线性系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i=(\boldsymbol{x}_{i+1}+\boldsymbol{f}_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)+\boldsymbol{d}_i)\mathrm{d}t+\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}}_i)\mathrm{d}w,\ i=1,2,\cdots,n-1\\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}_n=(\boldsymbol{u}_a+\boldsymbol{f}_n(x)+\boldsymbol{d}_n)\mathrm{d}t+\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{d}w\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_1\end{cases} \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{y}\in\mathrm{R}^m$, $\boldsymbol{x}_i=[x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im}]^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^m(i=1,2,\cdots,n)$ 分别是系统输出和状态变量;定义 $\bar{\boldsymbol{x}}_i=[x_1,x_2,\cdots,x_i]^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{mi}$, $\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_n$。 $\boldsymbol{u}_a$ 表示遭受攻击后的系统输入。此外, $\boldsymbol{f}_i(\cdot)\in\mathrm{R}^m$ 和 $\boldsymbol{h}_i(\cdot)\in\mathrm{R}^{mr}(i=1,\cdots,n)$ 为未知光滑函数; $\boldsymbol{d}_i\in\mathrm{R}^m(i=1,\cdots,n)$ 表示未知有界干扰,且满足 $\|\boldsymbol{d}\|\leqslant\bar{\boldsymbol{d}}$。

假设 1: 类似于文献[5-6],传感器到控制器传输信道发生如下混合攻击:

$$\boldsymbol{y}_a=\boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{p}(t))\boldsymbol{q}(t)\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{x}_1) \tag{4}$$

其中,FDI 攻击信号 $\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{x}_1)\in\mathrm{R}^m$ 满足 $\|\boldsymbol{\varrho}(\boldsymbol{x}_1)\|\leqslant c_1\|\boldsymbol{x}_1\|+\iota$, 常数 $c_1>0,\iota>0$。矩阵 $\boldsymbol{I}$ 为相对应维数的单位阵。系数 $\boldsymbol{p}(t)=\mathrm{diag}\{p_1(t),p_2(t),\cdots,p_m(t)\}\in\mathrm{R}^m$, $\boldsymbol{q}(t)=\mathrm{diag}\{q_1(t),q_2(t),\cdots,q_m(t)\}\in\mathrm{R}^m$, 其中 $\boldsymbol{p}_i(t)$、$\boldsymbol{q}_i(t)(i=1,\cdots,m)$ 遵循伯努利分布,决定 FDI 或 DoS 攻击是否发生,即

$$\begin{cases}\Pr\{p_i(t)=1\}=p_i,\ \Pr\{p_i(t)=0\}=1-p_i\\ \Pr\{q_i(t)=1\}=q_i,\ \Pr\{q_i(t)=0\}=1-q_i\end{cases} \tag{5}$$

于是对应有 $\boldsymbol{p}=\mathrm{diag}\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$ 和 $\boldsymbol{q}=\mathrm{diag}\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$。

假设 2: 控制器到执行器传输信道发生 FDI 攻击,表示为 $\boldsymbol{u}_a=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\psi}_a(x,t)$, 其中 $\boldsymbol{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)=\delta(t)\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}),|\delta(t)|\leqslant\bar{\delta}$, 常数 $\bar{\delta}>0$,且 $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x})\in\mathrm{R}^m$ 为未知连续函数。

3 控制器设计

观测器采用如下设计:

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_i=\hat{\boldsymbol{x}}_{i+1}+\boldsymbol{l}_i(\boldsymbol{y}_a-\hat{\boldsymbol{y}}),\ i=1,2,\cdots,n-1\\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_n=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{l}_n(\boldsymbol{y}_a-\hat{\boldsymbol{y}})\\ \hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{x}}_1\end{cases} \tag{6}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{x}}_i\in\mathrm{R}^m$, $\bar{\hat{\boldsymbol{x}}}_i=[\hat{\boldsymbol{x}}_1,\cdots,\hat{\boldsymbol{x}}_i]^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{mi}$ 和 $\boldsymbol{l}_i=\mathrm{diag}\{l_{i1},l_{i2},\cdots,l_{im}\}\in\mathrm{R}^{m\times m}$。

定义观测误差: $\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{x}_i-\hat{\boldsymbol{x}}_i\in\mathrm{R}^m$, $\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n]^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{mn}$, 由式 (3)、(6) 可得:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}=(A\boldsymbol{e}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{d}+L\boldsymbol{y}_a)\mathrm{d}t+H(\boldsymbol{x})\mathrm{d}w \tag{7}$$

其中, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=[f_1,f_2,\cdots,f_n+\boldsymbol{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)]^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{mn}$, $H(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}},$

$\boldsymbol{h}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{h}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{mn}$, $\boldsymbol{d}=[d_1,\cdots,d_n]^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{mn}$, $\boldsymbol{L}=[-l_1,-l_2,\cdots,-l_n]^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{mn\times m}$, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-l_1 & \\ \vdots & \boldsymbol{I}_{n-1}\\ -l_n & 0\cdots 0\end{bmatrix}$。

选择合适的一组参数 $l_i(i=1,2,\cdots,n)$, 以保证矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 Hurwitz, 则给定正定矩阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$, 存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}$。

定义 $\hat{\boldsymbol{x}}=[\hat{\boldsymbol{x}}_1,\hat{\boldsymbol{x}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{x}}_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{X}=[\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{e}]^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{2mn}$, 结合式 (6) 和 (7) 可以得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})\mathrm{d}t+\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{u}\mathrm{d}t+\boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{X})\mathrm{d}w \tag{8}$$

其中, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=[A\hat{\boldsymbol{x}}+L\boldsymbol{y}_a,F_1]^{\mathrm{T}},F_1=A\boldsymbol{e}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+d+L\boldsymbol{y}_a$, $\boldsymbol{G}_1=[0_{(n-1)m\times m},I_{m\times m},0_{nm\times m}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{X})=[\underbrace{0,\cdots,0}_{mn},\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}$。

定义未知常数 $\theta=\max\{\theta_0,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$, 其中 $\theta_i(i=0,1,\cdots,n)$ 稍后给出。并采用如下坐标变换:

$$\begin{cases}\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{z}_i=\hat{\boldsymbol{x}}_i-\boldsymbol{\chi}_{i-1},\ i=2,3,\cdots,n\\ \breve{\boldsymbol{z}}_1=\hat{\boldsymbol{y}}\end{cases} \tag{9}$$

Step 0: 选取李雅普诺夫函数为 $V_0=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}$, 于是

$$\mathrm{E}[\mathcal{L}V_0]=\mathrm{E}\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+d)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H})\right]+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}\mathrm{E}[\boldsymbol{y}_a] \tag{10}$$

处理式 (10) 中的部分项:

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+d)\leqslant\frac{2\kappa_1+\kappa_2}{2}\|\boldsymbol{e}\|^2+\frac{1}{2\kappa_1}\|\boldsymbol{P}\|^2\left(\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{f}_i\|^2+\bar{\delta}^2\|\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x})\|^2\right)+\frac{1}{2\kappa_2}\|\boldsymbol{P}\|^2\bar{d}^2 \tag{11}$$

由于 $\|\varrho(\boldsymbol{x}_1)\|\leqslant c_1\|\boldsymbol{x}_1\|+\iota$, 于是

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}\mathrm{E}[\boldsymbol{y}_a]=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}\varrho(\boldsymbol{x}_1)\leqslant\frac{\kappa_3+\kappa_4}{2}\|\boldsymbol{e}\|^4+\Upsilon(\boldsymbol{x}_1) \tag{12}$$

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H})\leqslant\|\boldsymbol{P}\|\cdot\|\boldsymbol{H}\|^2\leqslant\frac{\kappa_5}{2}\|\boldsymbol{P}\|^2+\frac{1}{2\kappa_5}\|\boldsymbol{H}\|^4 \tag{13}$$

其中 $\Upsilon(\boldsymbol{x}_1)=\frac{1}{2\kappa_3}\|\boldsymbol{p}\|^2\|\boldsymbol{P}\|^2\|\boldsymbol{L}\|^2\|\boldsymbol{x}_1\|^2+\frac{1}{2\kappa_4}\|\boldsymbol{P}\|^2\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}\|^2\|\boldsymbol{L}\|^2[c_1\|\boldsymbol{x}_1\|+\iota]^2$, 且常数 $\kappa_i>0,i=1,2,3,4,5$。

采用 FLS 逼近未知非线性函数 $\boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{Z}_0)=\frac{1}{2\kappa_1}\|\boldsymbol{P}\|^2\left(\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{f}_i\|^2+\bar{\delta}^2\|\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x})\|^2\right)+\Upsilon(x_1)+\frac{1}{2\kappa_5}\|\boldsymbol{H}\|^4$, 可得 $\boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{Z}_0)=\boldsymbol{\Theta}_0^{\mathrm{T}}S_0(\boldsymbol{Z}_0)+\mathcal{E}_0(\boldsymbol{Z}_0),|\mathcal{E}_0(\boldsymbol{Z}_0)|\leqslant\varepsilon_0$, 其中常数 $\varepsilon_0>0$, $\boldsymbol{Z}_0=[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\Theta}_0\in\mathrm{R}^N,S_0(\boldsymbol{Z}_0)\in\mathrm{R}^N$。进一步利用性质 $\|S_0(\boldsymbol{Z}_0)\|\leqslant1$ 可得:

$$\boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{Z}_0)\leqslant\|\boldsymbol{\Theta}_0\|\|S_0(\boldsymbol{Z}_0)\|+|\mathcal{E}_0(\boldsymbol{Z}_0)|\leqslant\theta_0+\varepsilon_0\leqslant\theta+\varepsilon_0 \tag{14}$$

其中, $\theta_0=\|\boldsymbol{\Theta}_0\|$。

将式 (11)~(14) 代入式 (10), 可得:

$$\mathrm{E}(\mathcal{L}V_0)\leqslant-\alpha_0E[\|\boldsymbol{e}\|^2]+\beta_0 \tag{15}$$

其中 $\alpha_0=\lambda_{\min}(Q)-\frac{1}{2}(2\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4),\beta_0=\frac{1}{2\kappa_1}\|\boldsymbol{P}\|^2\bar{d}^2+\frac{\kappa_5}{2}\|\boldsymbol{P}\|^2+\theta+\varepsilon_0$。

Step 1: 基于坐标变换 (9), 可以得到:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{z}_1=(\boldsymbol{x}_2+f_1(\bar{\boldsymbol{x}}_1)+\mathrm{d}_1)\mathrm{d}t+\boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{w} \tag{16}$$

定义李雅普诺夫函数 $V_1=V_0+\frac{1}{2}\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_1+\frac{1}{2}\tilde{\theta}^2$, 其中 $\tilde{\theta}=\hat{\theta}-\theta$, $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计值。

于是

$$E[\mathcal{L}V_1]=\mathrm{E}[\mathcal{L}V_0]+\mathrm{E}\left[\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}(e_2+\boldsymbol{z}_2+\chi_1+f_1(\bar{\boldsymbol{x}}_1)+d_1)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_1)-\tilde{\theta}\dot{\hat{\theta}}\right] \tag{17}$$

由 Young 不等式得:

$$\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_2\leqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}_1\|^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}_2\|^2\leqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}_1\|^2+\frac{1}{4}\|\boldsymbol{z}_2\|^4+\frac{1}{4} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}(e_1+d_1)\leqslant\|\boldsymbol{z}_1\|^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{e}\|^2+\frac{1}{2}\bar{d}^2 \tag{19}$$

$$\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}f_1(\boldsymbol{x}_1)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}}h_1)\leqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}_1\|^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{f}_1\|^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{h}_1\|^2 \tag{20}$$

采用 FLS 逼近非线性函数 $\boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{Z}_1)=\frac{\breve{\boldsymbol{z}}_1}{\|\breve{\boldsymbol{z}}_1\|^2}\tanh^2\left(\frac{\|\breve{\boldsymbol{z}}_1\|}{\varsigma_{11}}\right)(\|\boldsymbol{f}_1\|^2+\|\boldsymbol{h}_1\|^2)+\Xi(\boldsymbol{Z}_1)$, 函数 $\Xi(\boldsymbol{Z}_1)$ 稍后给出, 常数 $\varsigma_{11}>0$。可得 $\boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{Z}_1)=\boldsymbol{\Theta}_1^{\mathrm{T}}S_1(\boldsymbol{Z}_1)+\mathcal{E}_1(\boldsymbol{Z}_1)$, $\|\mathcal{E}_1(\boldsymbol{Z}_1)\|\leqslant\epsilon_1$, 其中常数 $\epsilon_1>0$, $\boldsymbol{Z}_1=[\hat{\theta},\hat{\boldsymbol{x}}_1,\boldsymbol{x}_1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\Theta}_1\in\mathrm{R}^{N\times m}$, $S_1(\boldsymbol{Z}_1)\in\mathrm{R}^N$ 且 $\|S_1(\boldsymbol{Z}_1)\|\leqslant1$。因此

$$\begin{aligned}\breve{\boldsymbol{z}}_1^{\mathrm{T}}\Lambda_1(\boldsymbol{Z}_1)&=\breve{\boldsymbol{z}}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Theta}_1^{\mathrm{T}}S_1(\boldsymbol{Z}_1)+\mathcal{E}_1(\boldsymbol{Z}_1))\leqslant\\ &\frac{1}{2}\theta_1\left\|\breve{\boldsymbol{z}}_1\right\|^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}{\epsilon_1}^2\leqslant\\ &\frac{1}{2}\theta\left\|\breve{\boldsymbol{z}}_1\right\|^2+\frac{1}{2}{\epsilon_1}^2+\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{21}$$

其中, $\theta_1=\|\boldsymbol{\Theta}_1\|^2+1$。

选取虚拟控制率

$$\chi_1=-(k_1+\frac{5}{2})\breve{\boldsymbol{z}}_1-\frac{1}{2}\hat{\theta}\breve{\boldsymbol{z}}_1。 \tag{22}$$

其中, 设计参数 $k_1>0$。

又由于:

$$-(k_1+\frac{5}{2})\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\breve{\boldsymbol{z}}_1\leqslant\frac{1}{2}(k_1+\frac{5}{2})^2\|\boldsymbol{e}\|^2-(k_1+2)\|\boldsymbol{z}_1\|^2, \tag{23}$$

$$-\frac{1}{2}\hat{\theta}\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\breve{\boldsymbol{z}}_1\leqslant-\frac{1}{2}\hat{\theta}\left\|\breve{\boldsymbol{z}}_1\right\|^2+\frac{\|\boldsymbol{e}\|^2}{2}+\frac{\hat{\theta}^2}{8}\left\|\breve{\boldsymbol{z}}_1\right\|^2 \tag{24}$$

定义 $\Xi(\boldsymbol{Z}_1):=\frac{\hat{\theta}^2}{8}\breve{\boldsymbol{z}}_1$。整理式 (18)~(24), 代入式 (17) 可得:

$$\mathrm{E}[\mathcal{L}V_1]\leqslant\mathrm{E}[-\alpha_1\|\boldsymbol{e}\|^2-k_1\|\boldsymbol{z}_1\|^2+\frac{1}{4}\|\boldsymbol{z}_2\|^4-\tilde{\theta}(\dot{\hat{\theta}}-\frac{1}{2}\left\|\breve{\boldsymbol{z}}_1\right\|^2)]+\beta_1 \tag{25}$$

其中, $\alpha_1=\alpha_0-\frac{1}{2}(k_1+\frac{5}{2})^2-1$, $\beta_1=\beta_0+\frac{1}{2}\bar{d}^2+\frac{1}{2}\epsilon_1^2+0.75$。

Step i ($i=2,3,\cdots,n-1$): 基于坐标变换 (9), 可以得到:

$$\mathrm{d}z_i=(\chi_i+z_{i+1}+l_i(y_a-\hat{y})-\mathcal{L}\chi_{i-1})\mathrm{d}t \tag{26}$$

其中, $\mathcal{L}\chi_{i-1}=\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\chi_{i-1}}{\partial\hat{x}_j}\dot{\hat{x}}_j+\frac{\partial\chi_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}$。

定义李雅普诺夫函数: $V_i=V_{i-1}+\frac{1}{2}(z_i^{\mathrm{T}}z_i)^2$, 计算:

$$\mathrm{E}[\mathcal{L}V_i]=\mathrm{E}[\mathcal{L}V_{i-1}]+\mathrm{E}[2\|z_i\|^2z_i^{\mathrm{T}}(\chi_i+z_{i+1}+l_i(\mathrm{E}[y_a]-\hat{y})-\mathcal{L}\chi_{i-1})] \tag{27}$$

由 Young 不等式及引理 1 得:

$$2\|z_i\|^2z_i^{\mathrm{T}}z_{i+1}\leqslant 2\|z_i\|^3\|z_{i+1}\|\leqslant\frac{3}{2}\|z_i\|^4+\frac{1}{2}\|z_{i+1}\|^4 \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&2\|z_i\|^2z_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_i(\mathrm{E}[\boldsymbol{y}_a]-\hat{\boldsymbol{y}})=\\&\quad 2\|z_i\|^2z_i^{\mathrm{T}}l_i[(\boldsymbol{p}-I)\boldsymbol{x}_1+(I-p)q\varrho(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{e}_1]\leqslant\\&\quad 2\|z_i\|^2z_i^{\mathrm{T}}l_i(\boldsymbol{p}-I)\boldsymbol{x}_1\tanh\frac{2\|z_i\|^2z_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_i(\boldsymbol{p}-I)\boldsymbol{x}_1}{\varsigma_{i1}}+\\&\quad 0.278\,5\varsigma_{i1}+\|l_i\|^2\|z_i\|^6+\\&\quad\|\boldsymbol{e}\|^2+\varsigma_{i2}\|z_i\|^2z_i^{\mathrm{T}}z_i\|z_i\|^2\|\boldsymbol{l}_i(I-\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}\|^2(c_1\|\boldsymbol{x}_1\|+\iota)^2+\frac{1}{\varsigma_{i2}}\end{aligned} \tag{29}$$

其中, 常数 $\varsigma_{i1},\varsigma_{i2}>0$。

采用 FLS 函数逼近 $\Lambda_i(\boldsymbol{Z}_i)=l_i(\boldsymbol{p}-I)\boldsymbol{x}_1\tanh\frac{2\|z_i\|^2z_i^{\mathrm{T}}l_i(\boldsymbol{p}-I)\boldsymbol{x}_1}{\varsigma_{i1}}+\varsigma_{i2}z_i\|z_i\|^2\|\boldsymbol{l}_i(I-\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}\|^2(c_1\|\boldsymbol{x}_1\|+\iota)^2+\frac{1}{2}\|l_i\|^2\|z_i\|^2z-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\chi_{i-1}}{\partial\hat{x}_j}\dot{\hat{x}}_j-M_i(\boldsymbol{Z}_i)$, 可得$\Lambda_i(\boldsymbol{Z}_i)=\boldsymbol{\Theta}_i^{\mathrm{T}}S_i(\boldsymbol{Z}_i)+\mathcal{E}_i(\boldsymbol{Z}_i)$, $\boldsymbol{Z}_i=[\hat{\theta},\boldsymbol{x}_1,\hat{\boldsymbol{x}}_1,\cdots,\hat{\boldsymbol{x}}_i]^{\mathrm{T}}$, $M_i(\boldsymbol{Z}_i)$ 稍后定义, $\boldsymbol{\Theta}_i\in\mathrm{R}^{N\times m}$, $S_i(\boldsymbol{Z}_i)\in\mathrm{R}^N$ 和 $\|\mathcal{E}_i(\boldsymbol{Z}_i)\|\leqslant\epsilon_i$。

$$\begin{aligned}&2\|z_i\|^2z_i^{\mathrm{T}}\Lambda_i(\boldsymbol{Z}_i)=2\|z_i\|^2z_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Theta}_i^{\mathrm{T}}S_i(\boldsymbol{Z}_i)+\mathcal{E}_i(\boldsymbol{Z}_i))\leqslant\\&\frac{3}{2}\theta_i\|z_i\|^4+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\|z_i\|^4+\frac{1}{2}\epsilon_i^4\leqslant\frac{3}{2}\theta\|z_i\|^4+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\|z_i\|^4+\frac{1}{2}\epsilon_i^4\end{aligned} \tag{30}$$

其中, $\theta_i=\|\boldsymbol{\Theta}_i\|^{\frac{4}{3}}$。

选取虚拟控制率

$$\chi_i=-(k_i+\frac{7}{4})z_i-\frac{3}{4}\hat{\theta}z_i \tag{31}$$

其中, 设计参数 $k_i>0$。

代入式 (28)~(31) 至 (27), 可得:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathcal{L}V_i]\leqslant&-\mathrm{E}[\alpha_i\|\boldsymbol{e}\|^2-k_1\|z_1\|^2-\sum_{j=2}^{i}2k_j\|z_j\|^4+\frac{1}{2}\|z_{i+1}\|^4-\\&\tilde{\theta}\left(\dot{\hat{\theta}}-\frac{1}{2}\|\breve{z}\|^2-\frac{3}{2}\sum_{j=2}^{i}\|z_j\|^4\right)+\\&\sum_{j=2}^{i}z_j^{\mathrm{T}}\left(M_j-\frac{\partial\chi_{j-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right)]+\beta_i\end{aligned} \tag{32}$$

其中, $\alpha_i=\alpha_{i-1}-1,\beta_i=\beta_{i-1}+0.2785\varsigma_{i1}+\frac{1}{\varsigma_{i2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\epsilon_i^4$。

Step n : 基于坐标变换 (9), 可以得到:

$$\mathrm{d}z_n=(u+l_n(y_a-\hat{y})-\mathcal{L}\chi_{n-1})\mathrm{d}t \tag{33}$$

其中, $\mathcal{L}\chi_{n-1}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\chi_{n-1}}{\partial\hat{x}_j}\dot{\hat{x}}_j+\frac{\partial\chi_{n-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}$。

定义李雅普诺夫函数: $V_n=V_{n-1}+\frac{1}{2}(z_n^{\mathrm{T}}z_n)^2$, 计算得:

$$\mathrm{E}[\mathcal{L}V_n]=\mathrm{E}[\mathcal{L}V_{n-1}]+\mathrm{E}\left[2\|z_n\|^2z_n^{\mathrm{T}}(u+l_n(\mathrm{E}(y_a)-\hat{y})-\mathcal{L}\chi_{n-1})\right] \tag{34}$$

类似于式 (29):

$$\begin{aligned}&2l_n\|z_n\|^2z_n^{\mathrm{T}}(\mathrm{E}(\boldsymbol{y}_a)-\hat{\boldsymbol{y}})\leqslant 2\|z_n\|^2z_n^{\mathrm{T}}l_n(\boldsymbol{p}-I)\boldsymbol{x}_1\\&\tanh\left(\frac{2\|z_n\|^2z_n^{\mathrm{T}}l_n(\boldsymbol{p}-I)\boldsymbol{x}_1}{\varsigma_{n1}}\right)+0.278\,5\varsigma_{n1}+\frac{1}{\varsigma_{n2}}+\|\boldsymbol{e}\|^2+\\&\|l_n\|^2\|z_n\|^6+\varsigma_{n2}\|z_n\|^2z_n^{\mathrm{T}}z_n\|z_n\|^2\|l_n(I-\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}\|^2(c_1\|\boldsymbol{x}_1\|+\iota)^2\end{aligned} \tag{35}$$

其中, 常数 $\varsigma_{ni}>0,i=1,2$。

采用 FLS 函数逼近 $\Lambda_n(\boldsymbol{Z}_n)=l_n(\boldsymbol{p}-I)\boldsymbol{x}_1\tanh\left(\frac{2\|z_n\|^2z_n^{\mathrm{T}}l_n(\boldsymbol{p}-I)\boldsymbol{x}_1}{\varsigma_{n1}}\right)+\varsigma_{n2}z_n\|z_n\|^2\|l_n(I-\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}\|^2(c_1\|\boldsymbol{x}_1\|+\iota)^2+\frac{1}{2}\|l_n\|^2\|z_n\|^2z_n-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\chi_{n-1}}{\partial\hat{x}_j}\dot{\hat{x}}_j-M_n(\boldsymbol{Z}_n)$, 其中 $M_n(\boldsymbol{Z}_n)$ 稍后给出。可得 $\Lambda_n(\boldsymbol{Z}_n)=\boldsymbol{\Theta}_n^{\mathrm{T}}S_n(\boldsymbol{Z}_n)+\mathcal{E}_n(\boldsymbol{Z}_n)$, 其中 $\boldsymbol{Z}_n=[\hat{\theta},\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n,\hat{\boldsymbol{x}}_1,\cdots,\hat{\boldsymbol{x}}_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Theta}_n\in\mathrm{R}^{N\times m}$, $S_n(\boldsymbol{Z}_n)\in\mathrm{R}^{N\times m}$ 和 $\|\mathcal{E}_n(\boldsymbol{Z}_n)\|\leqslant\epsilon_n$, 常数 $\epsilon_n>0$。于是

$$\begin{aligned}&2\|z_n\|^2z_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_n(z_n)\leqslant\frac{3}{2}\theta_n\|z_n\|^4+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\|z_n\|^4+\frac{1}{2}\epsilon_n^4\leqslant\\&\quad\frac{3}{2}\theta\|z_n\|^4+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\|z_n\|^4+\frac{1}{2}\epsilon_n^4\end{aligned} \tag{36}$$

其中, $\theta_n=\|\boldsymbol{\Theta}_n\|^{4/3}$。

选取控制输入 $\boldsymbol{u}=\varpi(t_k),\forall t\in[t_k,t_{k+1}]$, 其中

$$\varpi(t)=-\mathcal{R}(\hat{\theta})z_n=-(1+\rho)\left[(k_n+\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\hat{\theta})z_n\right] \tag{37}$$

其中, $\mathcal{R}(\hat{\theta})=(1+\rho)(k_n+\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\hat{\theta})$, 设计参数 $k_n>0$。对于常数 $\omega>0$, 定义 $\hat{\theta}$ 的自适应率为:

$$\dot{\hat{\theta}}=-\omega\hat{\theta}+\frac{1}{2}\|\breve{z}_1\|^2+\frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n}\|z_j\|^4 \tag{38}$$

采样时刻满足 $t_{k+1}=\inf\{t\geqslant t_k|\|\boldsymbol{s}(t)\|\geqslant\rho\,\mathrm{Sat}(\|\boldsymbol{u}(t)\|)+m\},\rho\in(0,1),m>0,\boldsymbol{s}(t)=\varpi(t)-\boldsymbol{u}(t)$, 饱和函数 $\mathrm{Sat}(p)=\mathrm{sign}(p)\min\{|p|,D_1\}$, 常数 $D_1>0$。有 $\mathrm{Sat}(\|\boldsymbol{u}(t)\|)=D_1\tanh(\frac{\|\boldsymbol{u}(t)\|}{D_1})+\Re(t)=\rho_u(t)\|\boldsymbol{u}(t)\|+\Re(t)$, 其中 $\rho_u(t)=\mathrm{sech}^2\left(\frac{\varsigma_u\|\boldsymbol{u}\|}{D_1}\right)\in(0,1)$。于是 $\Re(t)=\mathrm{Sat}(\|\boldsymbol{u}(t)\|)-D_1\tanh\left(\frac{\|\boldsymbol{u}(t)\|}{D_1}\right),|\Re(t)|\leqslant D=D_1(1-\tanh(1))$。可推出 $\varpi(t)=(1+\rho\Phi(t))\boldsymbol{u}(t)+\varphi_2(t)(\rho\Re(t)+m)I$, $\forall t\in[t_k,t_{k+1}]$, 其中 $\Phi(t)=\rho_u(t)\varphi_1(t),|\varphi_i(t)|\leqslant 1,i=1,2$。进一步可得[11-13]:

$$\boldsymbol{u}(t)=\frac{\varpi(t)}{1+\rho\Phi(t)}-\frac{\varphi_2(t)(\rho\Re(t)+m)I}{1+\rho\Phi(t)} \tag{39}$$

结合式 (37) 和 (39) 可得:

$$2\|\boldsymbol{z}_n\|^2\boldsymbol{z}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(t)\leqslant-2\left[(k_n+1+\frac{3}{4}\hat{\theta})\|\boldsymbol{z}_n\|^4\right]+\frac{\eta^4}{2} \tag{40}$$

其中, 常数 $\eta=\dfrac{\rho D+m}{1-\rho}$。

定义

$$\begin{aligned}M_i(\boldsymbol{Z}_i)=&-\omega\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}+\frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\left\|\tilde{\boldsymbol{z}}_1\right\|^2+\\&\frac{3}{2}\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\sum_{j=2}^{i-1}\left\|\boldsymbol{z}_j\right\|^4+\frac{3}{2}\|\boldsymbol{z}_i\|^2\boldsymbol{z}_i\sum_{j=2}^{i}\boldsymbol{z}_j^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_{j-1}}{\partial\hat{\theta}},\\&i=2,3,\cdots,n\end{aligned} \tag{41}$$

于是

$$\sum_{j=2}^{n}\boldsymbol{z}_j^{\mathrm{T}}\left(M_j-\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_{j-1}}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}\right)=0 \tag{42}$$

考虑到 $-\tilde{\theta}\hat{\theta}\leqslant-\dfrac{1}{2}\tilde{\theta}^2+\dfrac{1}{2}\theta^2$, 结合式 (35)~(42), 可以得到:

$$\mathrm{E}[\mathcal{L}V_n]\leqslant\mathrm{E}[-\alpha_n\|\boldsymbol{e}\|^2-\frac{\omega}{2}\tilde{\theta}^2-k_1\|\boldsymbol{z}_1\|^2-\sum_{j=2}^{n}2k_j\left\|\boldsymbol{z}_j\right\|^4]+\beta_n \tag{43}$$

其中, $\alpha_n=\alpha_{n-1}-1,\beta_n=\beta_{n-1}+0.278\,5\varsigma_{n1}+\dfrac{1}{\varsigma_{n2}}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\epsilon_n^4+\dfrac{\eta^4}{2}$。

选取 $\hat{\theta}(0)\geqslant0$, 即可保证 $\mathcal{R}(\hat{\theta})>0$。于是得到逆最优控制输入:

$$u_{\mathrm{op}}=\frac{2}{3}\sigma u,\sigma\geqslant2 \tag{44}$$

4　稳定性证明

定理 1　针对遭受满足假设 1 和假设 2 网络攻击的随机 MIMO 非线性 CPS(式 (3)), 在虚拟控制率 (式 (22)、(31)), 自适应率 (式 (38)) 和逆最优控制输入 (式 (44)) 作用下, 闭环系统所有信号在概率意义下半全局一致最终有界, 且所设计事件触发控制器能解决系统 (式 (8)) 的逆最优问题, 同时使成本函数最小。

第一, 证明闭环系统是概率意义下半全局一致最终有界。定义 $V=V_n$, 由式 (43) 可知

$$\mathrm{E}[\mathcal{L}V_n]\leqslant-a\mathrm{E}[V_n]+b \tag{45}$$

其中, $a=\min\{2\alpha_n/\lambda_{\max}^2(P),4k_1,\cdots,4k_n,\omega\},b=\beta_n$。进一步地, 对式 (45) 两边同时积分, 有:

$$\mathrm{E}[V_n(t)]\leqslant\mathrm{E}[V_n(0)]\mathrm{e}^{-at}+\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-at}) \tag{46}$$

因此, 闭环系统所有信号 $z_1,z_2,\cdots,z_n,e_1,e_2,\cdots,e_n,\tilde{\theta}$ 在概率意义下半全局一致最终有界。

注 1: 由式 (46) 知, 系统误差取决于 b/a 的大小, 于是, 给出如下参数选取建议:

(1) 适当地增大 $k_1,\cdots,k_n$ 可以加速系统收敛, 但却会消耗更多的能量。

(2) 参数 $l_1,\cdots,l_n$ 同时影响 b 和 a。因此, 适当地选取 l_i 以保证良好的系统性能。

第二, 证明在此控制输入下, 系统能耗是最优的。建立性能指标函数:

$$J(\boldsymbol{u})=\mathrm{E}\left[2\sigma V+\int_0^t\left(l(\boldsymbol{X},\hat{\theta})+\frac{27}{16\sigma^2}\mathcal{R}^{-3}\|\boldsymbol{u}\|^4+\frac{4\sigma^2}{27}\mathcal{R}^{-3}\|\boldsymbol{\Delta}\|^4\right)\mathrm{d}\tau\right] \tag{47}$$

其中

$$\begin{aligned}l(\boldsymbol{X},\hat{\theta})=&2\sigma\left[\mathcal{R}\|\boldsymbol{z}_n\|^4-L_FV-\frac{\partial V}{\partial\tilde{\theta}}\dot{\hat{\theta}}-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2V}{\partial\boldsymbol{X}^2}\boldsymbol{G}_2\right\}\right]+\\&\sigma(\sigma-2)\mathcal{R}\|\boldsymbol{z}_n\|^4\end{aligned} \tag{48}$$

其中, $L_FV=\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{X}}F$ 和 $\Delta=\varphi_2(\rho\Re+m)I$。

根据定义 1 中式 (2) 与式 (8), 结合上面证明系统的状态都有界, 于是存在连续非负函数 $\mathcal{W}$ 满足

$$\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{X}}F+\frac{\partial V}{\partial\tilde{\theta}}\dot{\hat{\theta}}-\mathcal{R}\|\boldsymbol{z}_n\|^4+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2V}{\partial\boldsymbol{X}^2}\boldsymbol{G}_2\right\}\leqslant-\mathcal{W} \tag{49}$$

代入式 (48), 得

$$l(\boldsymbol{X},\hat{\theta})\geqslant2\sigma\mathcal{W}+\sigma(\sigma-2)\mathcal{R}\|\boldsymbol{z}_n\|^4 \tag{50}$$

考虑到 $\sigma\geqslant2$, 且 $\mathcal{W}$、$\mathcal{R}$ 都是非负函数, 可知 $l(\boldsymbol{X},\hat{\theta})$ 也是非负的, 于是性能指标函数 (47) 是有意义的。

因为 $\mathrm{E}\left[V(0)+\int_0^t\mathcal{L}V\mathrm{d}\tau-V(t)\right]=0$, 于是

$$\begin{aligned}&J(u)=2\sigma\mathrm{E}[V(z(0),\hat{\theta}(0))]+\mathrm{E}\left[\int_0^t\left(2\sigma\mathcal{L}V+l(X,\hat{\theta})+\frac{27}{16\sigma^2}\mathcal{R}^{-3}\|\boldsymbol{z}_n\|^4+\frac{4\sigma^2}{27}\mathcal{R}^{-3}\|\boldsymbol{\Delta}\|^4\right)\mathrm{d}\tau\right]=\\&2\sigma\mathrm{E}[V(z(0),\hat{\theta}(0))]+\mathrm{E}\left[\int_0^t\left(2\sigma\|\boldsymbol{z}_n\|^2\boldsymbol{z}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\sigma^2\mathcal{R}\|\boldsymbol{z}_n\|^4+\frac{27}{16\sigma^2}\mathcal{R}^{-3}\|\boldsymbol{u}\|^4+\frac{4\sigma^2}{27}\mathcal{R}^{-3}\|\boldsymbol{\Delta}\|^4\right)\mathrm{d}\tau\right]\end{aligned} \tag{51}$$

由 (37) 和 (39) 知, $z_n=-\mathcal{R}^{-1}\varpi,\varpi=(1+\rho\Phi)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\Delta}$, 于是

$$-2\sigma\|z_n\|^2\boldsymbol{z}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\leqslant-2\sigma(1+\rho\Phi)\boldsymbol{R}^{-1}\|z_n\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2+\sigma^2\boldsymbol{R}\|z_n\|^4+\frac{27}{16\sigma^2}\mathcal{R}^{-3}\|\boldsymbol{u}\|^4+\frac{4\sigma^2}{27}\boldsymbol{R}^{-3}\|\boldsymbol{\Delta}\|^4 \tag{52}$$

将代入式 (52) 至 (51), 有

$$J(\boldsymbol{u})\geqslant 2\sigma\mathrm{E}\left[V(\boldsymbol{z}(0),\hat{\theta}(0))\right] \tag{53}$$

当且仅当 $\sigma=2$ 时, 取得最小值 $J_{\min}(\boldsymbol{u})=4\mathrm{E}\left[V(\boldsymbol{z}(0),\hat{\theta}(0))\right]$。

此外, 对于 $\forall t\in[t_k,t_{k+1})$, 有 $\dfrac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{s}(t)\|}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}(t)}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}(\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}(t))}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\boldsymbol{s}}(t)}{\|\boldsymbol{s}(t)\|}\leqslant\|\dot{\varpi}(t)\|$。又由于闭环系统中的所有信号都是有界的, 因此存在正数 ϖ^* 满足 $\|\dot{\varpi}(t)\|\leqslant\varpi^*$。考虑到 $\boldsymbol{s}(t_k)=0$ 且 $\lim\limits_{t\to t_{k+1}}\|\boldsymbol{s}(t)\|\geqslant m$, 易得 $t^*:=\inf\limits_k(t_{k+1}-t_k)\geqslant\dfrac{m}{\varpi^*}>0$, 即避免了 Zeno 现象。

至此, 证明完成。

5 仿真示例

为进一步验证所提出控制策略的有效性与可行性, 考虑如下两级化学反应器随机模型[10]:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_1=(x_2+f_1(\bar{x}_1))\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}x_2=(u_a+f_2(x))\mathrm{d}t+\boldsymbol{h}_2^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{d}w\\ y=x_1\end{cases} \tag{54}$$

其中, 状态 $\boldsymbol{x}_i=[x_{i1},x_{i2}]^{\mathrm{T}}(i=1,2)$, 代表反应器中反应成分浓度; $\boldsymbol{u}_a=[u_{a1},u_{a2}]^{\mathrm{T}}$, 为遭受网络攻击的控制输入信号。非线性函数定义为 $h_2(x)=[\sin(x_{21}),\sin(x_{22})]$, $\boldsymbol{f}_1=[-\dfrac{1}{T_{11}}x_{11}+x_{12}-H_{11}x_{11}-x_{11},-\dfrac{1}{T_{12}}x_{12}+x_{11}-H_{12}x_{12}-x_{12}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{f}_2=[-\dfrac{1}{T_{21}}x_{21}+\dfrac{F_{21}}{V_{21}}x_{11}-H_{21}x_{21},-\dfrac{1}{T_{22}}x_{22}+\dfrac{F_{22}}{V_{22}}x_{12}-H_{22}x_{22}]^{\mathrm{T}}$, 反应器停留时间 $T_{i1}=T_{i2}=4$ s, 反应体积 $V_{21}=V_{22}=0.5$ m^3, 反应系数 $H_{i1}=H_{i2}=0.3$ s^{-1}, 循环流动速率 $F_{21}=F_{22}=0.5$ m^3/s。

在实际网络化工业控制系统中, 攻击者可能通过远程客户端或网络服务器对传感器到控制器端或者控制器到执行器端的数据实施 DoS 或 FDI 攻击。考虑在生产过程中受到如下网络攻击: (1) 传感器到控制器传输信道: $\boldsymbol{y}_a=p(t)x_1+(1-p(t))q(t)\boldsymbol{\varrho}(x_1)$; 其中 $\boldsymbol{\varrho}(x_1)=[0.3(1+0.2\cos(2t)),0.3(1-0.2\cos(2t))]^{\mathrm{T}}$, $p=\mathrm{diag}\{0.1,0.1\},q=\mathrm{diag}\{0.9,0.9\}$; (2) 控制器到执行器传输信道: $\boldsymbol{u}_a=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\psi}_a(x,t)$, 其中 $\boldsymbol{\psi}_a(x,t)=((1.5+1.6\cos t)x_1\cdot x_2-(1.5+1.2\sin(0.2t))x_2)[1,1]^{\mathrm{T}}$。

选取控制器参数如下: $k_1=k_2=6$, $\boldsymbol{l}_1=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{l}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\omega=0.5$, 以及 $m=0.01,D_1=1,\rho=0.6$。状态初始值为 $\boldsymbol{x}_1(0)=[0.5,0.1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2(0)=[0.1,0.1]^{\mathrm{T}}$。观测器初始值 $\hat{\boldsymbol{x}}_1(0)=[0.1,0.8]^{\mathrm{T}}$, $\hat{\boldsymbol{x}}_2(0)=[0.5,0.5]^{\mathrm{T}}$。自适应参数初始值为 $\hat{\theta}(0)=0.8$。在上述参数配置下, 通过可编程控制器进行仿真, 系统可得结果见图 1~图 4。

图 1 描述了系统的状态、输出和观测器的跟踪信号, 并表明所设计的控制策略能取得满意的控制性能; 遭受攻击下事件触发最优控制输入见图 2; 图 3 展示了此策略下触发时间避免 Zeno 现象。由图 4 可知, 采用常规的 backstepping 事件触发控制器[11] 时, 系统出现明显振荡现象, 直至系统不稳定。

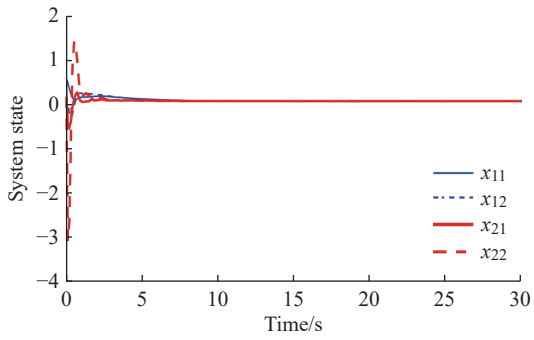


图 1 系统状态

Fig. 1 System states

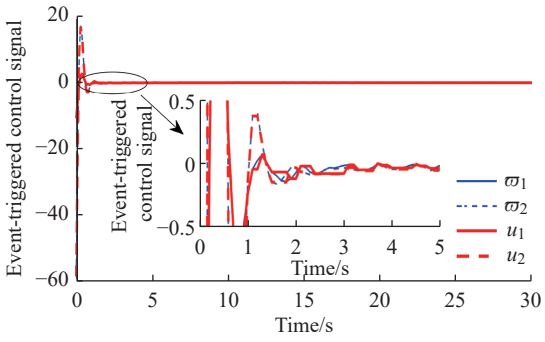


图 2 事件触发最优控制输入轨迹

Fig. 2 Trajectories of the event-triggered optimal control input

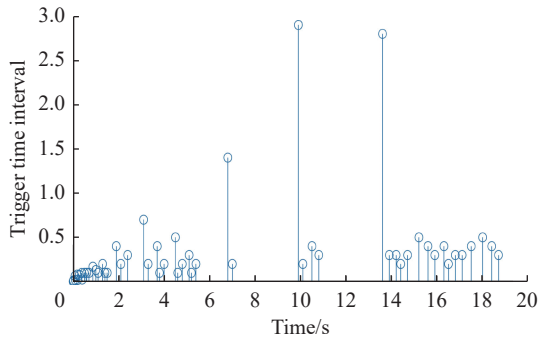


图 3 事件触发最优控制的触发间隔

Fig. 3 Event-triggering intervals of event-triggered optimal control

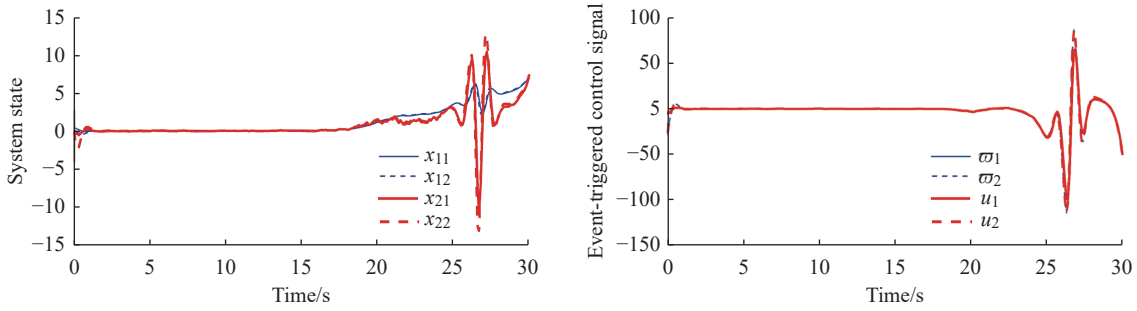


图 4　backstepping 事件触发控制下系统状态和控制输入

Fig. 4　System states and control input under backstepping event-triggered control

6　结　论

本文研究了随机 MIMO 非线性 CPSs 系统在混合网络攻击下的事件触发最优安全控制问题。通过综合反步法技术、IOC 设计方法、事件触发机制、模糊函数逼近等技术, 提出一种事件触发逆最优控制策略; 所设计的控制器不仅降低控制能耗和提升通信效率, 而且保证了混合攻击下的系统性能, 具有更广泛的适用性。考虑到预定时间控制能够实现系统的精确收敛, 下一步将研究混合攻击下非线性 CPSs 的预定时间最优安全控制问题。

参考文献:

[1] MAHMOUD M S, HAMDAN M M, BAROUDI U A. Modeling and control of cyber-physical systems subject to cyber attacks: A survey of recent advances and challenges[J]. Neurocomputing, 2019, 338: 101-115.

[2] TIAN Y, ZHANG H, LIU Y, *et al*. Event-triggered adaptive secure tracking control for nonlinear cyber-physical systems against unknown deception attacks[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2024, 221: 79-93.

[3] AN L, YANG G H. Decentralized adaptive fuzzy secure control for nonlinear uncertain interconnected systems against intermittent DoS attacks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 49(3): 827-838.

[4] AKBARI E, TABATABAEI S M, BARKHORDARI YAZDI M, *et al*. Resilient backstepping control for a class of switched nonlinear time-delay systems under hybrid cyber-attacks[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2023, 122: 106128.

[5] LIAN Z, SHI P, LIM C C. Dynamic hybrid-triggered-based fuzzy control for nonlinear networks under multiple cyber-attacks[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(9): 3940-3951.

[6] CUI Y, SUN H, HOU L, *et al*. Dynamic event-triggered adaptive neural network decentralized output-feedback control for nonlinear interconnected systems with hybrid cyber attacks and its application[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2024, 54(4): 2149-2158.

[7] FANG L, MA L, DING S, *et al*. Finite-time stabilization for a class of high-order stochastic nonlinear systems with an output constraint[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 358: 63-79.

[8] LI Y M, TONG S C, LI Y X. Observer-based adaptive fuzzy backstepping control of MIMO stochastic nonlinear strict-feedback systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(2): 1579-1593.

[9] DENG H, KRSTIĆ M. Stochastic nonlinear stabilization—II: Inverse optimality[J]. Systems & Control Letters, 1997, 32(3): 151-159.

[10] LIN W, GONG Q. A remark on partial-state feedback stabilization of cascade systems using small gain theorem[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(3): 497-499.

[11] 陈泽彬, 余昭旭, 李树刚. 网络攻击下非线性 CPSs 的事件触发自适应控制 [J]. 华东理工大学学报 (自然科学版), 2024, 50(3): 411-417.

[12] XING L, WEN C, LIU Z, *et al*. Event-triggered adaptive control for a class of uncertain nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(4): 2071-2076.

[13] 曹澄洁, 赵中原, 邓志良. 四旋翼无人机飞行姿态自适应事件触发控制算法 [J]. 控制工程, 2026, 33(1): 153-160.

Event-Triggered Adaptive Inverse Optimal Control for Stochastic MIMO Nonlinear CPSs under Hybrid Cyber-Attacks

YU Hongyan[1], QIN Zijia[1], YU Zhaoxu[1], LI Shugang[2]

(1. Key Laboratory of Smart Manufacturing in Energy Chemical Process, Ministry of Education, Shanghai 200237, China; 2. Department of Information Management, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: This paper investigates the event-triggered adaptive inverse optimal control problem for a class of stochastic multiple-input multiple-output (MIMO) nonlinear cyber-physical systems (CPSs) under hybrid cyber-attacks. The hybrid cyber-attack model, consisting of denial-of-service (DoS) and false data injection (FDI) attacks, is characterized by a probabilistic Bernoulli process to better capture realistic attack scenarios. Based on the backstepping approach, an event-triggered adaptive optimal control scheme is developed by integrating inverse optimal design with a switching-threshold event-triggered mechanism. The proposed method is applicable to stochastic MIMO systems and ensures that the closed-loop system is semi-globally uniformly ultimately bounded (SGUUB) in probability. Finally, simulation results are presented to demonstrate the effectiveness and feasibility of the proposed strategy.

Key words: stochastic nonlinear CPSs; hybrid cyber-attack; event-triggered; inverse optimal control; MIMO

（责任编辑：李娟）