

具有空间非局部效应的时滞登革热模型单稳行波解的稳定性

常梦飞, 杨赞瑞[†]

兰州交通大学 数理学院, 甘肃 兰州 730070

收稿日期: 2025-05-29 [†] 通信联系人 E-mail: lily1979101@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(12361038); 甘肃省基础研究创新群体项目(25JRRA805)

第一作者: 常梦飞, 男, 硕士生, 主要研究方向为非线性泛函分析, 泛函微分方程。E-mail: cmf991214@163.com

摘 要: 研究了具有空间非局部效应的时滞登革热模型单稳行波解的稳定性。采用连续性方法结合加权能量法, 建立该模型单稳行波解的局部指数稳定性(小初始扰动下)。其中, 初始扰动当 x 趋于无穷时只需一致有界而不必趋于 0。

关 键 词: 非局部效应; 行波解; 稳定性; 加权能量法; 时滞

中图分类号: O175.26

文献标志码: A

文章编号: 1671-8836(2026)04-0599-14

Stability of Monostable Traveling Waves in a Delayed Dengue Model with Nonlocal Effect in Space

CHANG Mengfei, YANG Yunrui[†]

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China

Abstract: This paper deals with the stability of monostable traveling wave solutions in a delayed dengue model with nonlocal effect in space. The local exponential stability of monostable waves of the model is established under small initial perturbations by the continuity method and the weighted energy method, where the initial perturbations when x approaches infinity are needed only to be uniformly bounded, but not to tend to 0.

Key words: nonlocal effect; traveling wave solutions; stability; weighted-energy method; delay

0 引 言

登革热是一类由于媒介生物载体的传播而引起的疾病, 其模型的研究备受关注^[1-5]。1998 年, 为了模拟固定人口数量且可变媒介数量的登革热病毒的传播, Esteva 等^[1]提出了模型:

$$\begin{cases} S_H'(t) = \mu_H N_H - \frac{\beta_H b}{N_H + m} S_H I_V - \mu_H S_H \\ I_H'(t) = \frac{\beta_H b}{N_H + m} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H) I_H \\ R_H'(t) = \gamma_H I_H - \mu_H R_H \\ S_V'(t) = A - \frac{\beta_V b}{N_H + m} S_V I_H - \mu_V S_V \\ I_V'(t) = \frac{\beta_V b}{N_H + m} S_V I_H - \mu_V I_V \end{cases} \quad (1)$$

引用格式: 常梦飞, 杨赞瑞. 具有空间非局部效应的时滞登革热模型单稳行波解的稳定性[J]. 武汉大学学报(理学版), 2026, 72(4): 599-612. DOI: 10.14188/j.1671-8836.2025.0131.

CHANG Mengfei, YANG Yunrui. Stability of Monostable Traveling Waves in a Delayed Dengue Model with Nonlocal Effect in Space [J]. *J. Wuhan Univ. (Nat. Sci. Ed.)*, 2026, 72(4): 599-612. DOI: 10.14188/j.1671-8836.2025.0131(Ch).

该模型中, S_H, I_H, R_H 分别表示易感者、感染者、恢复者人数; S_V, I_V 易感蚊子和感染蚊子的数量; μ_H 表示人类自然死亡率, γ_H 为患者的恢复率, μ_V 表示蚊虫死亡率; N_H 表示人数, A 表示蚊子常数, m 表示可供蚊子作为血液来源的替代宿主数量, b 表示蚊子的叮咬率, 即每只蚊子每天平均叮咬的次数。自此, 对登革热传染病模型的研究引起了广泛学者的关注。

由于病媒(或宿主)在空间中的移动是随机的, 而包括病媒传播在内的许多传染病又都有潜伏期, 因此, 可以同时考虑病媒在空间的扩散和时滞因素。例如, 时滞 Laplace 扩散登革热模型:

$$\begin{cases} \partial_t u_1(x, t) = d_1 \Delta u_1(x, t) - k_1 u_1(x, t) u_5(x, t - \tau_1) \\ \partial_t u_2(x, t) = d_2 \Delta u_2(x, t) + k_1 u_1(x, t) u_5(x, t - \tau_1) - (\mu_h + \alpha_h) u_2(x, t) \\ \partial_t u_3(x, t) = d_3 \Delta u_3(x, t) + \alpha_h u_2(x, t) \\ \partial_t u_4(x, t) = d_4 \Delta u_4(x, t) - k_2 u_4(x, t) u_2(x, t - \tau_2) \\ \partial_t u_5(x, t) = d_5 \Delta u_5(x, t) + k_2 u_4(x, t) u_2(x, t - \tau_2) - \mu_v u_5(x, t) \end{cases} \quad (2)$$

其中, $u_1(x, t)$ 、 $u_2(x, t)$ 和 $u_3(x, t)$ 分别表示 t 时刻 x 处易感人群、感染人群和恢复人群的密度; $u_4(x, t)$ 和 $u_5(x, t)$ 表示 t 时刻 x 处易感蚊子和感染蚊子的密度; τ_1 ($\tau_1 > 0$) 和 τ_2 ($\tau_2 > 0$) 分别表示登革热病毒在蚊子体内和人体内的潜伏期; d_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 为扩散系数, $d_i > 0$ 且 $d_1 = d_3$; μ_h ($\mu_h > 0$) 和 α_h ($\alpha_h > 0$) 表示染病者的因病死亡率和恢复率, μ_v ($\mu_v > 0$) 是染病蚊子的因病死亡率; k_1 ($k_1 > 0$) 表示病毒由染病蚊子到易感者的传播率, k_2 ($k_2 > 0$) 是病毒从感染者到易感蚊子的传播率。

扩散可分为局部扩散和非局部扩散。当个体的扩散且仅与当前位置有关, 这种扩散称作局部扩散, 如 Laplace 扩散就是局部扩散; 当个体的扩散不仅与当前位置有关, 还与相邻位置甚至整个空间有关, 这种扩散就称作非局部扩散, 常用卷积项

$$(\mathcal{J} * u)(x, t) - u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(x - y) u(y, t) dy - u(x, t)$$

表示。其中, $\mathcal{J}$ 是关于空间的概率密度函数(核函数), $\mathcal{J}(x - y)$ 表示个体从位置 y 到 x 的概率密度函数, $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(x - y) u(y, t) dy$ 表示个体从其他空间位置到达位置 x 的速度。一般地, 当核函数 $\mathcal{J}$ 具有对称性($\mathcal{J}$ 是偶函数, 即: $\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}(-x)$)时, 不难验证, 非局部扩散项与经典的 Laplace 扩散项仅相差一个关于 ϵ^2 的高阶无穷小量(其中 $\epsilon > 0$ 充分小), 即非局部扩散项与 Laplace 扩散项自然逼近。例如, Laplace 扩散登革热模型(2)可推广到非局部扩散模型。此外, 个体(病媒或宿主)在过去时间乃至整个历史时期的状态都可能会对当前的状态产生影响, 这就产生了非局部效应^[6-7], 它可以同时体现在扩散项上(即非局部扩散)和反应项上(即时间-空间的非局部, 又称时空时滞), 包括空间的非局部和时间的非局部。例如, (3)式为具有时间-空间非局部效应的时滞种群模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} = d(\mathcal{J} * U_1 - U_1)(x, t) + F(U_1(x, t), \mathcal{K} ** S(U_1(x, t))) - \beta_1 U_1(x, t) + \beta_2 U_2(x, t) \\ \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} = \beta_1 U_1(x, t) - \beta_2 U_2(x, t) \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\mathcal{K} ** S(U_1(x, t)) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}(x - y, t - s) S(U_1(y, s)) dy ds$, $t > 0, x \in \mathbb{R}$ 。当 $\mathcal{K}(x, t) = \delta(t - \tau) \mathcal{G}(x)$ 时, 具有时间-空间非局部效应的时滞种群模型(3)退化为具有空间非局部效应的时滞种群模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} = d(\mathcal{J} * U_1 - U_1)(x, t) + F(U_1(x, t), \mathcal{G} * S(U_1(x, t - \tau))) - \beta_1 U_1(x, t) + \beta_2 U_2(x, t) \\ \frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} = \beta_1 U_1(x, t) - \beta_2 U_2(x, t) \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\mathcal{G} * S(U_1(x, t - \tau)) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(x - y) S(U_1(y, t - \tau)) dy$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$; U_1, U_2 分别表示移动和静止子种群的密度, d ($d > 0$) 为扩散系数, β_1 ($\beta_1 > 0$), β_2 ($\beta_2 > 0$) 为移动和静止两种状态之间的转化率。

又如, (5)式为具有空间非局部效应的时滞登革热模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = d_1(\mathcal{J}^*u_1(x,t) - u_1(x,t)) - l_1u_1(x,t)\mathcal{G}^*u_5(x,t-\tau) \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = d_2(\mathcal{J}^*u_2(x,t) - u_2(x,t)) + l_1u_1(x,t)\mathcal{G}^*u_5(x,t-\tau) - (\mu_h + \alpha_h)u_2(x,t) \\ \frac{\partial u_3(x,t)}{\partial t} = d_3(\mathcal{J}^*u_3(x,t) - u_3(x,t)) + \alpha_hu_2(x,t) \\ \frac{\partial u_4(x,t)}{\partial t} = d_4(\mathcal{J}^*u_4(x,t) - u_4(x,t)) - l_2u_4(x,t)\mathcal{G}^*u_2(x,t-\tau) \\ \frac{\partial u_5(x,t)}{\partial t} = d_5(\mathcal{J}^*u_5(x,t) - u_5(x,t)) + l_2u_4(x,t)\mathcal{G}^*u_2(x,t-\tau) - \mu_vu_5(x,t) \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\mathcal{G}^*u_i(x,t-\tau) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(x-y)u_i(y,t-\tau)dy (i=2,5)$ 。

行波解的稳定性一直是行波理论中的重点研究课题,常用的研究方法有谱分析方法、挤压技术、(反)加权能量法和单调半流理论等。其中,文献[8-12]发展的(反)加权能量法是处理单稳行波解(是指行波解连接的两个平衡点中有一个稳定、一个不稳定)稳定性的有效工具。2014年, Lin等^[9]借助连续性方法结合加权能量法研究了一类时滞 Nicholson's 标量方程非临界波速下单稳行波解的局部指数稳定性。此后 Liu等^[13]将 Lin等^[9]的工作推广到一类具有空间非局部效应的时滞标量方程。近来,李孝武等^[14]建立了时滞非局部扩散 SVIR 模型单稳行波解的指数稳定性。但是,上述结果主要针对的是小初始扰动、非临界波速下单稳行波解的局部稳定性。2019年, Mei等^[12]首次利用反加权能量法结合 Fourier 变换同时建立了一类时滞 Laplace 扩散标量方程非临界波速下和临界波速下单稳行波解的全局指数稳定性及全局代数稳定性。基于 Mei等^[12]的工作, Zhang^[15]研究了一类非局部扩散时滞标量方程单稳行波解的稳定性。此后, Liu等^[16]将上述研究结果推广到具有空间非局部效应的时滞非局部扩散系统(4), 此类工作还可参见文献[17-19]。而关于登革热模型单稳行波解存在性的研究工作仅见王凯等^[5]建立了模型(2)单稳行波解的存在性,关于其行波解稳定性的研究目前还未见报道。

受上述工作^[9,14,16]的启发,本文主要研究具有空间非局部效应的时滞扩散登革热模型(5)单稳行波解的稳定性。注意到,由于非线性项的特殊性(关于任一变元的二阶偏导为0而无法保证一阶偏导的有界性),导致 Fourier 变换结合连续性方法建立扰动解的全局存在唯一性时失效。因此,本文首先在保证系统(5)单稳行波解存在的基础上,借助迭代法建立相应扰动系统解的局部存在唯一性(小初始扰动条件下);其次,利用加权能量法建立扰动解的先验估计;最后,利用连续延拓性方法将局部解延拓至全空间,得到系统(5)单稳行波解的局部指数稳定性。本文不仅将 Laplace 扩散登革热模型(2)单稳行波解的研究推广到了非局部扩散系统,还补充完善了对登革热模型单稳行波解的稳定性研究。

1 预备知识和主要结论

首先,给出本文所需的假设条件和工作空间:

(H₁) $\mathcal{J}(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ 具有紧支集, 且对任意的 $y \in \mathbb{R}$, $\mathcal{J}(y) = \mathcal{J}(-y) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y)dy = 1$ 。

(H₂) $\mathcal{G}(y,s) \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T])$ 关于 y 是 Lipschitz 连续的且满足 $\mathcal{G}(y,s) = \mathcal{G}(-y,s) \geq 0$ 和 $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y,s)dy = 1$ 。此外, 存在常数 $\lambda_c \in (0, +\infty)$ 使得当波速 $c > 0$ 时, $\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(y,s)e^{-\lambda(y+cs)}dyds < +\infty$, 其中 $\lambda \in [0, \lambda_c)$ 。

记 I 为 $\mathbb{R}$ 上的一个区间, $L^2(I)$ 是定义在 I 上的平方可积函数构成的空间, $L^2_{\omega}(I)$ 表示加权 $L^2(I)$ 空间。 $H^k(I)$ 为定义在 I 上且 $j (j=0,1,\dots,k)$ 阶导数是由 $L^2(I)$ 空间内的 Lebesgue 平方可积函数构成的 Sobolev 空间, $H^k_{\omega}(I)$ 为加权索伯列夫空间, 加权函数 $\omega(x) > 0$ 。 $L^2_{\omega}(I)$ 的范数为 $\|f\|_{L^2_{\omega}(I)} = [\int_I \omega(x)|f(x)|^2 dx]^{\frac{1}{2}}$, $H^k_{\omega}(I)$ 的范数为 $\|f\|_{H^k_{\omega}(I)} = [\sum_{i=0}^k \int_I \omega(x) \left| \frac{d^i}{dx^i} f(x) \right|^2 dx]^{\frac{1}{2}}$ 。

令常数 $T > 0$, $\mathcal{B}$ 是 Banach 空间。 $C([0, T]; \mathcal{B})$ 为定义在 $[0, T]$ 上的 $\mathcal{B}$ -值连续函数组成的空间, $L^2([0, T]; \mathcal{B})$ 表示由 $[0, T]$ 上的 $\mathcal{B}$ -值 L^2 -函数构成的空间; 相应地, $[0, +\infty)$ 上的 $\mathcal{B}$ -值函数构成的空间定义类似。 $C > 0$ 为万有常数, $C_i > 0 (i = 0, 1, \dots)$ 为特定的常数。

假设系统(5)满足初始条件:

$$\begin{cases} u_i(x, 0) = u_{i0}(x), x \in \mathbb{R}, i = 1, 3, 4 \\ u_i(x, 0) = u_{i0}(x, s), s \in [-\tau, 0], x \in \mathbb{R}, i = 2, 5 \end{cases} \quad (6)$$

此外, 不难验证系统(5)有两个平衡点:

$$E_- = (u_1(-\infty), u_2(-\infty), u_3(-\infty), u_4(-\infty), u_5(-\infty)) = (S_h^0, 0, R_h^0, S_v^0, 0) \\ E_+ = (u_1(+\infty), u_2(+\infty), u_3(+\infty), u_4(+\infty), u_5(+\infty)) = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*)$$

这里 $S_h^0, R_h^0, S_v^0, S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*$ 均为正常数。 令 $(u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), u_4(x, t), u_5(x, t))$ 是系统(5)满足初始条件(6)的解, 系统(5)的形如 $u_i(x, t) = \phi_i(\xi) = \phi_i(x + ct) (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 的解称为行波解, 且满足如下条件:

$$\begin{cases} c\phi_1'(\xi) = d_1(\mathcal{J}^*\phi_1(\xi) - \phi_1(\xi)) - l_1\phi_1\mathcal{G}^*\phi_5(\xi - c\tau) \\ c\phi_2'(\xi) = d_2(\mathcal{J}^*\phi_2(\xi) - \phi_2(\xi)) + l_1\phi_1\mathcal{G}^*\phi_5(\xi - c\tau) - (\mu_h + \alpha_h)\phi_2(\xi) \\ c\phi_3'(\xi) = d_3(\mathcal{J}^*\phi_3(\xi) - \phi_3(\xi)) + \alpha_h\phi_2(\xi) \\ c\phi_4'(\xi) = d_4(\mathcal{J}^*\phi_4(\xi) - \phi_4(\xi)) - l_2\phi_4\mathcal{G}^*\phi_2(\xi - c\tau) \\ c\phi_5'(\xi) = d_5(\mathcal{J}^*\phi_5(\xi) - \phi_5(\xi)) + l_2\phi_4\mathcal{G}^*\phi_2(\xi - c\tau) - \mu_v\phi_5(\xi) \\ \phi_i(\pm\infty) = u_i(\pm\infty), i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\xi = x + ct, c > 0$ 为波速。 类似于文献[20], 可以得到下面三个引理。

引理 1 若 $(H_1) \sim (H_2)$ 成立, 则 $\rho_1(\lambda, c)$ 和 $\rho_2(\lambda, c)$ 分别存在正根 λ' 和 λ'' , 使得: $\rho_1(\lambda, c) < 0, \forall \lambda \in (0, \lambda')$; $\rho_2(\lambda, c) < 0, \forall \lambda \in (0, \lambda'')$, 其中 $\rho_1(\lambda, c) = d_2 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y)(e^{-\lambda y} - 1)dy - \mu_h - \alpha_h - c\lambda, \rho_2(\lambda, c) = d_4 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y)(e^{-\lambda y} - 1)dy - \mu_v - c\lambda$ 。

引理 2 假设 $(H_1) \sim (H_2)$ 成立且 $\Re_0 = (\frac{l_1 l_2 S_h^0 S_v^0}{(\mu_h + \alpha_h) \mu_v})^{\frac{1}{2}} > 1$, 则存在 $\lambda^*, c^* > 0$, 使得 $f_1(\lambda^*, c^*) = 1$,

$\frac{\partial f_1(\lambda, c)}{\partial \lambda} \Big|_{(\lambda^*, c^*)} = 0$, 并满足如下结论:

(i) 当 $c > c^*$ 时, 方程 $f_1(\lambda, c) = 1$ 有两个不同的正实根 λ_1 和 λ_2 且 $\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2 < \Lambda_1$, 满足 $f_1(\lambda, c) < 1, \forall \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2); f_1(\lambda, c) > 1, \forall \lambda \in (0, \lambda_1) \cup (\lambda_2, \Lambda_1)$;

(ii) 当 $c = c^*$ 时, $\lambda_1 = \lambda^* = \lambda_2 < \Lambda_1$ 成立, 且对 $\forall \lambda \in (0, \Lambda_1)$, 有 $f_1(\lambda, c) \geq 1$;

(iii) 当 $c < c^*$ 时, 对 $\forall \lambda \in (0, \Lambda_1)$, 有 $f_1(\lambda, c) > 1$; 其中, $f_1(\lambda, c) = \frac{l_1 l_2 S_h^0 S_v^0 (\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y, s) e^{-\lambda(y+\alpha s)} dy ds)^2}{\rho_1(\lambda, c) \rho_2(\lambda, c)}$,

$\Lambda_1 = \min \{ \lambda', \lambda'' \}$ 。

利用 Schauder 不动点定理结合上下解方法, 类似于文献[20-21], 可以建立系统(5)单稳行波解的存在性。

引理 3 (行波解的存在性) 假设 $(H_1) \sim (H_2)$ 成立, 则对任意的 $c > c^*$, 系统(5)存在行波解, 其中, c^* 的定义见引理 2。

定义加权函数:

$$\omega(\xi) = e^{-\lambda(\xi - \xi_0)} \quad (8)$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}, \xi_0 \gg 1$ 为充分大的常数且 $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ 。

定理 1 (行波解的稳定性) 假设 $\tau \in (0, \tau_0)$, 其中, τ_0 为正常数, 且 $(H_1) \sim (H_2)$ 成立。 对任意给定的行波解 $\Phi(x + ct) = (\phi_1(x + ct), \phi_2(x + ct), \phi_3(x + ct), \phi_4(x + ct), \phi_5(x + ct))$, 波速 c 满足:

$$c > \max \{ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c^* \} \quad (9)$$

其中,

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{d_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) e^{-\lambda_1 y} dy + l_1 S_h^0 - d_1}{\lambda_1} \\
c_2 &= \frac{d_2 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) e^{-\lambda_1 y} dy + l_1 S_h^0 + N_2 + 2l_2 S_v^0 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) e^{-\lambda_1 y} dy - d_2 - 2\mu_h - \alpha_h}{\lambda_1} \\
c_3 &= \frac{d_3 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) e^{-\lambda_1 y} dy + \alpha_h - d_3}{\lambda_1}, c_4 = \frac{d_4 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) e^{-\lambda_1 y} dy + l_2 S_v^0 - d_4}{\lambda_1} \\
c_5 &= \frac{d_5 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) e^{-\lambda_1 y} dy + l_2 S_v^0 + N_1 + 2l_1 S_h^0 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) e^{-\lambda_1 y} dy - d_5 - 2\mu_v}{\lambda_1}
\end{aligned}$$

且 $N_1 := \max_{\phi_2 \in [0, I_h^*]} |l_2 \phi_2|$, $N_2 := \max_{\phi_5 \in [0, I_v^*]} |l_1 \phi_5|$. 若初始扰动满足:

$$\begin{cases} u_{i0}(x) - \phi_i(x) \in C(\mathbb{R}) \cap H_\omega^1(\mathbb{R}), i = 1, 3, 4 \\ u_{i0}(s, x) - \phi_i(x + cs) \in C([- \tau, 0]; C(\mathbb{R}) \cap H_\omega^1(\mathbb{R})) \cap L^2([- \tau, 0]; H_\omega^1(\mathbb{R})), i = 2, 5 \end{cases} \quad (10)$$

和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_{i0}(x) - \phi_i(x)) = W_{i0, \infty} (i = 1, 3, 4)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_{i0}(x, s) - \phi_i(x + cs)) = W_{i0, \infty}(s) (i = 2, 5) \in C[- \tau, 0]$

关于 $s \in [- \tau, 0]$ 一致存在, 则存在正常数 δ_0, μ 和 ϵ , 使得当初始扰动充分小, 即当

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1,3,4} \| (u_{i0} - \phi_i)(0) \|_C^2 + \sup_{s \in [- \tau, 0]} \| (u_{20} - \phi_2)(s) \|_C^2 + \sup_{s \in [- \tau, 0]} \| (u_{50} - \phi_5)(s) \|_C^2 + \sum_{i=1}^5 \| (u_{i0} - \phi_i)(0) \|_{H_\omega^1(\mathbb{R})}^2 + \\
& \int_{- \tau}^0 \| (u_{20} - \phi_2)(s) \|_{H_\omega^1(\mathbb{R})}^2 ds + \int_{- \tau}^0 \| (u_{50} - \phi_5)(s) \|_{H_\omega^1(\mathbb{R})}^2 ds \leq \delta_0^2
\end{aligned} \quad (11)$$

时, 则系统(5)满足条件(6)的解 $(u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), u_4(x, t), u_5(x, t))$ 关于时间全局存在且唯一, 并满足 $u_i(t, x) - \phi_i(x + ct) \in C([- \tau_i, +\infty); C(\mathbb{R}) \cap H_\omega^1(\mathbb{R})) \cap L^2([- \tau_i, +\infty); H_\omega^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}_{\text{unif}}[- \tau_i, +\infty)$ 和

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_i(x, t) - \phi_i(x + ct)| \leq C e^{-\mu t}, t > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (12)$$

其中, $\tau_1 = \tau_3 = \tau_4 = 0, \tau_2 = \tau_5 = \tau$. 空间 $\mathcal{C}_{\text{unif}}[- \tau, T]$ 定义如下: $\mathcal{C}_{\text{unif}}[- \tau, T] = \{ u(x, t) \in C(\mathbb{R} \times [- \tau, T]) \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\mu t} u(x, t) \text{ 关于 } t \in [- \tau, T] \text{ 一致存在} \}$, 其中 $0 < T \leq \infty$.

令 $(u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), u_4(x, t), u_5(x, t))$ 是系统(5)满足初始条件(6)的解, 并且 $(\phi_1(x + ct), \phi_2(x + ct), \phi_3(x + ct), \phi_4(x + ct), \phi_5(x + ct))$ 是系统(5)给定的一个行波解. 令 $\xi = x + ct$, 且

$$\begin{cases} W_i(\xi, t) = u_i(x, t) - \phi_i(\xi), i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ W_{i0}(x, 0) = u_{i0}(x) - \phi_i(x), x \in \mathbb{R}, i = 1, 3, 4 \\ W_{i0}(\xi, s) = u_{i0}(x, s) - \phi_i(x + cs), (x, s) \in \mathbb{R} \times [- \tau, 0], i = 2, 5 \end{cases}$$

则 $(W_1(\xi, t), W_2(\xi, t), W_3(\xi, t), W_4(\xi, t), W_5(\xi, t))$ 满足:

$$\begin{cases} W_{1t}(\xi, t) + c W_{1\xi}(\xi, t) - d_1(\mathcal{J} * W_1(\xi, t) - W_1(\xi, t)) + l_1 W_1(\xi, t) \mathcal{G} * \phi_5(\xi - c\tau) + \\ \quad l_1 \phi_1(\xi) \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, t - \tau) = -Q_1(W_1(\xi, t), \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, t - \tau)) \\ W_{2t}(\xi, t) + c W_{2\xi}(\xi, t) - d_2(\mathcal{J} * W_2(\xi, t) - W_2(\xi, t)) - l_1 W_1(\xi, t) \mathcal{G} * \phi_5(\xi - c\tau) - \\ \quad l_1 \phi_1(\xi) \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, t - \tau) + (\mu_h + \alpha_h) W_2(\xi, t) = Q_1(W_1(\xi, t), \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, t - \tau)) \\ W_{3t}(\xi, t) + c W_{3\xi}(\xi, t) - d_3(\mathcal{J} * W_3(\xi, t) - W_3(\xi, t)) - \alpha_h W_2(\xi, t) = 0 \\ W_{4t}(\xi, t) + c W_{4\xi}(\xi, t) - d_4(\mathcal{J} * W_4(\xi, t) - W_4(\xi, t)) + l_2 W_4(\xi, t) \mathcal{G} * \phi_2(\xi - c\tau) + \\ \quad l_2 \phi_4(\xi) \mathcal{G} * W_2(\xi - c\tau, t - \tau) = -Q_2(\mathcal{G} * W_2(\xi - c\tau, t - \tau), W_4(\xi, t)) \\ W_{5t}(\xi, t) + c W_{5\xi}(\xi, t) - d_5(\mathcal{J} * W_5(\xi, t) - W_5(\xi, t)) - l_2 W_4(\xi, t) \mathcal{G} * \phi_2(\xi - c\tau) - \\ \quad l_2 \phi_4(\xi) \mathcal{G} * W_2(\xi - c\tau, t - \tau) + \mu_v W_5(\xi, t) = Q_2(\mathcal{G} * W_2(\xi - c\tau, t - \tau), W_4(\xi, t)) \\ W_i(\xi, 0) = W_{i0}(\xi), \xi \in \mathbb{R}, i = 1, 3, 4 \\ W_i(\xi, s) = W_{i0}(\xi, s), (\xi, s) \in \mathbb{R} \times [- \tau, 0], i = 2, 5 \end{cases} \quad (13)$$

其中,

$$Q_1(W_1(\xi, t), \mathcal{G}^* W_5(\xi - c\tau, t - \tau)) =$$

$$\begin{aligned} & l_1(W_1(\xi, t) + \phi_1(\xi)) \left[\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) W_5(\xi - y - c\tau, t - \tau) dy + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy \right] - \\ & l_1 \phi_1(\xi) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy - l_1 W_1(\xi, t) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy - l_1 \phi_1(\xi) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) W_5(\xi - \\ & y - c\tau, t - \tau) dy, Q_2(\mathcal{G}^* W_2(\xi - c\tau, t - \tau), W_4(\xi, t)) = \\ & l_2(W_4(\xi, t) + \phi_4(\xi)) \left[\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) W_2(\xi - y - c\tau, t - \tau) dy + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_2(\xi - y - c\tau) dy \right] - \\ & l_2 \phi_4(\xi) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_2(\xi - y - c\tau) dy - l_2 W_4(\xi, t) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_2(\xi - y - c\tau) dy - \\ & l_2 \phi_4(\xi) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) W_2(\xi - y - c\tau, t - \tau) dy \end{aligned}$$

定义空间 $\mathcal{X}(-\tau, T) = \{(W_1, W_2, W_3, W_4, W_5) | W_i(t, \xi) \in C([- \tau_i, T]; C(\mathbb{R}) \cap H_w^1(\mathbb{R})) \cap L^2([- \tau_i, T]; H_w^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}_{\text{unif}}[- \tau_i, T], i = 1, 2, 3, 4, 5, \tau_1 = \tau_3 = \tau_4 = 0, \tau_2 = \tau_5 = \tau\}$ 。

方便起见, 给出以下记号: $M_W^2(T) = \sum_{i=1}^5 \left(\sup_{t \in [-\tau, T]} (\|W_i(t)\|_C^2 + \|W_i(t)\|_{H_w^1}^2) + \int_0^T \|W_i(s)\|_{H_w^1}^2 ds \right), M_W^2(0) = \sum_{i=1}^5 \sup_{t \in [-\tau, 0]} (\|W_{i0}(t)\|_C^2 + \|W_{i0}(t)\|_{H_w^1}^2) + \int_{-\tau}^0 \|W_{20}(s)\|_{H_w^1}^2 ds + \int_{-\tau}^0 \|W_{50}(s)\|_{H_w^1}^2 ds$, 其中 $T > 0$ 。从而定理 1 等价于下面的结论(定理 2)。

定理 2 (行波解的稳定性) 假设 $\tau \in (0, \tau_0)$, 其中 τ_0 为正常数, 且 $(H_1) \sim (H_2)$ 成立。若 c 满足(9)式, 初始扰动满足:

$$\begin{cases} W_{i0}(\xi) \in C(\mathbb{R}) \cap H_w^1(\mathbb{R}), i = 1, 3, 4 \\ W_{i0}(\xi) \in C([- \tau, 0]; C(\mathbb{R}) \cap H_w^1(\mathbb{R})) \cap L^2([- \tau, 0]; H_w^1(\mathbb{R})), i = 2, 5 \end{cases}$$

和 $\lim_{x \rightarrow \infty} W_{i0}(\xi) := W_{i0, \infty} (i = 1, 3, 4), \lim_{x \rightarrow \infty} W_{i0}(\xi, s) := W_{i0, \infty}(s) \in C[-\tau, 0] (i = 2, 5)$ 关于 $s \in [-\tau, 0]$ 一致存在, 则存在正常数 δ_0 和 ν , 使得当 $M_W(0) \leq \delta_0$ 时, 解 W 在 $\mathcal{X}(-\tau, \infty)$ 上全局存在, 并满足

$$\sum_{i=1}^5 (\|W_i(t)\|_C^2 + \|W_i(t)\|_{H_w^1}^2) \leq Ce^{-2\nu t} M_W^2(0), t \in [0, \infty) \quad (14)$$

2 主要结论的证明

引理 4 (扰动解的局部存在唯一性) 假设 $(H_1) \sim (H_2)$ 成立, 对于满足 $c > c^*$ 的行波解 $\phi_i(x + ct) = \phi_i(\xi) (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, 若初始扰动满足:

$$(W_{10}(\xi), W_{20}(\xi, s), W_{30}(\xi), W_{40}(\xi), W_{50}(\xi, s)) \in \mathcal{X}(-\tau, 0)$$

且 $M_W(0) \leq \delta_1$, 则存在充分小的正数 $t_0 = t_0(\delta_1) > 0$, 使得初值问题(13)的解 $W_i(\xi, t) (i = 1, 2, 3, 4, 5) \in \mathcal{X}(-\tau, t_0)$ 关于 $t \in [-\tau, t_0]$ 局部存在且唯一, 以及存在常数 $\eta_0 > 1$, 使 $M_W(t_0) \leq \eta_0 M_W(0)$, 其中, $\tau_1 = \tau_3 = \tau_4 = 0, \tau_2 = \tau_5 = \tau$ 。

利用标准迭代法^[18-19]证明引理 4 是平凡的, 故此省略。为了证明系统(5)单稳行波解的稳定性, 还需要建立扰动系统(13)的解(即扰动解)的先验估计。为此, 令

$$\mathcal{A}_{i, \nu, \omega}(\xi) = \mathcal{B}_{i, \omega}(\xi) - 2\nu, i = 1, 3, 4$$

$$\mathcal{A}_{2, \nu, \omega}(\xi) = \mathcal{B}_{2, \omega}(\xi) - 2\nu - 2(e^{2\nu\tau} - 1)(L_2 e^{-\lambda c\tau} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) \phi_4(\xi + y + c\tau) dy)$$

$$\mathcal{A}_{5, \nu, \omega}(\xi) = \mathcal{B}_{5, \omega}(\xi) - 2\nu - 2(e^{2\nu\tau} - 1)(L_1 e^{-\lambda c\tau} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + c\tau) dy)$$

$$\text{其中, } \mathcal{B}_{1, \omega}(\xi) = -c \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - d_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_1 + l_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy - l_1 \phi_1(\xi)$$

$$\mathcal{B}_{2, \omega}(\xi) = -c \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - d_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_2 + 2\mu_h + \alpha_h - l_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy - l_1 \phi_1(\xi) -$$

$$\begin{aligned}
& 2l_2 e^{-\lambda c \tau} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) \phi_4(\xi + y + c\tau) dy \\
\mathcal{B}_{3,\omega}(\xi) &= -c \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - d_3 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_3 - \alpha_h \\
\mathcal{B}_{4,\omega}(\xi) &= -c \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - d_4 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_4 + l_2 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_2(\xi - y - c\tau) dy - l_2 \phi_4(\xi) \\
\mathcal{B}_{5,\omega}(\xi) &= -c \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - d_5 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_5 + 2\mu_v - l_2 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_2(\xi - y - c\tau) dy - l_2 \phi_4(\xi) - \\
& 2l_1 e^{-\lambda c \tau} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + c\tau) dy
\end{aligned}$$

引理 5 (关键不等式) 假设(9)式成立, 则当 $\xi \in \mathbb{R}$ 和 $0 < \nu < \bar{\nu} := \min \nu'_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 时, 有 $\mathcal{A}_{i,\nu,\omega}(\xi) > 0, i=1, 2, 3, 4, 5$, 其中, $\omega(\xi)$ 是(8)式中定义的加权函数。 $\nu'_1, \nu'_3, \nu'_4 > 0$ 分别是 $C_i - 2\nu = 0, i=1, 3, 4$ 的唯一解; ν'_2, ν'_5 分别是 $C_2 - 2\nu - 2(e^{2\nu\tau} - 1)(l_2 S_v^0 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) dy) = 0, C_5 - 2\nu - 2(e^{2\nu\tau} - 1)(l_1 S_h^0 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) dy) = 0$ 的唯一解。

证明 由(8)式可知 $\frac{\omega(\xi + c\tau)}{\omega(\xi)} = e^{-\lambda c \tau} \leq 1, \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} = -\lambda$ 。利用(9)式, 有:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{1,\omega}(\xi) &= c\lambda - d_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_1 + l_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy - l_1 \phi_1(\xi) > \\
& c\lambda - d_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_1 - l_1 S_h^0 > c\lambda_1 - d_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 y} \mathcal{J}(y) dy + d_1 - l_1 S_h^0 := C_1 > 0 (c > c_1) \\
\mathcal{B}_{2,\omega}(\xi) &= c\lambda - d_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_2 + 2\mu_h + \alpha_h - l_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy - l_1 \phi_1(\xi) - \\
& 2l_2 e^{-\lambda c \tau} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) \phi_4(\xi + y + c\tau) dy > \\
& c\lambda - d_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_2 + 2\mu_h + \alpha_h - N_2 - l_1 S_h^0 - 2l_2 S_v^0 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) dy > \\
& c\lambda_1 - d_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 y} \mathcal{J}(y) dy + d_2 + 2\mu_h + \alpha_h - N_2 - l_1 S_h^0 - 2l_2 S_v^0 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 y} \mathcal{G}(y) dy := C_2 > 0 (c > c_2) \\
\mathcal{B}_{3,\omega}(\xi) &= c\lambda - d_3 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_3 - \alpha_h > c\lambda - d_3 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_3 - \alpha_h > \\
& c\lambda_1 - d_3 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 y} \mathcal{J}(y) dy + d_3 - \alpha_h := C_3 > 0 (c > c_3) \\
\mathcal{B}_{4,\omega}(\xi) &= c\lambda - d_4 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_4 + l_2 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_2(\xi - y - c\tau) dy - l_2 \phi_4(\xi) > \\
& c\lambda - d_4 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_4 - l_2 S_v^0 > c\lambda_1 - d_4 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 y} \mathcal{J}(y) dy + d_4 - l_2 S_v^0 := C_4 > 0 (c > c_4) \\
\mathcal{B}_{5,\omega}(\xi) &= c\lambda - d_5 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_5 + 2\mu_v - l_2 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_2(\xi - y - c\tau) dy - l_2 \phi_4(\xi) - \\
& 2l_1 e^{-\lambda c \tau} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + c\tau) dy > \\
& c\lambda - d_5 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy + d_5 + 2\mu_v - N_1 - l_2 S_v^0 - 2l_1 S_h^0 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) dy > \\
& c\lambda_1 - d_5 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 y} \mathcal{J}(y) dy + d_5 + 2\mu_v - N_1 - l_2 S_v^0 - 2l_1 S_h^0 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 y} \mathcal{G}(y) dy := C_5 > 0 (c > c_5)
\end{aligned}$$

进而,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{1,\nu,\omega}(\xi) &= \mathcal{B}_{1,\omega}(\xi) - 2\nu > C_1 - 2\nu > 0, \\
\mathcal{A}_{2,\nu,\omega}(\xi) &= \mathcal{B}_{2,\omega}(\xi) - 2\nu - 2(e^{2\nu\tau} - 1)(l_2 e^{-\lambda c \tau} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) \phi_4(\xi + y + c\tau) dy) > \\
& C_2 - 2\nu - 2(e^{2\nu\tau} - 1)(l_2 S_v^0 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) dy) > 0, \\
\mathcal{A}_{3,\nu,\omega}(\xi) &= \mathcal{B}_{3,\omega}(\xi) - 2\nu > C_3 - 2\nu > 0, \mathcal{A}_{4,\nu,\omega}(\xi) = \mathcal{B}_{4,\omega}(\xi) - 2\nu > C_4 - 2\nu > 0 \\
\mathcal{A}_{5,\nu,\omega}(\xi) &= \mathcal{B}_{5,\omega}(\xi) - 2\nu - 2(e^{2\nu\tau} - 1)(l_1 e^{-\lambda c \tau} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + c\tau) dy) >
\end{aligned}$$

$$C_5 - 2\nu - 2(e^{2\nu\tau} - 1)(l_1 S_h^0 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{G}(y) dy) > 0.$$

证毕。

引理 6 (先验估计) 设 $(W_1(\xi, t), W_2(\xi, t), W_3(\xi, t), W_4(\xi, t), W_5(\xi, t)) \in \mathcal{X}(-\tau, T)$ 是系统(13)的局部解, 则存在不依赖于 $T > 0$ 的常数 $\delta_2 > 0, \nu > 0$ 和 $C > 1$, 得当 $M_W(T) \leq \delta_2$ 时,

$$\sum_{i=1}^5 [\|W_i(t)\|_C^2 + \|W_i(t)\|_{H_w^1}^2 + \int_0^t e^{-2\nu(t-s)} \|W_i(s)\|_{H_w^1}^2 ds] \leq C e^{-2\nu t} M_W^2(0), t \in [0, T] \quad (15)$$

为了证明引理 6, 还需如下结论成立(引理 7~9)。

引理 7 令 $W_i(\xi, t) \in \mathcal{X}(-\tau, T)$, 若 $0 < \nu < \bar{\nu}$ 并且 $M_W(T) \ll 1$, 则存在正常数 δ_2 和 ν , 有:

$$\sum_{i=1}^5 [\|W_i(t)\|_{H_w^1}^2 + \int_0^t e^{-2\nu(t-s)} \|W_i(s)\|_{H_w^1}^2 ds] \leq C e^{-2\nu t} [\sum_{i=1}^5 \|W_{i0}(0)\|_{H_w^1}^2 + \int_{-\tau}^0 \|W_{20}(s)\|_{H_w^1}^2 + \|W_{50}(s)\|_{H_w^1}^2 ds] \quad (16)$$

其中 $t \in [0, T]$ 。

证明 首先, 在 $L_w^2(\mathbb{R})$ 中估计 $W_i(\xi, t)$ 。为此, (13) 式的第一个方程两边同乘 $e^{2\nu t} \omega(\xi) W_1(\xi, t)$, 可得:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} e^{2\nu t} \omega(\xi) W_1^2(\xi, t) \right\}_t + \left\{ \frac{1}{2} c \omega(\xi) W_1^2(\xi, t) \right\}_\xi e^{2\nu t} - d_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) W_1(\xi - y, t) dy - \right. \\ & \left. W_1(\xi, t) \right) e^{2\nu t} \omega(\xi) W_1(\xi, t) + \left[l_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy - \frac{c}{2} \cdot \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - \nu \right] e^{2\nu t} \omega(\xi) \cdot \\ & W_1^2(\xi, t) + l_1 \phi_1(\xi) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) W_5(\xi - y - c\tau, t - \tau) dy e^{2\nu t} \omega(\xi) W_1(\xi, t) = \\ & -Q_1(W_1(\xi, t), \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, t - \tau)) e^{2\nu t} \omega(\xi) W_1(\xi, t) \end{aligned} \quad (17)$$

此外, 由 $\sqrt{\omega} W_i \in H^1(\mathbb{R})$ 可知, $\sqrt{\omega} W_i \Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} = 0$, 故有 $(c\omega W_i^2) \Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$ 。在 $\mathbb{R} \times [0, t]$ 上对(17)式等号两边关于 (ξ, t) 积分, 可知:

$$\begin{aligned} & e^{2\nu t} \|W_1(t)\|_{L_w^2}^2 - 2d_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) W_1(\xi - y, s) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1(\xi, s) dy d\xi ds + \\ & 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[d_1 + l_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy - \frac{c}{2} \cdot \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - \nu \right] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) d\xi ds + \\ & 2l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi_1(\xi) \mathcal{G}(y) W_5(\xi - y - c\tau, s - \tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1(\xi, s) dy d\xi ds \leq \\ & 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} -Q_1(W_1(\xi, s), \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, s - \tau)) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1(\xi, s) d\xi ds + \|W_{10}(0)\|_{L_w^2}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

接下来, 对(18)式左边第 2 项和第 4 项分别运用 Cauchy-Schwarz 不等式和变量替换, 可得:

$$\begin{aligned} & 2d_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) W_1(\xi - y, s) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1(\xi, s) dy d\xi ds \leq \\ & d_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) d\xi ds + d_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) e^{-\lambda y} dy d\xi ds \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & |2l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi_1(\xi) \mathcal{G}(y) W_5(\xi - y - c\tau, s - \tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1(\xi, s) dy d\xi ds| \leq \\ & l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi_1(\xi) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) d\xi ds + l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi_1(\xi) e^{2\nu s} \omega(\xi) \mathcal{G}(y) W_5^2(\xi - y - c\tau, s - \tau) dy d\xi ds \leq \\ & l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi_1(\xi) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) d\xi ds + \\ & l_1 e^{2\nu\tau} \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{50}^2(\xi, s) dy d\xi ds + \\ & l_1 e^{2\nu\tau} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_5^2(\xi, s) dy d\xi ds \end{aligned} \quad (20)$$

结合(18)~(20)式, 可知:

$$e^{2\nu t} \|W_1(t)\|_{L_w^2}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[d_1 + 2l_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy - l_1 \phi_1(\xi) - c \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - 2\nu - \right.$$

$$\begin{aligned}
& d_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) d\xi ds \leq \\
& \|W_{10}(0)\|_{L_w^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |Q_1(W_1(\xi, s), \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, s - \tau))| e^{2\nu s} \omega(\xi) |W_1(\xi, s)| d\xi ds + \\
& l_1 e^{2\nu\tau} \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(c\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{50}^2(\xi, s) dy d\xi ds + \\
& l_1 e^{2\nu\tau} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(c\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_5^2(\xi, s) dy d\xi ds
\end{aligned} \quad (21)$$

对(13)式的第2个方程两边同乘 $e^{2\nu t} \omega(\xi) W_2(\xi, t)$, 可得:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{2} e^{2\nu t} \omega(\xi) W_2^2(\xi, t) \right\}_t + \left\{ \frac{1}{2} c \omega(\xi) W_2^2(\xi, t) \right\}_\xi e^{2\nu t} - d_2 \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) W_2(\xi - y, t) dy - \right. \\
& \left. W_2(\xi, t) \right) e^{2\nu t} \omega(\xi) W_2(\xi, t) + \left[\mu_h + \alpha_h - \frac{c}{2} \cdot \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - \nu \right] e^{2\nu t} \omega(\xi) W_2^2(\xi, t) - l_1 W_1(\xi, t) W_2(\xi, t) \cdot \\
& \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy e^{2\nu t} \omega(\xi) - l_1 \phi_1(\xi) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) W_5(\xi - y - c\tau, t - \tau) dy e^{2\nu t} \omega(\xi) W_2(\xi, t) = \\
& Q_1(W_1(\xi, t), \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, t - \tau)) e^{2\nu t} \omega(\xi) W_2(\xi, t)
\end{aligned} \quad (22)$$

在 $\mathbb{R} \times [0, t]$ 上对(22)式等号两边关于 (ξ, t) 积分, 可知:

$$\begin{aligned}
& e^{2\nu t} \|W_2(t)\|_{L_w^2}^2 - 2d_2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) W_2(\xi - y, s) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2(\xi, s) dy d\xi ds + \\
& 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[d_2 + \mu_h + \alpha_h - \frac{c}{2} \cdot \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - \nu \right] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2^2(\xi, s) d\xi ds - 2l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) \cdot \\
& e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1(\xi, s) W_2(\xi, s) dy d\xi ds - \\
& 2l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi_1(\xi) \mathcal{G}(y) W_5(\xi - y - c\tau, s - \tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2(\xi, s) dy d\xi ds \leq \\
& 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Q_1(W_1(\xi, s), \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, s - \tau)) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2(\xi, s) d\xi ds + \|W_{20}(0)\|_{L_w^2}^2
\end{aligned} \quad (23)$$

运用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得:

$$\begin{aligned}
& |2l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) W_1(\xi, s) W_2(\xi, s) e^{2\nu s} \omega(\xi) dy d\xi ds| \leq \\
& l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) dy d\xi ds + \\
& l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2^2(\xi, s) dy d\xi ds \\
& |2l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi_1(\xi) \mathcal{G}(y) W_5(\xi - y - c\tau, s - \tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2(\xi, s) dy d\xi ds| \leq \\
& l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi_1(\xi) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2^2(\xi, s) d\xi ds + \\
& l_1 e^{2\nu\tau} \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(c\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{50}^2(\xi, s) dy d\xi ds + \\
& l_1 e^{2\nu\tau} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(c\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + cs) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_5^2(\xi, s) dy d\xi ds
\end{aligned} \quad (24)$$

结合(23)~(25)式, 可知:

$$\begin{aligned}
& e^{2\nu t} \|W_2(t)\|_{L_w^2}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[d_2 + 2\mu_h + 2\alpha_h - l_1 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi - y - c\tau) dy - l_1 \phi_1(\xi) - \right. \\
& \left. c \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - 2\nu - d_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy \right] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2^2(\xi, s) d\xi ds \leq \\
& \|W_{20}(0)\|_{L_w^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |Q_1(W_1(\xi, s), \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, s - \tau))| e^{2\nu s} \omega(\xi) |W_2(\xi, s)| d\xi ds + \\
& l_1 e^{2\nu\tau} \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(c\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{50}^2(\xi, s) dy d\xi ds +
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
& l_1 e^{2\nu\tau} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi+y+c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_5^2(\xi, s) dy d\xi ds + \\
& l_1 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_5(\xi-y-c\tau) dy e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) d\xi ds
\end{aligned} \quad (26)$$

对(13)式的第3个方程两边同乘 $e^{2\nu t} \omega(\xi) W_3(\xi, t)$, 可得:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{2} e^{2\nu t} \omega(\xi) W_3^2(\xi, t) \right\}_t + \left\{ \frac{1}{2} c \omega(\xi) W_3^2(\xi, t) \right\}_\xi e^{2\nu t} - d_3 \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) W_3(\xi-y, t) dy - \right. \\
& \left. W_3(\xi, t) \right) e^{2\nu t} \omega(\xi) W_3(\xi, t) - \alpha_h e^{2\nu t} \omega(\xi) W_2(\xi, t) W_3(\xi, t) - \left[\frac{c}{2} \cdot \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} + \nu \right] e^{2\nu t} \omega(\xi) W_3^2(\xi, t) = 0
\end{aligned} \quad (27)$$

在 $\mathbb{R} \times [0, t]$ 上对(27)式中的等式两边关于 (ξ, t) 积分, 可知:

$$\begin{aligned}
& e^{2\nu t} \|W_3(t)\|_{L_w^2}^2 - 2d_3 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) W_3(\xi-y, s) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_3(\xi, s) dy d\xi ds - \\
& 2\alpha_h \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2(\xi, s) W_3(\xi, s) d\xi ds + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[d_3 - \frac{c}{2} \cdot \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - \nu \right] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_3^2(\xi, s) d\xi ds \leq \|W_{30}(0)\|_{L_w^2}^2
\end{aligned} \quad (28)$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得:

$$\begin{aligned}
& |2\alpha_h \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2(\xi, s) W_3(\xi, s) d\xi ds| \leq \\
& \alpha_h \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2^2(\xi, s) d\xi ds + \alpha_h \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_3^2(\xi, s) d\xi ds
\end{aligned} \quad (29)$$

结合(28)~(29)式, 可知:

$$\begin{aligned}
& e^{2\nu t} \|W_3(t)\|_{L_w^2}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[d_3 - \alpha_h - c \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - 2\nu - d_3 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) e^{-\lambda y} dy \right] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_3^2(\xi, s) d\xi ds \leq \\
& \|W_{30}(0)\|_{L_w^2}^2 + \alpha_h \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2^2(\xi, s) d\xi ds
\end{aligned} \quad (30)$$

对(13)式的第4个方程作类似(21)式的估计, 可得:

$$\begin{aligned}
& e^{2\nu t} \|W_4(t)\|_{L_w^2}^2 - 2d_4 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}(y) W_4(\xi-y, s) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_4(\xi, s) dy d\xi ds + \\
& 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[d_4 + l_2 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_2(\xi-y-c\tau) dy - \frac{c}{2} \cdot \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - \nu \right] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_4^2(\xi, s) d\xi ds + \\
& 2l_2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi_4(\xi) \mathcal{G}(y) W_2(\xi-y-c\tau, s-\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{40}(\xi, s) dy d\xi ds \leq \\
& 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} -Q_2(\mathcal{G} * W_2(\xi-c\tau, s-\tau), W_4(\xi, s)) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_4(\xi, s) d\xi ds + \|W_{40}(0)\|_{L_w^2}^2
\end{aligned} \quad (31)$$

运用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得:

$$\begin{aligned}
& e^{2\nu t} \|W_4(t)\|_{L_w^2}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[d_4 + 2l_2 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_2(\xi-y-c\tau) dy - l_2 \phi_4(\xi) - c \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - 2\nu - \right. \\
& \left. d_4 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy \right] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_4^2(\xi, s) d\xi ds \leq \\
& \|W_{40}(0)\|_{L_w^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |Q_2(\mathcal{G} * W_2(\xi-c\tau, s-\tau), W_4(\xi, s))| e^{2\nu s} \omega(\xi) |W_4(\xi, s)| d\xi ds + \\
& l_2 e^{2\nu\tau} \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_4(\xi+y+c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{20}^2(\xi, s) dy d\xi ds + \\
& l_2 e^{2\nu\tau} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_4(\xi+y+c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2^2(\xi, s) dy d\xi ds
\end{aligned} \quad (32)$$

对(13)式的第5个方程作类似(26)式的估计, 可得:

$$e^{2\nu t} \|W_5(t)\|_{L_w^2}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[d_5 + 2\mu_v - l_2 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_2(\xi-y-c\tau) dy - l_2 \phi_4(\xi) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& c \frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)} - 2\nu - d_5 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mathcal{J}(y) dy] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_5^2(\xi, s) d\xi ds \leq \\
& \|W_{50}(0)\|_{L_w^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |Q_2(\mathcal{G} * W_2(\xi - c\tau, s - \tau), W_4(\xi, s))| e^{2\nu s} \omega(\xi) |W_5(\xi, s)| d\xi ds + \\
& l_2 e^{2\nu\tau} \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_4(\xi + y + c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{20}^2(\xi, s) dy d\xi ds + \\
& l_2 e^{2\nu\tau} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_4(\xi + y + c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2^2(\xi, s) dy d\xi ds + \\
& l_2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) \phi_2(\xi - y - c\tau) dy e^{2\nu s} \omega(\xi) W_4^2(\xi, s) d\xi ds
\end{aligned} \quad (33)$$

其中, $\frac{\omega(\xi+y)}{\omega(\xi)} = e^{-\lambda y}$, $\frac{\omega(\xi+c\tau)}{\omega(\xi)} = e^{-\lambda c\tau}$ 。故扰动解 $W_i(\xi, t)$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$) 满足:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^5 e^{2\nu t} \|W_i(t)\|_{L_w^2}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_{1,\nu,\omega}(\xi) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) d\xi ds + \\
& \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_{2,\nu,\omega}(\xi) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2^2(\xi, s) d\xi ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_{3,\nu,\omega}(\xi) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_3^2(\xi, s) d\xi ds + \\
& \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_{4,\nu,\omega}(\xi) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_4^2(\xi, s) d\xi ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_{5,\nu,\omega}(\xi) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_5^2(\xi, s) d\xi ds \leq \\
& \sum_{i=1}^5 \|W_{i0}(0)\|_{L_w^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |Q_1(W_1(\xi, s), \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, s - \tau))| e^{2\nu s} \omega(\xi) (|W_1(\xi, s)| + \\
& |W_2(\xi, s)|) d\xi ds + 2l_1 e^{2\nu\tau} \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi + y + c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{50}^2(\xi, s) dy d\xi ds + \\
& 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |Q_2(\mathcal{G} * W_2(\xi - c\tau, s - \tau), W_4(\xi, s))| e^{2\nu s} \omega(\xi) (|W_4(\xi, s)| + |W_5(\xi, s)|) d\xi ds + \\
& 2l_2 e^{2\nu\tau} \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_4(\xi + y + c\tau) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{20}^2(\xi, s) dy d\xi ds
\end{aligned} \quad (34)$$

下面估计(34)式中的 $Q_i(\cdot, \cdot)$ ($i=1, 2$)。由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Taylor 公式, 不难得到:

$$|Q_1(W_1(\xi, t), \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, t - \tau))| \leq C [W_1^2(\xi, t) + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) W_5^2(\xi - y - c\tau, t - \tau) dy] \quad (35)$$

$$|Q_2(\mathcal{G} * W_2(\xi - c\tau, t - \tau), W_4(\xi, t))| \leq C [W_4^2(\xi, t) + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) W_2^2(\xi - y - c\tau, t - \tau) dy] \quad (36)$$

又由 $M_W^2(\cdot)$ 的定义和(35)式可知:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |Q_1(W_1(\xi, s), \mathcal{G} * W_5(\xi - c\tau, s - \tau))| e^{2\nu s} \omega(\xi) (|W_1(\xi, s)| + |W_2(\xi, s)|) d\xi ds \leq \\
& CM_W(T) \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) d\xi ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(y) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_5^2(\xi - y - c\tau, s - \tau) dy d\xi ds \right] \leq \\
& CM_W(T) e^{2\nu\tau} \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) d\xi ds + \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{50}^2(\xi, s) d\xi ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_5^2(\xi, s) d\xi ds \right]
\end{aligned} \quad (37)$$

类似可得:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |Q_2(\mathcal{G} * W_2(\xi - c\tau, s - \tau), W_4(\xi, s))| e^{2\nu s} \omega(\xi) (|W_4(\xi, s)| + |W_5(\xi, s)|) d\xi ds \leq \\
& CM_W(T) e^{2\nu\tau} \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_4^2(\xi, s) d\xi ds + \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{20}^2(\xi, s) d\xi ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2^2(\xi, s) d\xi ds \right]
\end{aligned} \quad (38)$$

将(37)~(38)式代入(34)式, 可得:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^5 e^{2\nu t} \|W_i(t)\|_{L_w^2}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{A}_{1,\nu,\omega}(\xi) - CM_W(T) e^{2\nu\tau}] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_1^2(\xi, s) d\xi ds + \\
& \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{A}_{2,\nu,\omega}(\xi) - CM_W(T) e^{2\nu\tau}] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_2^2(\xi, s) d\xi ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_{3,\nu,\omega}(\xi) e^{2\nu s} \omega(\xi) W_3^2(\xi, s) d\xi ds +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{A}_{4,\nu,\omega}(\xi) - CM_W(T)e^{2\nu\tau}] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_4^2(\xi, s) d\xi ds + \\
& \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{A}_{5,\nu,\omega}(\xi) - CM_W(T)e^{2\nu\tau}] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_5^2(\xi, s) d\xi ds \leq \\
& \sum_{i=1}^5 \|W_{i0}(0)\|_{L_w^2}^2 + e^{2\nu\tau} \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} [2L_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_1(\xi+y+c\tau) dy + CM_W(T)] \cdot \\
& e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{50}^2(\xi, s) d\xi ds + e^{2\nu\tau} \int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}} [2L_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(\tau+y)} \mathcal{G}(y) \phi_4(\xi+y+c\tau) dy + \\
& CM_W(T)] e^{2\nu s} \omega(\xi) W_{20}^2(\xi, s) d\xi ds
\end{aligned} \quad (39)$$

由于 $M_W(T) \ll 1$, 并且当 $\xi \in \mathbb{R}$ 时有 $\mathcal{A}_{i,\nu,\omega}(\xi) > 0 (i=1, 2, 3, 4, 5)$, 故存在正常数 $\delta_3, \delta_4, \delta_5$, 和 δ_6 , 使得:

$$\mathcal{A}_{1,\nu,\omega}(\xi) - C\delta_3 e^{2\nu\tau} > 0, \mathcal{A}_{2,\nu,\omega}(\xi) - C\delta_4 e^{2\nu\tau} > 0, \mathcal{A}_{4,\nu,\omega}(\xi) - C\delta_5 e^{2\nu\tau} > 0, \mathcal{A}_{5,\nu,\omega}(\xi) - C\delta_6 e^{2\nu\tau} > 0$$

令 $\delta_2 := \min \{\delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6\}$, 则 $M_W(T) \leq \delta_2$ 时, 有 $\mathcal{A}_{i,\nu,\omega}(\xi) - CM_W(T)e^{2\nu\tau} > \mathcal{A}_{i,\nu,\omega}(\xi) - C\delta_2 e^{2\nu\tau} > 0 (i=1, 2, 4, 5)$ 。于是, 可得 $W_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 的能量估计:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^5 [\|W_i(t)\|_{L_w^2}^2 + \int_0^t e^{-2\nu(t-s)} \|W_i(s)\|_{L_w^2}^2 ds] \leq \\
& Ce^{-2\nu t} [\sum_{i=1}^5 \|W_{i0}(0)\|_{L_w^2}^2 + \int_{-\tau}^0 \|W_{20}(s)\|_{L_w^2}^2 ds + \int_{-\tau}^0 \|W_{50}(s)\|_{L_w^2}^2 ds]
\end{aligned} \quad (40)$$

类似(40)式的讨论过程, 可得 $W_{i\epsilon} (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 的能量估计:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^5 [\|W_{i\epsilon}(t)\|_{L_w^2}^2 + \int_0^t e^{-2\nu(t-s)} \|W_{i\epsilon}(s)\|_{L_w^2}^2 ds] \leq \\
& Ce^{-2\nu t} [\sum_{i=1}^5 \|W_{i0}(0)\|_{H_w^1}^2 + \int_{-\tau}^0 \|W_{20}(s)\|_{H_w^1}^2 ds + \int_{-\tau}^0 \|W_{50}(s)\|_{H_w^1}^2 ds]
\end{aligned} \quad (41)$$

因此, 结合(40)~(41)式有(16)式成立。证毕。

类似文献[19], 还可建立下面的引理 8。

引理 8 令 $W_i \in H_w^1(\mathbb{R})$, 则 $\sqrt{\omega} W_i \in H_w^1(\mathbb{R})$ 且 $\|\sqrt{\omega} W_i\|_C \leq C \|W_i\|_{H_w^1}$, 及 $\sup_{\xi \in (-\infty, \xi_0]} |W_i(\xi, t)| \leq Ce^{-\nu t} M_W(0)$,

$t > 0, i=1, 2, 3, 4, 5$ 。

最后, 还需建立 $W_i(\xi, t) (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 在 $\xi = +\infty$ 时的衰减估计。由于 $W_i(\xi, t) \in \mathcal{C}_{\text{unif}}[-\tau, T]$, 故 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} W_i(\xi, t)$ 关于 $t \in [0, T]$ 一致存在, 且 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} [\mathcal{J}^* W_i(\xi, t) - W_i(\xi, t)] = 0, t \in [0, T]$ 。令 $\tilde{W}_i(x, t) = u_i(x, t) - \phi_i(x + ct) = W_i(\xi, t), i=1, 2, 3, 4, 5$, 则 $\tilde{W}_i(x, t)$ 满足:

$$\begin{cases}
\tilde{W}_{1t}(x, t) - d_1(\mathcal{J}^* \tilde{W}_1(x, t) - \tilde{W}_1(x, t)) + l_1 \tilde{W}_1(x, t) \mathcal{G}^* \phi_5(\xi - c\tau) + \\
\quad l_1 \phi_1(\xi) \mathcal{G}^* \tilde{W}_5(x - c\tau, t - \tau) = -Q_1(\tilde{W}_1(x, t), \mathcal{G}^* \tilde{W}_5(x - c\tau, t - \tau)) \\
\tilde{W}_{2t}(x, t) - d_2(\mathcal{J}^* \tilde{W}_2(x, t) - \tilde{W}_2(x, t)) - l_1 \tilde{W}_1(x, t) \mathcal{G}^* \phi_5(\xi - c\tau) - \\
\quad l_1 \phi_1(\xi) \mathcal{G}^* \tilde{W}_5(x - c\tau, t - \tau) + (\mu_h + \alpha_h) \tilde{W}_2(x, t) = Q_1(\tilde{W}_1(x, t), \mathcal{G}^* \tilde{W}_5(x - c\tau, t - \tau)) \\
\tilde{W}_{3t}(x, t) - d_3(\mathcal{J}^* \tilde{W}_3(x, t) - \tilde{W}_3(x, t)) - \alpha_h \tilde{W}_3(x, t) = 0 \\
\tilde{W}_{4t}(x, t) - d_4(\mathcal{J}^* \tilde{W}_4(x, t) - \tilde{W}_4(x, t)) + l_2 \tilde{W}_4(x, t) \mathcal{G}^* \phi_2(\xi - c\tau) + \\
\quad l_2 \phi_4(\xi) \mathcal{G}^* \tilde{W}_2(x - c\tau, t - \tau) = -Q_2(\mathcal{G}^* \tilde{W}_2(x - c\tau, t - \tau), \tilde{W}_4(x, t)) \\
\tilde{W}_{5t}(x, t) - d_5(\mathcal{J}^* \tilde{W}_5(x, t) - \tilde{W}_5(x, t)) - l_2 \tilde{W}_4(x, t) \mathcal{G}^* \phi_2(\xi - c\tau) - \\
\quad l_2 \phi_4(\xi) \mathcal{G}^* \tilde{W}_2(x - c\tau, t - \tau) + \mu_v \tilde{W}_5(x, t) = Q_2(\mathcal{G}^* \tilde{W}_2(x - c\tau, t - \tau), \tilde{W}_4(x, t)) \\
\tilde{W}_i(x, 0) = \tilde{W}_{i0}(x), x \in \mathbb{R}, i=1, 3, 4 \\
\tilde{W}_i(x, s) = \tilde{W}_{i0}(x, s), (x, s) \in \mathbb{R} \times [-\tau, 0], i=2, 5
\end{cases} \quad (42)$$

和 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} W_i(\xi, t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{W}_i(x, t) = \tilde{W}_i(\infty, t) (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 关于 $t \in [0, T]$ 一致存在。在(42)式中, 令 $x \rightarrow +\infty$, 可得:

$$\begin{cases} \tilde{W}_{1t}(\infty, t) + l_1 \tilde{W}_1(\infty, t) \phi_5(\infty) + l_1 \phi_1(\infty) \tilde{W}_5(\infty, t - \tau) = -Q_1(\tilde{W}_1(\infty, t), \mathcal{G}^* \tilde{W}_5(\infty, t - \tau)) \\ \tilde{W}_{2t}(\infty, t) - l_1 \tilde{W}_1(\infty, t) \phi_5(\infty) - l_1 \phi_1(\infty) \tilde{W}_5(\infty, t - \tau) + (\mu_h + \alpha_h) \tilde{W}_2(\infty, t) = Q_1(\tilde{W}_1(\infty, t), \tilde{W}_5(\infty, t - \tau)) \\ \tilde{W}_{3t}(\infty, t) - \alpha_h \tilde{W}_3(\infty, t) = 0 \\ \tilde{W}_{4t}(\infty, t) + l_2 \tilde{W}_4(\infty, t) \phi_2(\infty) + l_2 \phi_4(\infty) \tilde{W}_2(\infty, t - \tau) = -Q_2(\mathcal{G}^* \tilde{W}_2(\infty, t - \tau), \tilde{W}_4(\infty, t)) \\ \tilde{W}_{5t}(\infty, t) - l_2 \tilde{W}_4(\infty, t) \phi_2(\infty) - l_2 \phi_4(\infty) \tilde{W}_2(\infty, t - \tau) + \mu_v \tilde{W}_5(\infty, t) = Q_2(\tilde{W}_2(\infty, t - \tau), \tilde{W}_4(\infty, t)) \\ \tilde{W}_i(\infty, 0) = \tilde{W}_{i0}(\infty), i = 1, 3, 4 \\ \tilde{W}_i(\infty, s) = \tilde{W}_{i0}(\infty, s), s \in [-\tau, 0], i = 2, 5 \end{cases} \quad (43)$$

接下来,为了估计非线性时滞系统(43),考虑其相应的线性系统 $\tilde{W}'(t) = A\tilde{W}(t) + B\tilde{W}(t - \tau)$, 其中, $\tilde{W}(\cdot) = (\tilde{W}_1(\cdot), \tilde{W}_2(\cdot), \tilde{W}_3(\cdot), \tilde{W}_4(\cdot), \tilde{W}_5(\cdot))^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -l_1 \phi_5(\infty) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 \phi_5(\infty) & -(\mu_h + \alpha_h) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l_2 \phi_2(\infty) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_2 \phi_2(\infty) & -\mu_v \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -l_1 \phi_1(\infty) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 \phi_1(\infty) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 \phi_4(\infty) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 \phi_4(\infty) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

考虑满足初值 $\Psi(s) = (\tilde{W}_{10}(\infty, 0), \tilde{W}_{20}(\infty, s), \tilde{W}_{30}(\infty, 0), \tilde{W}_{40}(\infty, 0), \tilde{W}_{50}(\infty, s))^T, s \in [-\tau, 0]$ 的常微分方程 $\tilde{W}'(t) = P\tilde{W}(t)$, 其中 $P = A + B$ 。利用 Hurwitz 判据可知, 矩阵 P 的所有特征值均有负实部。类似文献[19]的引理 3.9 可知, 存在正常数 ϵ , 使得 $|\tilde{W}_i(\infty, t)| = |W_i(\infty, t)| \leq CM_w(0)e^{-\epsilon t}, t \in [0, T]$, 故可得引理 9。

引理 9 假设 $\tau \in (0, \tau_0)$, 则存在常数 $\epsilon > 0$ 和不依赖于 t 且充分大的常数 $\xi_0 \gg 1$ 使得

$$\sup_{\xi \in (\xi_0, \infty)} |W_i(\xi, t)| \leq CM_w(0)e^{-\epsilon t}, t \in [0, T], i = 1, 2, 3, 4, 5$$

从而, 可选择满足 $0 < \nu < \min\{\epsilon, \bar{\nu}\}$ 的 ν , 结合引理 8 和引理 9, 可得引理 6。

定理 2 的证明 由引理 6 可知, 存在 δ_2, ν 和 C 为不依赖于 T 的正常数。令 $\delta_1 = \max\{\sqrt{C} m_0 M_w(0), \delta_2\}$, $\delta_0 = \min\{\frac{\delta_2}{m_0}, \frac{\delta_2}{\sqrt{C} m_0}\}$ 。由引理 4 可知, 存在 $t_0 = t_0(\delta_1) > 0$ 使得 $W(\xi, t) \in \mathcal{X}(-\tau, t_0)$ 。根据 δ_0 和 δ_1 的定义, 可得 $M_w(t_0) \leq \delta_2$ 。在区间 $[0, t_0]$ 上应用引理 6, 可建立当 $t \in [0, t_0]$ 时 $W_i(\xi, t) (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 的指数衰减估计(15)式。接下来, 考虑具有初始数据

$$\begin{cases} W_i(\xi, s_1) = W_{i0}(\xi, s_1), \xi \in \mathbb{R}, s_1 \in [0, t_0], i = 1, 3, 4 \\ W_i(\xi, s) = W_{i0}(\xi, s), \xi \in \mathbb{R}, s \in [t_0 - \tau, t_0], i = 2, 5 \end{cases} \quad (44)$$

的系统(13)。再次借助引理 4, 可证明当 $t \in [t_0, 2t_0]$ 时满足初始条件(44)的 Cauchy 问题解的存在性, 即 $W(\xi, t) \in \mathcal{X}(-\tau, 2t_0)$ 。从而, 解的时间区间延拓到了 $[-\tau, 2t_0]$, 则由引理 6, 可以建立当 $t \in [0, 2t_0]$ 时 $W_i(\xi, t) (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 的指数衰减估计(15)式。重复上述过程, 可得 $W(\xi, t) \in \mathcal{X}(-\tau, \infty)$, 且当 $t \in [0, \infty]$ 时, $W_i(\xi, t)$ 满足指数衰减估计(15)式。证毕。

3 结 语

本文主要研究了一类具有空间非局部效应的时滞登革热模型单稳行波解的稳定性。基于目前对登革热模型的研究大多是单稳行波解的存在性结果, 我们的工作不仅将 Laplace 扩散登革热模型的研究推广到了非局部扩散情形, 还补充完善了对登革热传染病模型单稳行波解的稳定性分析。从传染病学角度, 行波解的稳定性决定了疾病的传播形式与发展态势是否发生大的改变: 一旦传染波不稳定, 传播形式和性态发生改变, 传染病的发展态势难以预测。因此, 本文得到的行波解是指数稳定的这一结果, 表明经历长时间后, 登革热的传播终将趋于稳定, 这为理解此类传染病的传播机制与防控策略提供了理论依据。

参考文献:

- [1] ESTEVA L, VARGAS C. Analysis of a dengue disease transmission model[J]. *Mathematical Biosciences*, 1998, **150**(2): 131–151. DOI: 10.1016/S0025-5564(98)10003-2.
- [2] PONGSUMPUN P, TANG I M. Transmission of dengue hemorrhagic fever in an age structured population[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2003, **37**(9/10): 949–961. DOI: 10.1016/S0895-7177(03)00111-0.
- [3] CAI L M, GUO S M, LI X Z, *et al.* Global dynamics of a dengue epidemic mathematical model[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, **42**(4): 2297–2304. DOI: 10.1016/j.chaos.2009.03.130.
- [4] LIU Q, JIANG D Q, HAYAT T, *et al.* Stationary distribution and extinction of a stochastic dengue epidemic model[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, **355**(17): 8891–8914. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2018.10.003.
- [5] 王凯, 赵洪涌. 一类具有时滞的反应扩散登革热传染病模型的行波解[J]. *数学物理学报*, 2022, **42**(4): 1209–1226. DOI: 10.3969/j.issn.1003-3998.2022.04.017.
WANG K, ZHAO H Y. Traveling wave of a reaction-diffusion dengue epidemic model with time delays[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2022, **42**(4): 1209–1226. DOI: 10.3969/j.issn.1003-3998.2022.04.017(Ch).
- [6] YU Z X, YUAN R, HSU C H, *et al.* Traveling waves for nonlinear cellular neural networks with distributed delays[J]. *Journal of Differential Equations*, 2011, **251**(3): 630–650. DOI: 10.1016/j.jde.2011.05.008.
- [7] MA Z H, YUAN R. Traveling wave solutions of a nonlocal dispersal SIRS model with spatio-temporal delay[J]. *International Journal of Biomathematics*, 2017, **10**(5): 1750071. DOI: 10.1142/s1793524517500711.
- [8] MEI M, WANG Y. Remark on stability of traveling waves for nonlocal Fisher-KPP equations[J]. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling: Series B*, 2011, **2**(4): 379–401.
- [9] LIN C K, LIN C T, LIN Y P, *et al.* Exponential stability of nonmonotone traveling waves for Nicholson's blowflies equation[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2014, **46**(2): 1053–1084. DOI: 10.1137/120904391.
- [10] CHERN I L, MEI M, YANG X F, *et al.* Stability of non-monotone critical traveling waves for reaction-diffusion equations with time-delay[J]. *Journal of Differential Equations*, 2015, **259**(4): 1503–1541. DOI: 10.1016/j.jde.2015.03.003.
- [11] MEI M, ZHANG K, ZHANG Q. Global stability of traveling waves with oscillations for Nicholson's blowflies equation[DB/OL]. [2025-01-02]. <https://arxiv.org/pdf/1802.09150>.
- [12] MEI M, ZHANG K J, ZHANG Q F. Global stability of critical traveling waves with oscillations for time-delayed reaction-diffusion equations[J]. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2019, **16**(3): 375–397.
- [13] LIU K P, YANG Y R, YANG Y. Stability of monostable waves for a nonlocal equation with delay and without quasi-monotonicity[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2019, **39**(6): 1589–1604. DOI: 10.1007/s10473-019-0610-y.
- [14] 李孝武, 杨赞瑞, 刘凯凯. 一类时滞非局部扩散 SVIR 模型单稳行波解的稳定性[J]. *浙江大学学报(理学版)*, 2023, **50**(3): 273–286. DOI: 10.3785/j.issn.1008-9497.2023.03.003.
LI X W, YANG Y R, LIU K K. Stability of monostable traveling waves for a class of SVIR models with nonlocal diffusion and delay[J]. *Journal of Zhejiang University (Science Edition)*, 2023, **50**(3): 273–286. DOI: 10.3785/j.issn.1008-9497.2023.03.003(Ch).
- [15] ZHANG G B. Global stability of non-monotone traveling wave solutions for a nonlocal dispersal equation with time delay[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, **475**(1): 605–627. DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.02.058.
- [16] LIU K K, YANG Y R. Global stability of traveling waves for a SIR model with nonlocal dispersal and delay[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2022, **63**(2): 021504. DOI: 10.1063/5.0064462.
- [17] MA Z H, YUAN R, WANG Y, *et al.* Multidimensional stability of planar traveling waves for the delayed nonlocal dispersal competitive Lotka-Volterra system[J]. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 2019, **18**(4): 2069–2092. DOI: 10.3934/cpaa.2019093.
- [18] YANG Y R, LI W T, WU S L. Stability of traveling waves in a monostable delayed system without quasi-monotonicity[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2013, **14**(3): 1511–1526. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2012.10.015.
- [19] LI Y, LI W T, ZHANG G B. Stability and uniqueness of traveling waves of a non-local dispersal SIR epidemic model[J]. *Dynamics of Partial Differential Equations*, 2017, **14**(2): 87–123. DOI: 10.4310/dpde.2017.v14.n2.a1.
- [20] 邢晓研. 非局部扩散下具有快慢进展的结核病模型行波解的存在性[D]. 长春: 东北师范大学, 2022. DOI: 10.27011/d.cnki.gdbsu.2022.001611.
XING X Y. Existence of traveling wave solutions for a nonlocal diffusive tuberculosis model with fast and slow progression[D]. Changchun: Northeast Normal University, 2022. DOI: 10.27011/d.cnki.gdbsu.2022.001611(Ch).
- [21] YANG L, YANG Y R, SONG X. Traveling waves in a SIRH model with spatio-temporal delay and nonlocal dispersal[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2022, **42**(2): 715–736. DOI: 10.1007/s10473-022-0218-5.

□