文章编号:1673-0291(2026)02-0034-12 **DOI**:10.11860/j.issn.1673-0291.20250018

复杂入渗边界下非饱和渗流过程的解析计算

陈佩佩[1a,2],乔 栋[1b],张兴博[1b],殷凤岭[1b],白 冰[3]
(1.北京建筑大学a.理学院,b.土木与交通工程学院,北京 100044;2.北京工业大学 城市建设学部,北京 100124;
3.北京交通大学 土木建筑工程学院,北京 100044)

摘 要:针对地表土层在复杂边界条件下的非饱和渗流问题,采用无量纲线性化方法和方程齐次化构造原理等数学技术,构建复杂入渗条件下积水前、后两个不同入渗阶段非饱和渗流的线性化理论模型,求解得到相应的非饱和渗流过程中渗透系数、基质吸力水头和体积含水率等的解析表达式,同时给出地表积水时间的计算方法,数值验证解析计算方法的可靠性.结果表明:周期地表边界下特征点的体积含水率和基质吸力水头均随地表边界呈现出相同的周期变化特征,与地表条件相比,临近地表处的特征点具有一定的相位延滞现象;体积含水率和基质吸力水头周期演变曲线的波峰和波谷均随时间而增大.渗流速率演变曲线的周期与地表边界的周期相同,但振幅显著减小,表明土层对渗流速率的周期变化存在"削峰"作用,且该作用随着深度的增加而变强.持续入渗情况下,地表积水前土层的上半部分为入渗状态,而其下部在地下水位作用下则呈现为蒸发状态,地表积水后整个土层均表现为持续入渗且土层最终会趋于饱和.持续入渗下土层中的体积含水率和基质吸力水头的演变特征是地表边界和地下水共同作用的体现.研究工作对于非饱和渗流水文过程分析和地质灾害防治等具有一定的理论意义和应用价值.

关键词:复杂地表边界;地表积水;非饱和渗流;解析计算;周期演变特征
中图分类号:TU43 **文献标志码**:A

Analytical calculation of unsaturated seepage process under complex infiltration boundary

CHEN Peipei[1a, 2], *QIAO Dong*[1b], *ZHANG Xingbo*[1b], *YIN Fengling*[1b], *BAI Bing*[3]
(1a. School of science, 1b. School of Civil and Transportation Engineering, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China; 2.Faculty of Architecture, Civil And Transportation Engineering, Beijing University of Technology, Beijing, 100124, China; 3. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: To address the unsaturated seepage problem in surface soil layers under complex boundary conditions, linearized theoretical models for unsaturated seepage during two distinct infiltration stages, pre-ponding and post-ponding, are established using mathematical techniques such as dimensionless linearization and the principle of equation homogenization. Analytical expressions for hydraulic conductivity, matric suction head, and volumetric water content during the corresponding unsaturated

收稿日期:2025-02-18;**修回日期**:2025-04-19
基金项目:国家自然科学基金(51808026)
Foundation item: National Natural Science Foundation of China (51808026)
第一作者:陈佩佩(1987—),男,山东德州人,副教授,博士.研究方向为无网格数值算法及环境岩土力学. **email**:chenpeipei@bucea.edu.cn.
通信作者:白冰(1966—),男,内蒙古包头人,教授,博士,博士生导师. **email**:bbai@bjtu.edu.cn.

引用格式:陈佩佩,乔栋,张兴博,等.复杂入渗边界下非饱和渗流过程的解析计算[J].北京交通大学学报,2026,50(2):34-45.
CHEN Peipei, QIAO Dong, ZHANG Xingbo, et al. Analytical calculation of unsaturated seepage process under complex infiltration boundary[J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2026, 50(2): 34-45. (in Chinese)

seepage processes are derived. Additionally, a method for calculating surface ponding time is proposed, and the reliability of this analytical approach is verified numerically. The results indicate that under periodic surface boundary conditions, both the volumetric water content and matric suction head at characteristic points exhibit periodic variations consistent with the surface boundary. Compared to surface conditions, characteristic points near the surface display a distinct phase lag. Furthermore, the peaks and troughs of the periodic evolution curves for volumetric water content and matric suction head increase over time. The period of the seepage rate evolution curve matches that of the surface boundary, but its amplitude is significantly reduced, indicating that the soil layer exerts an attenuation or "peak-clipping" effect on the periodic fluctuations of the seepage rate, an effect that becomes more pronounced with increasing depth.Under continuous infiltration conditions, prior to surface ponding, the upper portion of the soil layer is in an infiltration state, whereas the lower portion is in an evaporation state due to the influence of the groundwater table. Following surface ponding, the entire soil layer transitions to a state of sustained infiltration, ultimately approaching saturation. The evolution characteristics of volumetric water content and matric suction head within the soil layer under continuous infiltration reflect the combined effects of the surface boundary and groundwater. This study offers significant theoretical and practical value for analyzing unsaturated seepage hydrological processes and for the prevention and mitigation of geological hazards.

Keywords: complex surface boundaries; surface ponding; unsaturated seepage; analytical calculation; periodic evolution characteristics

非饱和渗流在岩土工程实践中具有广泛的应用背景,是环境岩土工程和工程地质领域的研究热点.事实上,降雨诱发的边坡破坏和路堤失稳等灾害频繁发生,研究表明此类问题的发生均与土体复杂入渗边界下的非饱和渗流密切相关[1-4].因此,研究此类相关非饱和渗流问题具有重要的理论意义和工程应用价值.

关于非饱和瞬态渗流问题的数值计算研究较为活跃,已经获得了丰富的研究成果.Wang 等[5]针对迭代收敛速度问题提出预处理改进的 Hermitian 和斜 Hermitian 分裂迭代法,并通过数值试验证明该方法在非饱和渗流分析方面的有效性;Zhu 等[6]基于改进的矩阵分裂迭代法用于分析非饱和渗流问题,并通过数值算例验证该方法的优越性;DOLEJŠÍ 等[7]基于自适应高阶时空间断法和网格生成技术,实现了对渗流过程涉及的干湿界面、锋面等复杂流动现象的高精度捕捉;Seus 等[8]基于线性化区域分解方法,将非线性问题转化为线性子问题进行并行求解,显著提高了迭代效率;Zha 等[9]针对干土入渗分析中存在的数值振荡和不易收敛的经典难题,提出了一种改进的 Picard 迭代格式;Zhu 等[10]针对非饱和渗流分析涉及的收敛速度和稳定性,提出一种改进的 Jacobo 迭代法;Liu 等[11]基于有限差分法求解 Richards 方程,针对数值振荡和收敛困难,提出一种改进的求解策略.事实上,非饱和渗流 Richards 方程的强非线性是导致数值计算迭代收敛困难和数值振荡的根本原因.

相比于数值计算,解析方法的求解过程物理概念和逻辑推理清晰,得到的函数形式解析解具有较强的可靠性,且能清楚表征诸如边界条件和物性参数等的影响效应[12],非饱和渗流问题的解析计算一直备受青睐.如 Hayek[13]在文献[14-15]的研究基础上,针对简单初边界条件非饱和垂直入渗过程开展解析计算,得到关键渗流物理量的显式解析表达式;Basha[16]基于格林函数法及特定假设,推导得到考虑根部吸水作用的非饱和渗流的解析解;Wu 等[17]基于拉普拉斯变换与贝塞尔函数等方法并结合线性化的 Richards 方程,获得定常入渗速率下瞬态渗流的解析解;Huang 等[18] 针对线性初始条件下非饱和水平与垂直入渗问题,将 Richards 方程线性化后基于傅里叶积分变换,推导得到相应的解析解;Tracy[19] 基于数学积分变换法,推导获得二维及三维非饱和干土入渗(初始条件为常数)的解析解;Hayek[20] 基于特征变换技术,针对有限深度非饱和渗流进行解析计算,获得体积含水率解析表达式;Basha[21]针对恒定入渗边界和含水率(初始条件)均匀分布下非饱和渗流问题,基于行波近似法获得积水时间解析表达式及含水率变化和入渗速率等演变规律;Wu 等[22]针对植被覆盖非饱和边坡降雨入渗问题,基于格林函数法解析得到基质吸力水头解析

解.事实上,上述非饱和渗流解析计算过程多涉及复杂的积分变换技术和格林函数求解,此类计算本身较复杂(很多情形下解析得到格林函数极为困难,且对所求问题的初边界条件要求苛刻),多针对较为简单的地表工况或初边值条件,复杂地表边界入渗下的非饱和渗流问题的研究鲜有报道.

本文构建复杂入渗条件下积水前、后两个不同入渗阶段非饱和渗流的线性化理论模型,基于分离变量技术求解得到相应的非饱和渗流过程中渗透系数、基质吸力水头和体积含水率等的解析表达式及确定地表积水时间的计算方法,数值验证解析计算的有效性和精度.针对入渗/蒸发交变地表条件和持续入渗工况(考虑地表积水)开展非饱和渗流分析,研究成果具有一定的理论价值和工程意义.

1 无量纲方程的建立

1.1 物理模型

假定非饱和土体下边界距离地表为l,下边界处的基质吸力水头$h_m=h_0$(h_0为常数).特别地若下边界为地下水位处,则基质吸力水头$h_m=0$.当时间$t\leqslant 0$时,土层为稳定的垂直入渗状态,其中地表处入渗速率为q_A(为常数);当$t>0$时,地表处入渗速率由q_A变为$q_B(t)$,其中$q_B(t)$为任意与时间t相关的函数.地表土层非饱和渗流过程的物理模型见图1,对于半无限土层y为水平方向坐标,z为竖直方向坐标(规定向上为正);图中的入渗速率的下标A和B仅表示作用于地表的不同类型入渗边界.

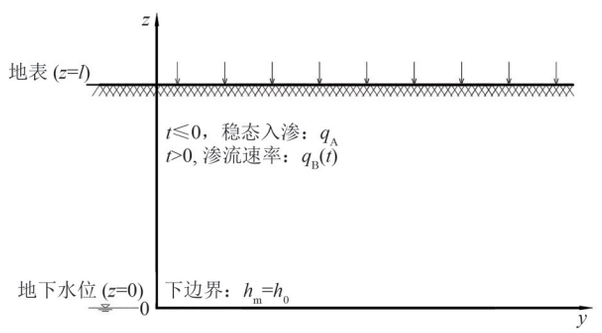


图1 非饱和渗流过程的物理模型

Fig. 1 Physical model of the unsaturated seepage process

特别地,$q_B(t)$可表征持续降雨且地表形成积水,此类情形在实际中较为常见.另外,降雨/蒸发周期交替作用的地表通量边界下,土层非饱和渗流亦多发生.如气象资料统计分析表明,某些地区的土层地表水流边界往往呈现为循环周期函数形式[23-25].

对于以q_A稳定垂直入渗的工况,土层基质吸力水头h_m沿高程的分布为[26] $h_m=\frac{1}{\beta}\ln\left[e^{-\beta(z-h_0)}+\frac{q_A}{k_s}(e^{-\beta z}-1)\right]$,

其中,k_s为饱和渗透系数,β为土的孔隙分布参数,此式为图1所示非饱和渗流过程对应的初始条件.

1.2 渗流方程的无量纲化

非饱和土垂直入渗过程可用Richards方程表示为[27-28]

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[k(h_m)\left(\frac{\partial h_m}{\partial z}+1\right)\right]=\frac{\partial\theta}{\partial t} \tag{1}$$

式中:$k(h_m)$为渗透系数函数,其在土体干湿界面附近呈现高度非线性特征;θ为体积含水率.

使用Gardner指数型水力参数模型[29],渗透系数函数与基质吸力水头,以及体积含水率与基质吸力水头之间的关系为

$$k(h_m)=k_s e^{\beta h_m} \tag{2}$$

$$\theta(h_m)=\theta_r+(\theta_s-\theta_r)e^{\beta h_m} \tag{3}$$

式中:θ_s为饱和含水率;θ_r为残余含水率.

引入无量纲参数对渗流方程进行无量纲计算,需要引入如下参数:$Z=\beta z$,$L=\beta l$,$K=k/k_s$,$Q_A=q_A/k_s$,$Q_B=q_B(t)/k_s$,$T=\beta k_s t/(\theta_s-\theta_r)$.将Richards方程作线性化变换处理,同时无量纲化边界条件和初始条件,得到渗流微分方程表达式为[26]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 K}{\partial Z^2}+\dfrac{\partial K}{\partial Z}=\dfrac{\partial K}{\partial T}\\ K|_{T=0}=(e^{\beta h_0}+Q_A)e^{-Z}-Q_A\\ K|_{Z=0}=e^{\beta h_0}\\ \left(\dfrac{\partial K}{\partial Z}+K\right)|_{Z=L}=-Q_B(T)\end{cases} \tag{4}$$

需要指出,地表边界(即$Z=L$)的存在使得本文工作和文献[26]有显著区别,方程(4)中第4式表示随时间变化的无量纲入渗速率,因此任意复杂地表入渗工况对应的解析解均可由方程(4)解析计算得到.此外,在已有文献[26]中,地表入渗边界为常数,对应的解析计算极大简化.

2 解析求解

2.1 地表积水前的解析计算

方程(4)的直接解析计算较为困难,一种可行的方案是齐次化边界条件,为此构造如$K=K_1+K_2$形式的解,其中K_1为某常微分方程的解,K_2为某偏微分方程的解(边界齐次化).

关于K_1的微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 K_1}{\partial Z^2}+\dfrac{\partial K_1}{\partial Z}=0\\ K_1|_{Z=0}=\mathrm{e}^{\beta h_0}\\ \left(\dfrac{\partial K_1}{\partial Z}+K_1\right)|_{Z=L}=-Q_{\mathrm{B}}(T)\end{cases}\tag{5}$$

直接求解,可得

$$K_1=-Q_{\mathrm{B}}(T)+[Q_{\mathrm{B}}(T)+\mathrm{e}^{\beta h_0}])\mathrm{e}^{-Z}\tag{6}$$

根据式(6)并结合方程(4)计算,可得关于K_2方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 K_2}{\partial Z^2}+\dfrac{\partial K_2}{\partial Z}=\dfrac{\partial K_2}{\partial T}+Q_{\mathrm{B}}{}'(T)(\mathrm{e}^{-Z}-1)\\ K_2|_{T=0}=\left[Q_{\mathrm{B}}(0)-Q_{\mathrm{A}}\right](1-\mathrm{e}^{-Z})\\ K_2|_{Z=0}=0\\ \left(\dfrac{\partial K_2}{\partial Z}+K_2\right)|_{Z=L}=0\end{cases}\tag{7}$$

式中:$Q_B{}'(T)$为$Q_{\mathrm{B}}(T)$关于T的求导.

方程(7)中微分方程是非齐次的(边界条件为齐次),若使用分离变量法进行求解,则需对K_2进一步作如下构造处理:

$$K_2(Z,T)=W(Z,T)+V(Z,T)+R(Z,T)\tag{8}$$

需要说明,如此构造K_2的目的是将方程齐次化.其中,函数$W(Z,T)$满足如下条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 W}{\partial Z^2}+\dfrac{\partial W}{\partial Z}-\dfrac{\partial W}{\partial T}=0\\ W|_{Z=0}=0\\ \dfrac{\partial W}{\partial Z}+W|_{Z=L}=0\\ W|_{T=0}=-Q_{\mathrm{A}}(1-\mathrm{e}^{-Z})\end{cases}\tag{9}$$

求解,可得

$$W(Z,T)=\sum_{n=1}^{\infty}-Q_{\mathrm{A}}C_n\mathrm{e}^{-\varphi_n^2 T}\mathrm{e}^{-\frac{T}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z\tag{10}$$

式中:n为全体正整数;φ_n为常数项系数;C_n为常数项.

φ_n可由以下超越方程确定,即

$$\tan\varphi L+2\varphi=0\tag{11}$$

式中:φ为超越方程的解,有无穷多个(可分别记为$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$).

C_n可根据式(10)和初始条件确定,满足如下条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z=1-\mathrm{e}^{-Z}\tag{12}$$

函数$V(Z,T)$则应满足如下条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial Z^2}+\dfrac{\partial V}{\partial Z}-\dfrac{\partial V}{\partial T}=0\\ V|_{Z=0}=0\\ \dfrac{\partial V}{\partial Z}+V|_{Z=L}=0\\ V|_{T=0}=Q_{\mathrm{B}}(0)(1-\mathrm{e}^{-Z})\end{cases}\tag{13}$$

求解,可得:

$$V(Z,T)=Q_{\mathrm{B}}(0)\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\varphi_n^2 T}\mathrm{e}^{-\frac{T}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z\tag{14}$$

函数$R(Z,T)$则应满足如下条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 R}{\partial Z^2}+\dfrac{\partial R}{\partial Z}-\dfrac{\partial R}{\partial T}=Q_B{}'(T)(\mathrm{e}^{-Z}-1)\\ R|_{Z=0}=0\\ \dfrac{\partial R}{\partial Z}+R|_{Z=L}=0\\ R|_{T=0}=0\end{cases}\tag{15}$$

求解,可得

$$R(Z,T)=[Q_{\mathrm{B}}(T)-Q_{\mathrm{B}}(0)]\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z\tag{16}$$

于是,可得方程(7)的解析解为

$$\begin{aligned}K_2(Z,T)=&\sum_{n=1}^{\infty}-Q_{\mathrm{A}}C_n\mathrm{e}^{-\varphi_n^2 T}\mathrm{e}^{-\frac{T}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z+\\ &Q_{\mathrm{B}}(0)\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\varphi_n^2 T}\mathrm{e}^{-\frac{T}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z+\\ &[Q_{\mathrm{B}}(T)-Q_{\mathrm{B}}(0)]\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z\end{aligned}\tag{17}$$

综上,可得方程(4)的解为

$$\begin{aligned}K(Z,T)=&-Q_{\mathrm{B}}(T)+[Q_{\mathrm{B}}(T)+\mathrm{e}^{\beta h_0}]\mathrm{e}^{-Z}+\\ &\left[Q_{\mathrm{B}}(0)-Q_{\mathrm{A}}\right]\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\varphi_n^2 T}\mathrm{e}^{-\frac{T}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z+\\ &[Q_{\mathrm{B}}(T)-Q_{\mathrm{B}}(0)]\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z\end{aligned}\tag{18}$$

根据式(18)、式(2)与式(3),可得基质吸力水头h_{m}与体积含水率θ的解析表达式为

$$\begin{aligned}h_{\mathrm{m}}(Z,T)=&\frac{1}{\beta}\ln\{-Q_{\mathrm{B}}(T)+[Q_{\mathrm{B}}(T)+\mathrm{e}^{\beta h_0}]\mathrm{e}^{-Z}+\\ &[Q_{\mathrm{B}}(0)-Q_{\mathrm{A}}]\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\varphi_n^2 T}\mathrm{e}^{-\frac{T}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z+\\ &[Q_{\mathrm{B}}(T)-Q_{\mathrm{B}}(0)]\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z\}\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}\theta(Z,T)=&\theta_{\mathrm{r}}+(\theta_{\mathrm{s}}-\theta_{\mathrm{r}})\{-Q_{\mathrm{B}}(T)+\\ &[Q_{\mathrm{B}}(T)+\mathrm{e}^{\beta h_0}]\mathrm{e}^{-Z}+[Q_{\mathrm{B}}(0)-\\ &Q_{\mathrm{A}}]\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\varphi_n^2 T}\mathrm{e}^{-\frac{T}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z+[Q_{\mathrm{B}}(T)-\\ &Q_{\mathrm{B}}(0)]\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z\}\end{aligned}\tag{20}$$

非饱和渗流达西定律的表达式为

$$q=-k_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{\beta h_{\mathrm{m}}}\left(\frac{\partial h_{\mathrm{m}}}{\partial z}+1\right)\tag{21}$$

式中:q为渗流速度.

将式(19)代入式(21),得到土层内渗流速度的

解析表达式为

$$q(Z,T)=-k_s\{-Q_B(T)+\frac{1}{2}[Q_B(0)-Q_A]\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\varphi_n^2 T}e^{-\frac{T}{4}}e^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z+[Q_B(0)-Q_A]\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n C_n e^{-\varphi_n^2 T}e^{-\frac{T}{4}}e^{-\frac{Z}{2}}\cos\varphi_n Z+\frac{1}{2}[Q_B(T)-Q_B(0)]\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z+[Q_B(T)-Q_B(0)]\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n C_n e^{-\frac{Z}{2}}\cos\varphi_n Z\} \tag{22}$$

2.2 地表积水后的解析计算

长时间的持续降雨将会导致地表产生积水，相应的非饱和入渗过程中的地表边界条件将由渗流速率边界转变为饱和含水率边界，由此必然导致土层内部的体积含水率等变量的时空演变特征改变，对其进行解析计算需要将地表积水时刻对应的土层体积含水率或基质吸力水头视为初始条件.将地表产生积水的时刻假定为t_p，此时土体表面体积含水率达到饱和状态，即地表上边界处的基质吸力水头$h_m=0$，渗透系数$k=k_s$.根据式(18)，可以得到$t=t_p$(无量纲化后对应T_p)时沿土层高度的无量纲化渗透系数表达式，即

$$K(Z,T_p)\big|_{t=t_p}=-Q_B(T_p)+[Q_B(T_p)+e^{\beta h_0}]e^{-Z}+[Q_B(0)-Q_A]\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\varphi_n^2 T_p}e^{-\frac{T_p}{4}}e^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z+[Q_B(T_p)-Q_B(0)]\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z \tag{23}$$

需注意，式(23)即为积水后对非饱和渗流开展解析计算所对应的初始条件.为便于计算，作如下表示

$$P(Z)=-Q_B(T_p)+[Q_B(T_p)+e^{\beta h_0}]e^{-Z}+[(Q_B(0)-Q_A]\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\varphi_n^2 T_p}e^{-\frac{T_p}{4}}e^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z+[(Q_B(T_p)-Q_B(0)])\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\frac{Z}{2}}\sin\varphi_n Z \tag{24}$$

式中：$P(Z)$为地表积水开始时刻对应的土层含水率分布.

将积水后的无量纲化时间记为T^*，$T=T_p+T^*$，则得积水后非饱和渗流过程的控制方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 K^*}{\partial Z^2}+\dfrac{\partial K^*}{\partial Z}=\dfrac{\partial K^*}{\partial T^*}\\ K^*\big|_{T^*=0}=P(Z)\\ K^*\big|_{Z=0}=e^{\beta h_0}\\ K^*\big|_{Z=L}=1\end{cases} \tag{25}$$

式中：$K^*(Z,T^*)$为积水后的无量纲渗透系数表达式.

为便于方程(25)的求解，基于齐次化原理，将其解析解拆分为两部分，即$K^*=K_1^*+K_2^*$.

K_1^*微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 K_1^*}{\partial Z^2}+\dfrac{\partial K_1^*}{\partial Z}=0\\ K_1^*\big|_{Z=0}=e^{\beta h_0}\\ K_1^*\big|_{Z=L}=1\end{cases} \tag{26}$$

计算可得

$$K_1^*=e^{\beta h_0}+\frac{e^{\beta h_0}-1}{e^{-L}-1}(1-e^{-Z}) \tag{27}$$

K_2^*齐次微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 K_2^*}{\partial Z^2}+\dfrac{\partial K_2^*}{\partial Z}=\dfrac{\partial K_2^*}{\partial T^*}\\ K_2^*\big|_{T^*=0}=P(Z)-e^{\beta h_0}-\dfrac{e^{\beta h_0}-1}{e^{-L}-1}(1-e^{-Z})\\ K_2^*\big|_{Z=0}=0\\ K_2^*\big|_{Z=L}=0\end{cases} \tag{28}$$

采用分离变量法对方程(28)进行求解，将K_2^*表示为函数M和N的乘积，即

$$K_2^*(Z,T^*)=M(Z)N(T^*) \tag{29}$$

将式(29)代入方程(28)，并考虑K_2^*的非平凡解，分离变量后可得

$$\begin{cases}M''+M'+\lambda M=0\\ N'+\lambda N=0\end{cases} \tag{30}$$

式中：λ为使用分离变量法过程中所设定的常数.

计算可得常微分方程(30)的非平凡解为

$$\begin{cases}M=e^{-\frac{1}{2}Z}(C_1\cos\dfrac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}Z+C_2\sin\dfrac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}Z)\\ N=C_0e^{-\lambda T^*}\end{cases} \tag{31}$$

式中：C_0、C_1、C_2均为待定常数项.需要指出，满足条件的λ取值并不唯一，因此解K_2^*为级数形式.根据方程(28)中的齐次边界条件和初始条件，并结合式(28)、(29)和(30)，可得

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}L=n\pi\\ C_1=0\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}U_n e^{-\frac{1}{2}Z}\sin(\frac{\sqrt{4\lambda_n-1}}{2}Z)=P(Z)-e^{\beta h_0}-\frac{e^{\beta h_0}-1}{e^{-L}-1}(1-e^{-Z})\end{cases} \tag{32}$$

式中：λ_n为常数，其取值由正整数n决定；U_n为待定

常数,可在λ_n的基础上计算确定.

于是,可以得到关于$K_2^*(Z,T^*)$的解析解函数表达式为

$$K_2^*(Z,T^*)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n e^{-\frac{1}{2}Z}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_n-1}}{2}Z\right)e^{-\lambda_n T^*} \tag{33}$$

结合式(27),可得积水后的无量纲化渗透系数K^*的解析解表达式为

$$K^*(Z,T^*)=e^{\beta h_0}+\frac{e^{\beta h_0}-1}{e^{-L}-1}(1-e^{-Z})+\sum_{n=1}^{\infty}U_n e^{-\frac{1}{2}Z}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_n-1}}{2}Z\right)e^{-\lambda_n T^*} \tag{34}$$

同样,基于式(2)和式(3),根据解析解表达式(34),得到积水后的基质吸力水头$h_m{}^*$与体积含水率θ^*的解析解表达式为

$$h_m{}^*(Z,T^*)=\frac{1}{\beta}\ln\left[e^{\beta h_0}+\frac{e^{\beta h_0}-1}{e^{-L}-1}(1-e^{-Z})+\sum_{n=1}^{\infty}U_n e^{-\frac{1}{2}Z}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_n-1}}{2}Z\right)e^{-\lambda_n T^*}\right] \tag{35}$$

$$\theta^*(Z,T^*)=\theta_r+(\theta_s-\theta_r)\left[e^{\beta h_0}+\frac{e^{\beta h_0}-1}{e^{-L}-1}(1-e^{-Z})+\sum_{n=1}^{\infty}U_n e^{-\frac{1}{2}Z}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_n-1}}{2}Z\right)e^{-\lambda_n T^*}\right] \tag{36}$$

根据达西定律式(21),可得积水后土层内渗流速度解析解表达式为

$$q^*(Z,T^*)=-k_s\left[e^{\beta h_0}+\frac{e^{\beta h_0}-1}{e^{-L}-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}U_n e^{-\frac{1}{2}Z}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_n-1}}{2}Z\right)e^{-\lambda_n T^*}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4\lambda_n-1}}{2}U_n e^{-\frac{1}{2}Z}\cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda_n-1}}{2}Z\right)e^{-\lambda_n T^*}\right] \tag{37}$$

3　数值验证及分析

3.1　地表积水时间的计算方法

长时间持续降雨情形下,可采用以下两种方法确定地表积水时间:①根据基质吸力水头和体积含水率的解析表达式(19)与式(20)确定.当地表产生积水时,土体表层达到饱和土状态,即在上边界$z=l$处的基质吸力水头$h_m=0$,体积含水率$\theta=\theta_s$.由此,将.式(19)左侧设为0,并将其他土体有关参数代入式中,或将式(20)左侧数值设为饱和体积含水率并将有关参数代入式中,即可得到积水时刻t_p.②可以根据地表上边界处的入渗速率q_B的函数表达式确定.即满足$q_B(t)=k_s$条件,根据式(22)计算得到$t=t_p$.

3.2　数值验证

作为算例分析,选取$l=100$ cm的均质非饱和土层为研究对象,物理模型示意可参见图1.设定下边界($z=0$)为地下水位处(即下边界基质吸力水头$h_m=0$),土层地表遭受指数型增大入渗速率的持续作用,最终可在地表形成积水径流.依据Van Genuchten[30]的工作,数值验证中所需土层的计算参数取为$\beta=0.01\ \text{cm}^{-1}$,$\theta_s=0.4$,$\theta_r=0.04$,$k_s=10^{-3}$ cm/s;$t\leqslant 0$时土层处于稳态入渗,地表的入渗速率$q_A=-0.1\times10^{-3}$ cm/s,$t>0$时地表入渗速率为$q_B(t)=-0.9\times10^{-3}\exp(4\times10^{-5}t)$ cm/s.地表入渗速率q_B随时间变化规律可见图2.由图2可见,入渗速率随时间逐渐增大,最终会在地表形成积水径流.体积含水率和基质吸力水头解析表达式所需的待定参数φ、λ、C和U的值见表1,其中φ根据式(11)计算,λ和U根据式(32)确定,C根据式(12)计算.

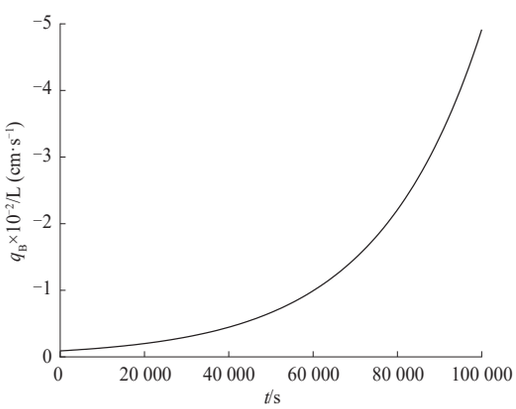


图2　地表入渗速率的函数q_B

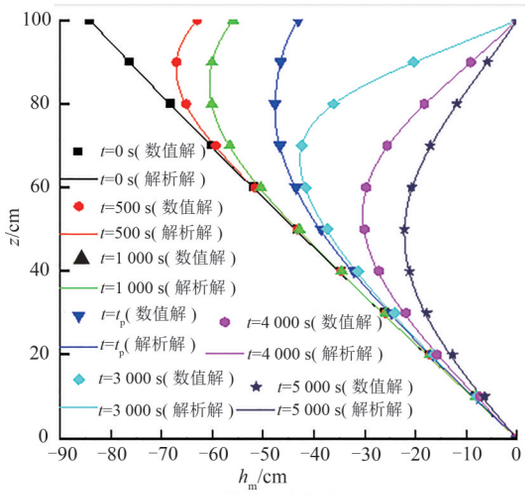
Fig. 2　Surface infiltration rate function q_B

表1　参数φ_n、λ_n、C_n和U_n的值

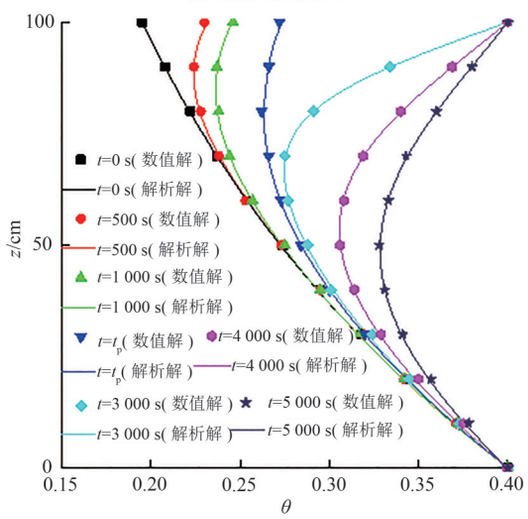
Tab.1　Parameter values of φ_n、λ_n、C_n and U_n

参数	数值	参数	数值	参数	数值	参数	数值
φ_1	1.837	λ_1	10.119 6	C_1	0.771 5	U_1	−0.497
φ_2	4.816	λ_2	39.728 4	C_2	−0.137 0	U_2	0.205
φ_3	7.917	λ_3	89.076 4	C_3	0.051 9	U_3	−0.128
φ_4	11.041	λ_4	158.163 7	C_4	−0.026 8	U_4	0.092
φ_5	14.172	λ_5	246.990 1	C_5	0.016 3	U_5	−0.078
φ_6	17.308	λ_6	355.555 8	C_6	−0.010 9	U_6	0.063
φ_7	20.445	λ_7	483.860 6	C_7	0.007 8	U_7	−0.054
φ_8	23.583	λ_8	631.904 7	C_8	0.005 8	U_8	0.046
φ_9	26.722	λ_9	799.688 0	C_9	0.004 5	U_9	−0.040
φ_{10}	29.862	λ_{10}	987.210 4	C_{10}	0.003 1	U_{10}	0.031

计算可得积水时间$t_p=2\ 634$ s,其相应的基质吸力水头和体积含水率沿高程分布的解析解和数值解见图3,其中数值解是基于COMSOL有限元数值平台得到.



（a）基质吸力水头



（b）体积含水率

图3　基质吸力水头和体积含水率演变特征的数值解与解析解

Fig.3　Numerical and analytical solutions for the evolution characteristics of matric suction head and volumetric water content

由图3可见，解析解和数值解之间具有较好的一致性，表明变入渗速率下的非饱和渗流过程的解析计算具有较高的可靠性和精度.此外，可注意到土层地表积水后其基质吸力水头迅速降低为0，体积含水率则增长至饱和体积含水率.

4　讨论与分析

4.1　周期入渗/蒸发情形下的非饱和渗流

选择正弦函数形式的周期变化地表水流通量边界条件，土层初始条件是地表入渗速率为常数$q_A=-0.1\times10^{-3}$ cm/s下的稳态入渗，分析入渗/蒸发交变作用对非饱和土层特征点的基质吸力水头、体积含水率及渗流速率演变规律的影响.除地表边界条件外，本部分的计算模型与土层计算参数与3.2节相同.土层中特征点的位置示意图见图4.

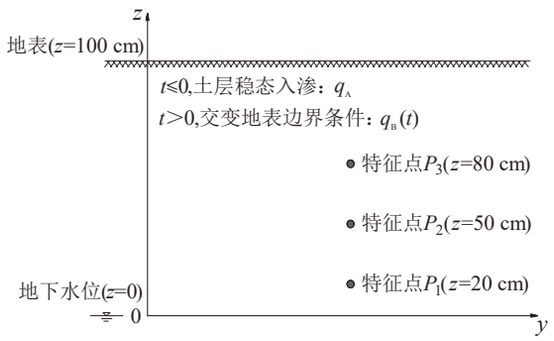


图4　土层特征点的位置示意图

Fig. 4　Schematic diagram of the location of soil layer feature points in the soil layer

地表边界条件为

$$q_B(t)=-\left[0.2+0.7\sin\left(\frac{\pi t}{600}+\frac{\pi}{3}\right)\right]\times10^{-3} \tag{38}$$

地表的入渗速率函数q_B见图5.由图5可见，交变地表边界条件周期变化所对应的振幅为7×10^{-4} cm/s，最大蒸发速率为5×10^{-4} cm/s，最大入渗速率为9×10^{-4} cm/s，初始相位为$\pi/3$，周期为1 200 s.

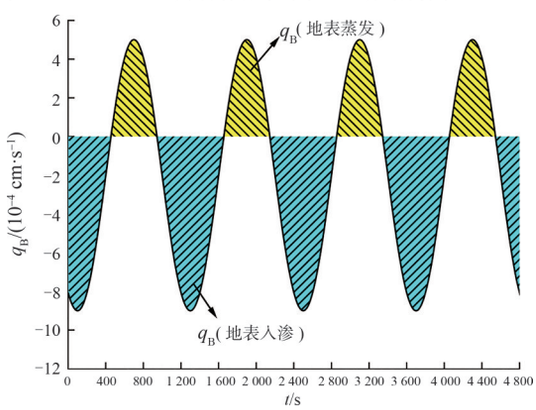


图5　地表的入渗速率函数q_B

Fig. 5　Surface infiltration rate function q_B

土层中不同深度特征点的基质吸力水头随时间的演变规律见图6.由图6可见，3个不同特征点的基质吸力水头均随地表边界条件呈现出周期变化特征（周期与地表边界相同），且其波峰和波谷均随时间整体上呈现为增大趋势（即基质吸力水头绝对值逐渐减小），这是由于在交变地表边界作用下，计算时间跨度内土层的含水率在逐渐增加所致.随着深度的增大，相同时刻基质吸力水头绝对值呈现出减小的趋势，在特征点逐渐靠近地下水位的过程中，基质吸力水头周期变化的振幅呈现出先减小后增大的特征.地表边界条件q_B出现波谷时，$z=20$，50 cm两特征点对应的基质吸力水头曲线亦出现波谷，而临近地表处的$z=80$ cm特征点则出现相位延滞现象，其

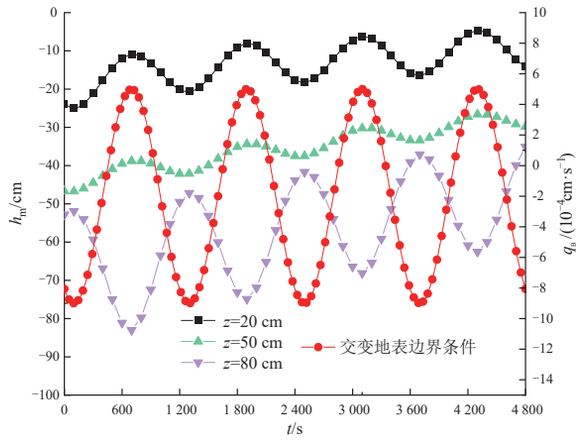


图 6　不同深度特征点基质吸力水头的演变特征

Fig. 6　Evolution characteristics of matric suction head at characteristic points of different depths

基质吸力水头曲线恰好为波峰.

土层中不同深度特征点的体积含水率随时间的演变规律见图 7. 由图 7 可见,3 个不同深度特征点的体积含水率曲线均随地表边界条件呈现出相同的周期演变特征,其中 z=20,50 cm 两特征点均与地表周期边界同时出现波峰和波谷,而临近地表的 z=80 cm 特征点则与地表边界有半个周期的相位延滞.3 个不同深度特征点所对应的体积含水率曲线的波峰和波谷均随时间呈现出不断增大的趋势,这是由于计算时间跨度内土层的体积含水量总体在不断增加.随着深度增大,相同时刻土层体积含水率呈现出不断增大的趋势(可能的原因是受地下饱和含水率边界影响);随着深度的增加,体积含水率曲线的振幅呈现出先减小而后增大的现象(其中,z=50 cm 处的振幅极小),这是地表入渗边界和土层底部边界共同作用的结果.

土层中不同深度特征点的渗流速率随时间的演变规律见图 8. 由图 8 可见,3 个特征点渗流速率的演变周期曲线均呈现出与地表周期边界相同的周期变化特征,其中 z=80,50 cm 两特征点的相位与地表周期交变边界的相同,而靠近地下水位 z=20 cm 处的特征点与地表边界条件存在相位差.相对地表边界条件,3 个特征点渗流速率周期变化的振幅均显著变小,表明土层对渗流速率曲线的振幅存在“削峰”作用,且该作用随着深度的增加而变强.特征点 z=80,20 cm 的渗流速率曲线波峰和波谷的绝对值随时间而逐渐增大.此外,在整个计算时间跨度内,距离地表边界近的特征点 z=80 cm 一直呈现为入渗状态,土层中部的特征点 z=50 cm 则表现为入渗/蒸发交替变化.

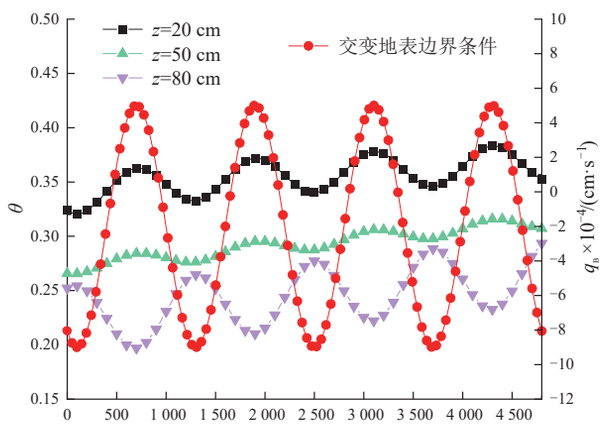


图 7　不同深度特征点体积含水率的演变特征

Fig. 7　Evolution characteristics of volumetric water content at characteristic points of different depths

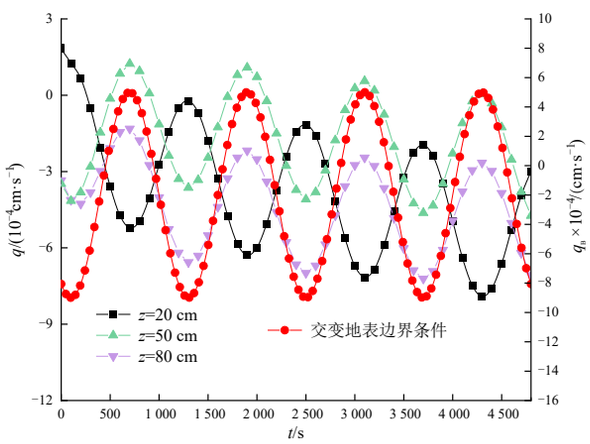


图 8　不同特征点渗流速率演变特征

Fig. 8　Evolution characteristics of seepage rate at different characteristic points

4.2　持续降雨下考虑地表积水的非饱和渗流

选取 3 种入渗速率随时间逐步增强的地表边界条件进行分析,土层初始状态为地表稳态入渗速率 $q_A=-0.1\times10^{-3}$ cm/s,除地表边界条件外,本部分的计算模型与土层计算参数与 3.2 节相同.整个降雨入渗过程(持续时间为 20 000 s)的总降雨量相同,探讨不同入渗工况对基质吸力水头、体积含水率及渗流速率分布的影响.3 种不同地表入渗速率的函数表达式为

$$\begin{cases} q_{B1}(t)=-2.132\,09\times10^{-5}\times t^{\frac{2}{5}} \\ q_{B2}(t)=-8\times10^{-8}\times t \\ q_{B3}(t)=-4\times10^{-16}\times t^{3} \end{cases} \tag{39}$$

3 种不同地表入渗速率的函数图像见图 9. 由图 9 可见,3 种入渗速率以不同的趋势逐渐减小,其中 q_{B3} 前期减小慢后期减小快,q_{B2} 为线性减小,q_{B1} 前期减小快后期减小慢.此外,计算可得 3 种入渗函数对应的地表积水时间分别为 15 065、12 500、13 572 s.

不同地表入渗速率下的土层总入渗量见图 10. 由图 10 可见，随着时间增长，土层内的总入渗量逐渐增大，且增长速率均呈现为前期小后期大，因 q_{B3} 在入渗前期的增长速率较小，其总入渗量变化亦不明显. 入渗的前期，入渗速率是 $q_{B1}>q_{B2}>q_{B3}$ 且地表尚未积水，相应的土层总入渗量体现为工况 q_{B1} 时最大，q_{B3} 时最小；积水后 3 条总入渗量曲线近乎为线性增大且相互平行，这是由于积水后地表入渗速率相同. 从地表出现积水到降雨结束，3 种入渗函数的总入渗量分别为 4.935、7.5、6.428 cm. 因积水后均会以饱和渗透系数入渗，积水时间越长，积水后的土层的入渗量越大.

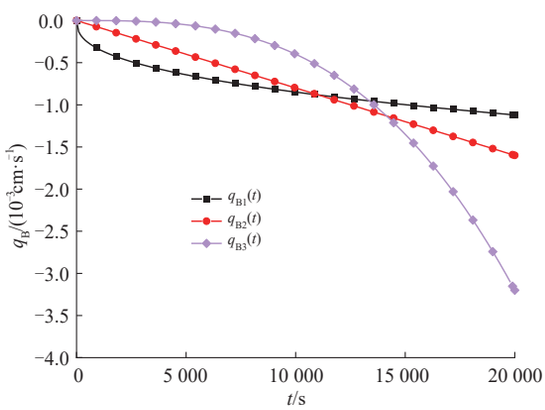


图 9　地表入渗速率的函数图像

Fig.9　Image of surface infiltration rate function

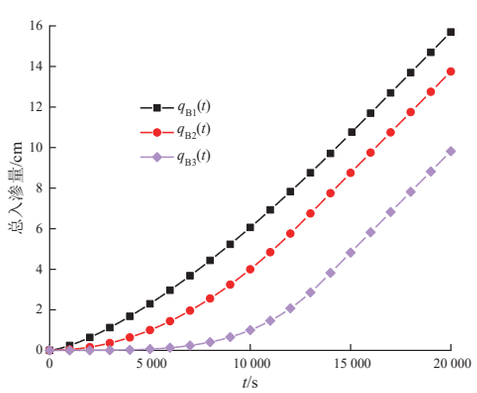


图 10　不同地表入渗速率下的土层总入渗量

Fig. 10　Total infiltration of the soil layer under varying surface infiltration rates

不同的地表入渗条件下，土层内渗流速率沿高程的演变特征见图 11. 由图 11 可见，地表未积水前的前 5 000 s 内，q_{B3} 渗流速率的增长相对较小，相应的土层内渗流速率沿高程变化不大；靠近地下水位附近的土体（$z<30$ cm），因基质吸力作用受到地下水位的持续补水，所对应的渗流速率均大于 0，表明该区域内的水分在 q_{B1} 和 q_{B2} 地表入渗边界条件下为向上迁移运动，$z\geqslant 30$ cm 部分土层内的渗流速率小于 0，表明水分在 q_{B1} 和 q_{B2} 作用下向下迁移运动（呈现为入渗状态）. $t=10\,000$ s 时刻的渗流速率沿高程的变化曲线表明，靠近地下水位附近的 30 cm 厚土层依然处于水分向上迁移状态，而 $z\geqslant 30$ cm 的土层的渗流速率小于 0（表明该区域在 3 种入渗速率作用下均处于入渗状态）. 因此，3 种入渗工况下地表积水后整个土层均处于入渗状态；入渗速率沿高程而逐渐增大，在土层中部 3 种工况有着相同的入渗速率.

3 种地表入渗工况对基质吸力水头分布的影响见图 12，其中图 12（a）、12（b）表示地表尚未形成积

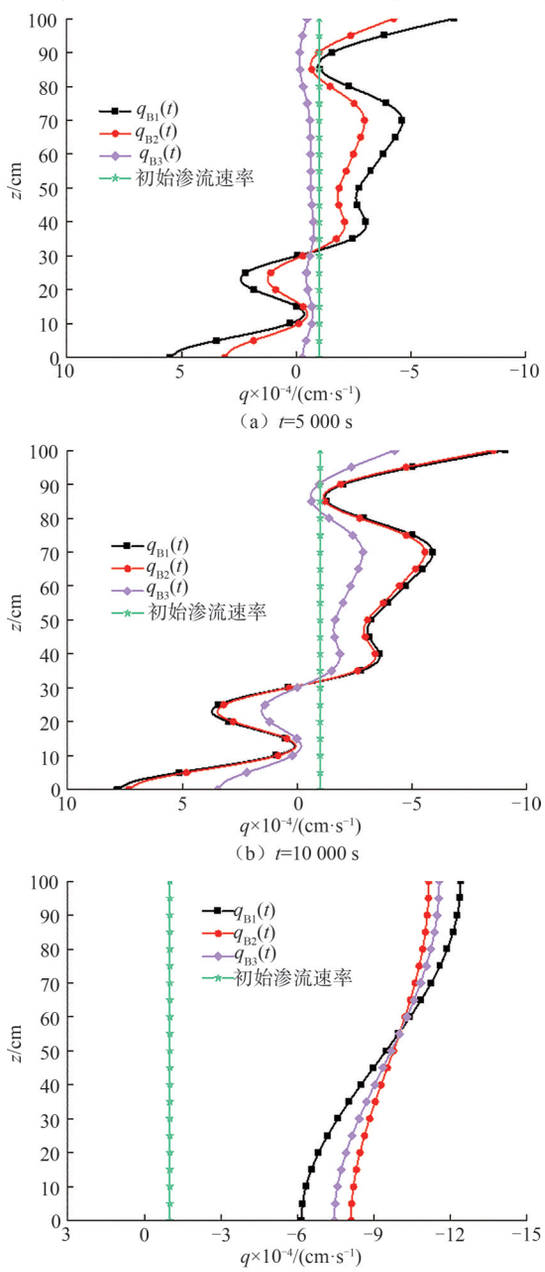
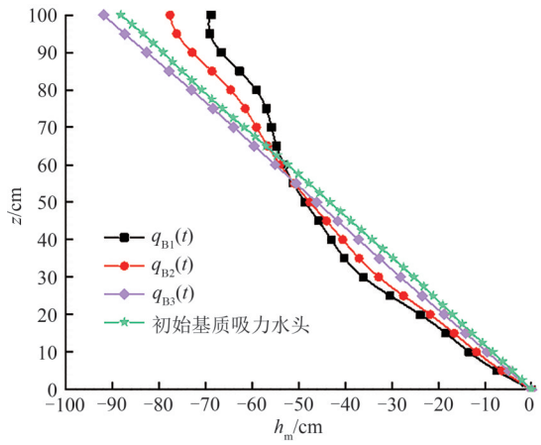
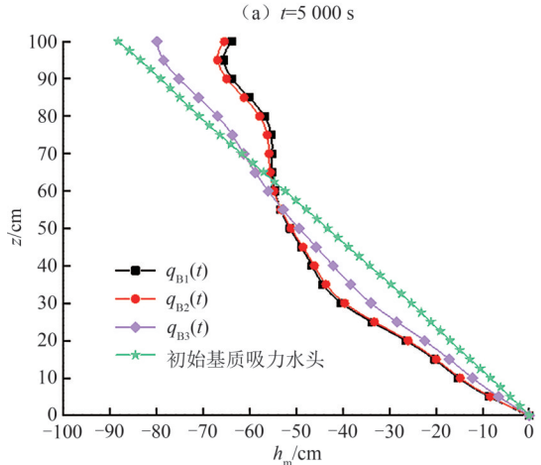


图 11　不同地表入渗速率下渗流速率对比

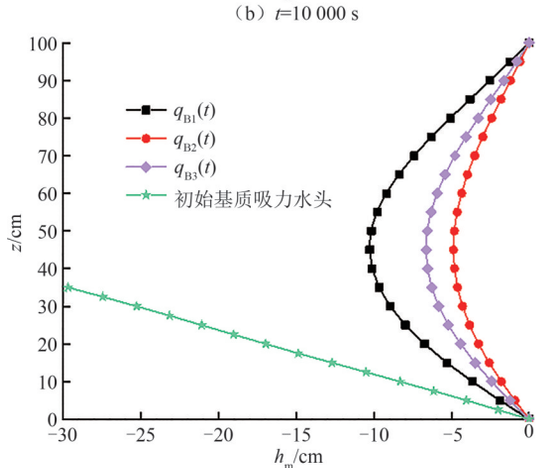
Fig. 11　Comparison of seepage rates under different surface infiltration rates



（a）t=5 000 s



（b）t=10 000 s



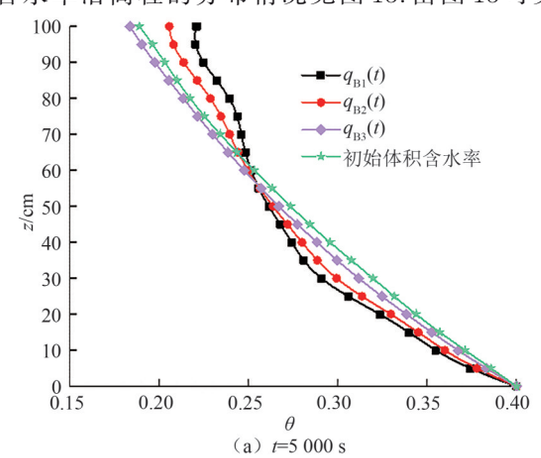
（c）t=20 000 s

图 12　不同地表入渗速率下基质吸力水头对比

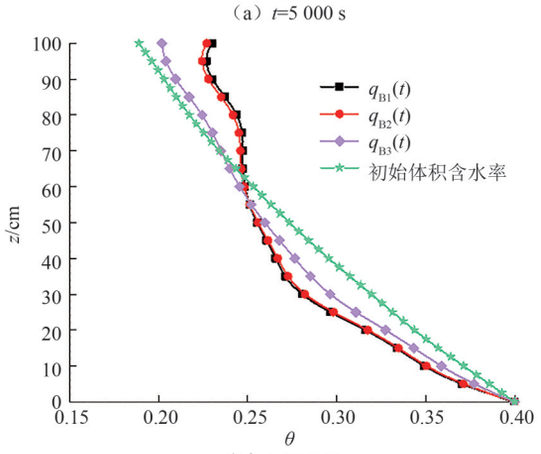
Fig.12　Comparison of matric suction head under different surface infiltration rates

水时的特征,图 12(c)表示地表积水下的基质吸力水头分布.由图 12 可见,因前 5 000 s 内 3 种地表边界下的土层总入渗量从大到小依次为 q_{B1}、q_{B2} 和 q_{B3},因此在临近地表附近(z=55 cm 以上部分)的基质吸力水头大小取决于总入渗量,总入渗量越大,基质吸力水头的绝对值越小;然而,地下水位附近(z<55 cm)相同高程处的基质吸力水头则完全相反,这是因为基质吸力的存在导致土层下部的水分向上部迁移.地表积水后其体积含水率达到饱和,基质吸力水头沿高程分布均呈现出先减小后增大的现象;土层中间(z=55 cm 处)因远离地表和地下水位,相应的基质吸力水头最小.地表积水时间越早,其所对应的基质吸力水头绝对值越小.总体而言,土层内的基质吸力水头均呈现出增大(其绝对值减小)的现象.

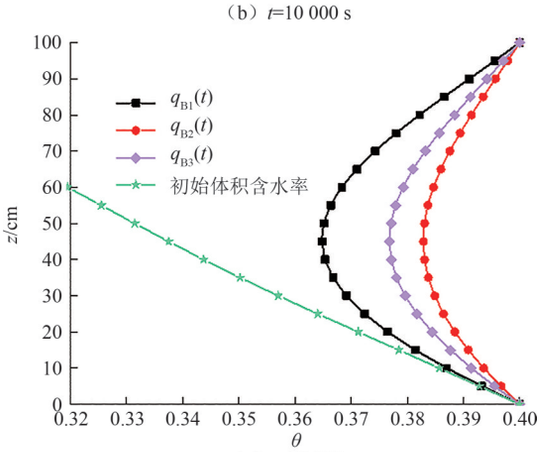
3 个典型时刻 3 种不同入渗速率下的土层内体积含水率沿高程的分布情况见图 13.由图 13 可见,



（a）t=5 000 s



（b）t=10 000 s



（c）t=20 000 s

图 13　不同地表入渗速率下体积含水率对比

Fig. 13　Comparison of volumetric water content under different surface infiltration rates

在初始的体积含水率基础上，地表积水前土层上部的体积含水率均随深度增加而逐渐增大（如图13(a)和图13(b)所示），近地表附近（60 cm＜z＜100 cm）土层的体积含水率分布受地表边界条件影响较大，土层入渗速率越大，相同高程处所对应的体积含水率越高．因入渗速率q_{B3}前5 000 s内的增长极为缓慢，因此t=5 000 s时其体积含水率沿高程分布近乎和初始时刻相同．地表积水后土层地表始终为饱和体积含水率，3种入渗速率下体积含水率沿高程均呈现先减小后增大的现象；随着时间的增加地表始终积水情况下整个土层必将全部饱和．随着时间推移土层内的含水率增大，所有工况下体积含水率曲线与初始时刻曲线的偏差均逐步增大．

5 结论

构建复杂入渗条件下积水前、后两个不同入渗阶段非饱和渗流的线性化理论模型，求解得到相应的非饱和渗流过程中渗透系数、基质吸力水头和体积含水率等的解析表达式及确定地表积水时间的计算方法，数值验证解析计算的有效性和精度．针对入渗/蒸发交变地表条件和持续入渗工况（考虑地表积水）开展非饱和渗流分析．主要结论如下：

1）周期地表边界下特征点的体积含水率和基质吸力水头均随地表周期边界呈现出相同的周期变化特征，相对地表条件的相位，近地表处的特征点有一定的相位延滞现象．整个计算跨度内，体积含水率和基质吸力水头周期演变曲线的波峰和波谷均随时间而增大．

2）特征点渗流速率演变曲线的周期与地表边界的周期相同，但其周期变化的振幅却显著减小，表明土层对渗流速率周期变化的振幅存在着“削峰”作用，且该作用随深度的增加而变强．近地下水位的特征点与地表边界的周期变化存在相位差．通过渗流速率演变曲线可知，土层中部的特征点呈现出入渗/蒸发交替变化的特征．

3）持续入渗的初期地表未积水，q_{B3}渗流速率的增长相对缓慢，土层内渗流速率沿高程变化不大；在工况q_{B1}与q_{B2}情形下，近地下水位的土层呈现出蒸发状态，近地表附近的土层则表现为持续入渗．地表积水后整个土层均处于入渗状态；渗流速率沿高程逐渐增大，在土层中部3种工况有着相同的入渗速率．

4）持续入渗下地表未积水时，近地表附近的基质吸力水头和体积含水率受其初始分布和地表入渗边界的共同影响，体积含水率逐渐增大，基质吸力水头绝对值逐渐减小；土层下部的体积含水率小于初始时刻，以及基质吸力水头绝对值大于初始时刻，则主要是受两者的初始分布影响水分发生向上迁移运动的原因．积水后基质吸力水头与体积含水率沿高程呈现出先减小后增大的变化趋势，最终趋于饱和含水率．

可将本文所建立的无量纲线性化理论模型拓展至三维非饱和渗流分析．此外，考虑土体空间变异性与复杂气象影响（可同时考虑降雨、温度、风速和太阳辐射等）下地表土层非饱和渗流的解析响应具有重要的实践价值，值得深入探讨．

参考文献（References）：

[1] BAI B, CHEN J, BAI F, et al. Corrosion effect of acid/alkali on cementitious red mud-fly ash materials containing heavy metal residues[J]. Environmental Technology & Innovation, 2024, 33: 103485.

[2] WU L Z, ZHAO D J, ZHU J D, et al. A late pleistocene river-damming landslide, Minjiang river, China [J]. Landslides, 2020, 17(2): 433－444.

[3] BAI B, BAI F, NIE Q K, et al. A high-strength red mud-fly ash geopolymer and the implications of curing temperature[J]. Powder Technology, 2023, 416: 118242.

[4] BAI B, WANG J Q, ZHAI Z Q, et al. The penetration processes of red mud filtrate in a porous medium by seepage[J]. Transport in Porous Media, 2017, 117(2): 207－227.

[5] WANG Z Q, YIN J F, DOU Q Y. Preconditioned modified Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration methods for fractional nonlinear Schrödinger equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 367: 112420.

[6] ZHU S R, WU L Z, SONG X L. An improved matrix split-iteration method for analyzing underground water flow[J]. Engineering with Computers, 2023, 39(3): 2049－2065.

[7] DOLEJŠÍ V, KURAZ M, SOLIN P. Adaptive higher-order space-time discontinuous Galerkin method for the computer simulation of variably-saturated porous media flows[J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 72: 276－305.

[8] SEUS D, MITRA K, POP I S, et al. A linear domain decomposition method for partially saturated flow in porous media[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 333: 331－355.

[9] ZHA Y Y, YANG J Z, YIN L H, et al. A modified Picard iteration scheme for overcoming numerical difficulties of simulating infiltration into dry soil[J]. Journal of Hydrology, 2017, 551: 56－69.

[10] ZHU S R, WU L Z, SHEN Z H, et al. An improved iteration method for the numerical solution of groundwater flow in unsaturated soils[J]. Computers and Geotechnics, 2019, 114: 103113.

[11] LIU C Y, KU C Y, HUANG C C, et al. Numerical solutions for groundwater flow in unsaturated layered soil with extreme physical property contrasts[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2015, 16(7/8): 325－335.

[12] ZHAN T L T, NG C W W. Analytical analysis of rainfall infiltration mechanism in unsaturated soils[J]. International Journal of Geomechanics, 2004, 4(4): 273－284.

[13] HAYEK M. An exact explicit solution for one-dimensional, transient, nonlinear Richards' equation for modeling infiltration with special hydraulic functions[J]. Journal of Hydrology, 2016, 535: 662－670.

[14] PHILIP J R. Constant rainfall infiltration into bounded shallow profiles[J]. Water Resources Research, 1991, 27(12): 3265－3270.

[15] ZLOTNIK V A, WANG T J, NIEBER J L, et al. Verification of numerical solutions of the Richards equation using a traveling wave solution[J]. Advances in Water Resources, 2007, 30(9): 1973－1980.

[16] BASHA H A. Multidimensional linearized nonsteady infiltration toward a shallow water table[J]. Water Resources Research, 2000, 36(9): 2567－2573.

[17] WU Y S, PAN L H. An analytical solution for transient radial flow through unsaturated fractured porous media[J]. Water Resources Research, 2005, 41(2): 2004WR003107.

[18] HUANG R Q, WU L Z. Analytical solutions to 1-D horizontal and vertical water infiltration in saturated/unsaturated soils considering time-varying rainfall [J]. Computers and Geotechnics, 2012, 39: 66－72.

[19] TRACY F T. Clean two- and three-dimensional analytical solutions of Richards' equation for testing numerical solvers[J]. Water Resources Research, 2006, 42(8): 2005WR004638.

[20] HAYEK M. An analytical model for steady vertical flux through unsaturated soils with special hydraulic properties[J]. Journal of Hydrology, 2015, 527: 1153－1160.

[21] BASHA H A. Infiltration models for semi-infinite soil profiles[J]. Water Resources Research, 2011, 47(8): 2010WR010253.

[22] WU L Z, CHENG P, ZHOU J T, et al. Analytical solution of rainfall infiltration for vegetated slope in unsaturated soils considering hydro-mechanical effects [J]. CATENA, 2022, 217: 106472.

[23] DE LA CASA A C, OVANDO G G, DÍAZ G J. Secular variation of rainfall regime in the central region of argentina[J]. Atmospheric Research, 2018, 213: 196－210.

[24] DE LA CASA A, NASELLO O. Breakpoints in annual rainfall trends in Córdoba, Argentina[J]. Atmospheric Research, 2010, 95(4): 419－427.

[25] DE LA CASA A C, NASELLO O B. Low frequency oscillation of rainfall in Córdoba, Argentina, and its relation with solar cycles and cosmic rays[J]. Atmospheric Research, 2012, 113: 140－146.

[26] 陈佩佩,张兴博,金铭,等. 基于齐次化构建原理的非饱和土瞬态渗流问题解析解[J]. 岩土工程学报, 2023, 45(12): 2490－2499.
CHEN Peipei, ZHANG Xingbo, JIN Ming, et al. Analytical solution of transient seepage problem in unsaturated soil based on principle of homogeneous construction[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, 45(12): 2490－2499.(in Chinese)

[27] PHOON K K, TAN T S, CHONG P C. Numerical simulation of Richards equation in partially saturated porous media: under-relaxation and mass balance[J]. Geotechnical and Geological Engineering, 2007, 25(5): 525－541.

[28] YE Z Y, JIANG Q H, YAO C, et al. The parabolic variational inequalities for variably saturated water flow in heterogeneous fracture networks [J]. Geofluids, 2018, 2018: 9062569.

[29] GARDNER W R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table[J]. Soil Science, 1958, 85(4): 228－232.

[30] VAN Genuchten M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. Soil science society of America journal, 1980, 44(5): 892－898.