

考虑拥堵空间排队和溢出的交通流 用户均衡分配模型

张琦悦¹, 岳昊¹, 孟德邻¹, 曲秋莪²

(1. 北京交通大学 综合交通运输大数据应用技术交通运输行业重点实验室, 北京 100044; 2. 北京交通运输职业学院 城市轨道交通学院, 北京 100096)

摘 要: 针对传统用户均衡(UE)分配模型难以刻画拥堵空间排队和溢出现象的问题, 本文考虑同时描述畅通和拥堵状态的一般道路网络, 构建了一种考虑由于路段通行能力和存储容量限制导致拥堵空间排队和溢出的交通流用户均衡分配模型, 并证明了模型用户均衡原理的等价性和解的唯一性。同时, 引入需求折算、拥堵回溯、拥堵区域识别及不同交通状态下的需求加载等机制, 构建改进 FW 算法对模型进行求解。最后, 通过算例证明本文模型和算法有效性, 简单算例计算结果的误差精度为 $e = 1.0445 \times 10^{-5}$, 加载流量的路径具有相同行程时间, 符合用户均衡原理。结果表明: 本文模型是传统畅通与完全拥堵用户均衡分配模型的集成和拓展, 可以有效计算路网在不同交通状态下的均衡分配结果和最终均衡稳态, 描述拥堵空间排队和溢出现象; 分配结果可以体现路网达到均衡状态时全局宏观交通运行特性, 识别瓶颈位置及拥堵排队区域, 为路网结构优化、交通诱导、需求管理和拥堵缓解提供依据。

关键词: 交通运输系统工程; 用户均衡分配模型; 交通流分配; 拥堵空间排队; 排队溢出

中图分类号: U491 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5497(2026)09-2302-15

DOI: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb.20250287

Traffic user equilibrium assignment model with congestion space queuing and spillover

ZHANG Qi-yue¹, YUE Hao¹, MENG De-lin¹, QU Qiu-shi²

(1. Key Laboratory of Transport Industry of Big Data Application Technologies for Comprehensive Transport, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 2. Urban Rail Transit Department, Beijing Vocational Transportation College, Beijing 100096, China)

Abstract: Aiming at the problem that the traditional user equilibrium assignment model is difficult to describe the phenomenon of congestion space queuing and spillover, in order to describe the macroscopic and overall traffic operation state of the road network, portray the impact of congestion spatial queuing and spillback phenomena on the traffic assignment of road network, and provide reference ideas for traffic planning, demand management and congestion mitigation, considering the general road network with both

收稿日期: 2025-04-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71771013); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2019JBM341).

作者简介: 张琦悦(1998-), 女, 博士研究生. 研究方向: 交通运输规划与管理. E-mail: 22110279@bjtu.edu.cn

通信作者: 岳昊(1975-), 男, 教授, 博士. 研究方向: 交通运输规划与管理. E-mail: hyue@bjtu.edu.cn

smooth and congested state, a novel traffic user equilibrium assignment model with congestion space queuing and spillover caused by the link capacity and storage capacity constraints was constructed. The equivalence of model with user equilibrium principle and the uniqueness of solution were proved. Moreover, mechanisms such as demand conversion, congestion backtracking, congestion area identification and demand loading of different traffic conditions were introduced, the calculation method of demand flow transfer coefficient was proposed, and an improved FW algorithm was constructed to solve the model. Finally, the effectiveness of the model and the algorithm was compared and analyzed by numerical examples. The error accuracy of the calculation results of the simple numerical example is $e = 1.0445 \times 10^{-5}$, and the routes with loaded traffic volume have equal travel times, which conforms to the user equilibrium principle. The results show that the model is an integration and expansion of the traditional smooth and fully congested user equilibrium assignment model, which can effectively calculate the equilibrium assignment results and the final equilibrium steady states of the road network under different traffic conditions, and describe the phenomenon of congestion space queuing and spillover. The assignment results can reflect the macroscopic and global traffic operation characteristics when the road network reaches the equilibrium state, identify bottleneck locations and congestion queuing areas, and provide basis for road network structure optimization, traffic guidance, demand management and congestion relief.

Key words: engineering of communications and transportation system; user equilibrium assignment model; traffic assignment; congestion space queuing; queuing spillover

0 引言

静态交通流分配是交通网络规划和管理的核心理论,对路网规划、需求管理、拥堵缓解至关重要。传统静态交通流分配基于 Wardrop 原理^[1],由 Beckmann 等^[2]建立用户均衡(User equilibrium, UE)模型,并通过 Frank-Wolfe 算法^[3]求解,但其忽略了通行能力约束,导致分配流量超过实际容量而无法刻画拥堵效应。

针对此局限, Larsson 等^[4]和 Bell^[5]引入通行能力约束进行交通流分配,但其强制要求流量不超过通行能力; Smith 等^[6,7]考虑了容量约束和拥堵延误构建了隐式拥堵分配模型,将拥堵延误平均分摊至所有流量中,隐含于阻抗函数,但其平均延误的设定过于简化,流出流量等于流入流量的假设也与拥堵时流入流出流量不相等的现实不符。针对隐式模型的不足, Thompson 等^[8]和 Smith^[9]允许需求超过通行能力,基于点排队构建了分配模型,但将队列抽象为无物理长度的“点”; Bliemer 等^[10]考虑排队建立了一阶节点模型和节点模型的伪动态交通分配模型,可以求解排队车辆数,并明确区分流入与流出流量。但点排队模型无法描述排队车辆空间占用及由此引发的排队溢出效应,而该效应恰是城市拥堵蔓延的关键机制。为刻画拥堵的空间物理属性,空间排队模型

开始关注排队空间占用, Lam 等^[11]认为大于通行能力的部分会在道路上游形成显式空间排队; Larrain 等^[12]建立了显式的空间排队分配模型,但都没有考虑路段存储容量限制导致的排队溢出效应对分配过程和结果的影响。

近期研究在考虑拥堵空间排队和溢出方面取得了一定进展,但在模型构建和算法设计上仍存在一定局限。在模型层面,岳昊等^[13,14]构建了完全拥堵用户均衡分配模型,脱离实际路网的混合状态; Bliemer 等^[15]添加路段容量约束,但溢出效应未纳入均衡条件。在算法层面,分支定界算法^[16]、增量分配法^[17-19]、迭代加权法均属非均衡近似算法,其结果收敛性无法保证,无法达到路网均衡状态,且解的唯一性无从验证。综上分析,在交通流分配中考虑拥堵排队和溢出效应,能够更真实地体现路网中瓶颈路段和拥堵区域的位置,为路网规划、需求管理、拥堵缓解提供更有效的决策参考,而目前研究在交通流用户均衡分配中仍欠缺考虑拥堵空间排队和溢出现象,以及其对整体路网和上游区域产生的效应,导致瓶颈无法有效辨别、拥堵排队区域无法合理估计、分配结果不合理等问题,缺乏融合畅通和拥堵状态的普适 UE 模型,针对模型均衡性、解的唯一性,以及相应的求解算法尚未开展研究。

基于以上不足,将拥堵空间排队和溢出效应嵌入在静态交通流用户均衡分配中,从宏观层面描述拥堵排队蔓延对运行状态及分配结果的影响,为交通规划和拥堵缓解提供理论基础,是网络交通流分配等领域的研究重点和难点。故本文基于考虑拥堵空间排队和溢出的用户均衡原理,考虑畅通和拥堵状态的一般路网,将传统的完全畅通 UE 模型和完全拥堵的 UE 模型进行集成,构建考虑拥堵空间排队和溢出的双层规划 UE 模型,并证明模型解的等价性和唯一性,同时引入需求折算、拥堵回溯、拥堵区域识别机制与不同交通状态下的需求加载机制,提出需求流量转移系数的计算方法,通过改进 FW 算法求解模型,并通过算例进行验证,精准识别瓶颈位置及排队蔓延范围。

1 问题描述和基本概念

本文模型是在给定 OD 对 r, s 间交通需求、道路网络结构、路段属性条件下,考虑路段通行能力和存储容量限制导致的拥堵空间排队和溢出,基于用户均衡原理,将 r, s 间的交通需求根据局部畅通和局部拥堵网络下不同的需求加载机制分配到路网上,从而计算出包括畅通网络和拥堵网络的道路网各路段交通流均衡分配结果,以及道路网中的需求流量从出发地到目的地过程中呈现出的宏观全局运行交通状态。当路段流入交通流量大于路段通行能力时会形成交通瓶颈,在瓶颈处产生拥堵排队,进而占用道路资源,称为拥堵空间排队;当拥堵空间排队的车辆数超过瓶颈路段完全拥堵所能容纳的最大车辆数(即路段存储容量)时,排队会向该路段的上游路段溢出。模型结果包括:路段的流入流量、流出流量、下游出口处待排队车辆数、上游入口处排队溢出车辆数、拥堵比例、路段的拥堵状态、拥堵瓶颈位置和拥堵区域范围、OD 对之间的出行阻抗等。

本文交通流分配包括需求折算、拥堵回溯、拥堵区域识别、需求加载 4 个过程。需求折算是指在路段流入流量超过其通行能力时,受瓶颈限制,路段流出流量会折算为路段通行能力,以折算后的流量流出该路段,形成物理瓶颈,在道路网中需求折算是从上游到下游依次进行的。拥堵回溯是指从物理瓶颈的下游出口处开始拥堵空间排队,其排队车辆数从该瓶颈路段向上游路段回溯;当

拥堵排队的长度大于瓶颈路段长度时,排队会溢出至该路段的上游,形成次生瓶颈;若拥堵排队溢出至交通起点,则在起点处进行点排队,不占用道路空间;在道路网中,拥堵回溯是从下游到上游依次进行的。拥堵区域识别是识别道路网中的局部拥堵区域,拥堵区域的终点是瓶颈路段下游出口处,起点是瓶颈路段进行拥堵回溯的拥堵空间排队队尾路段的下游出口处。需求加载是指在局部畅通区域中将需求加载在阻抗最小的路径上,在局部拥堵区域中需求加载在阻抗最大的路径上,从而满足整个道路网上的用户均衡原理。

如图 1 所示,由于路径 1 需求流量为 1 200 pcu/h,大于路段 d (Link d) 的通行能力,在路段 d 上形成物理瓶颈,产生拥堵空间排队;瓶颈处的空间排队向上游蔓延,当排队车辆数超过路段存储容量时,排队溢出至上游路段 c ,拥堵空间排队的部分形成局部拥堵区域。在交通流分配过程的每一次迭代中,对拥堵空间排队产生的路段(路段 d)进行需求折算,根据拥堵车辆数推测拥堵是否回溯至上游路段(路段 c)识别拥堵区域,最后在当前路网状态下进行不同规则的需求加载,从而体现真实情况中的拥堵空间排队和溢出现象,更清晰地描述路网中拥堵瓶颈和拥堵区域的位置。

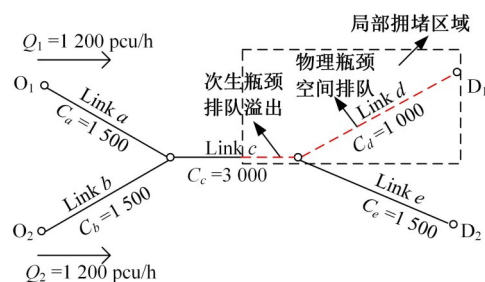


图 1 拥堵空间排队和溢出示意图

Fig. 1 Schematic diagram of congestion space queuing and spillover

2 本文模型

2.1 符号描述与参数解释

本文模型中涉及的所有变量和参数解释如表 1 所示,其中一些重要参数可以通过图 2 示意图进行直观描述。图 2 包括两条路径:路径 1 的拟分配需求流量和车辆数分别为 q_{OD_1} 和 N_{OD_1} , 路径 2 则为 q_{OD_2} 和 N_{OD_2} 。路径 1 经过路段 a, b , 路径 2 经过路段 a, c , 假定路径 1 的需求流量大于路段 b

的通行能力 C_b , 形成拥堵空间排队并溢出至路段 a 上。对于路段 b 而言, X_b 为其拟分配需求流量 (数值上等于 q_{OD_1}); x_b 为流入路段 b 的流量; y_b 为考虑路段通行能力而拥堵实际流出路段 b 的流量; NQ_b 为路段 b 出口处准备在路段 b 上排队的需求车辆数; NB_b 为在路段上排队后蔓延溢出路段 b 的车辆数; K_b 为路段 b 的拥堵比例。路径 2 未发生拥堵, 但由于路径 1 和路径 2 均通过路段 a , 路

径 1 的拥堵排队溢出至路段 a , 所以路径 2 的需求流量通过路段 a 时也会受到拥堵的影响。对于路段 a 而言, $y_{1,a}$ 和 $NQ_{1,a}$ 分别为属于路径 1 的实际流出流量和来自路段 b 溢出的车辆数; $y_{2,a}$ 和 $NQ_{2,a}$ 分别为属于路径 2 的实际流出流量和路径 2 受到拥堵干扰影响在路段 a 上排队的车辆数, $y_{1,a} + y_{2,a}$ 为路段 a 的实际流出流量; $NQ_{1,a} + NQ_{2,a}$ 为准备在路段 a 上排队的车辆数。

表 1 变量和参数解释表

Table 1 Variable and parameter explanation

序号	类型	参数	含义
1		X_a	路段 a 上的需求流量, 是计划分配并允许超过路段通行能力的流量, pcu/time
2		x_a	路段 a 上的流入流量, 是考虑路段 a 上游需求折算后流入路段 a 并允许超过路段通行能力的流量, pcu/time
3		y_a	路段 a 上的流出流量, 是考虑下游空间排队和溢出, 进行需求折算和拥堵回溯后路段 a 实际流出并不超过路段通行能力的流量, pcu/time
4		$y_{1,a}$	次生瓶颈路段 a 上干扰流的流出流量, 是经过路段 a 的所有路径中, 路段 a 下游产生拥堵空间排队并蔓延溢出至路段 a 的部分路径, 通过路段 a 的部分流出流量, pcu/time
5		$y_{2,a}$	次生瓶颈路段 a 上被干扰流的流出流量, 是经过路段 a 的所有路径中, 路段 a 下游没有产生拥堵空间排队或没有蔓延溢出至路段 a , 但受到其他产生拥堵空间排队并蔓延溢出至路段 a 的路径干扰的部分路径, 通过路段 a 的部分流出流量, pcu/time
6		$y_{a,k}^{rs}$	出发地为 r 、目的地为 s 的 OD 间的第 k 条路径上, 路段 a 紧邻的下游路段总流出流量, pcu/time
7		NQ_a	路段 a 下游出口处在路段 a 上的待排队需求车辆数, 是计划分配并允许超过路段存储容量的车辆数, pcu
8		$NQ_{1,a}$	次生瓶颈路段 a 下游出口处在路段 a 上的干扰流待排队需求车辆数, 是经过路段 a 的所有路径中, 路段 a 下游产生拥堵空间排队并蔓延溢出至路段 a 的部分路径, 在路段 a 下游出口处产生的部分待排队车辆数, pcu
9		$NQ_{2,a}$	次生瓶颈路段 a 下游出口处在路段 a 上的被干扰流待排队需求车辆数, 是经过路段 a 的所有路径中, 路段 a 下游没有产生拥堵空间排队或没有蔓延溢出至路段 a , 但受到其他产生拥堵空间排队并蔓延溢出至路段 a 的路径干扰部分路径, 在路段 a 下游出口处产生的部分待排队需求车辆数, pcu
10	路段属性	NB_a	路段 a 上游入口处排队溢出的需求车辆数, 是路段 a 待排队需求车辆数超过路段存储容量后从该路段溢出的需求车辆数, pcu
11		$NB_{a,k}^{rs}$	出发地为 r 、目的地为 s 的 OD 间的第 k 条路径上, 路段 a 紧邻的下游路段入口处排队溢出总需求车辆数, pcu
12		$t_a(\Omega)$	路段 a 的交通阻抗, 根据路段的畅通拥堵状态、流入/流出流量和上游入口处排队溢出车辆数计算得出, Ω 为自变量 x_a, y_a, NQ_a, NB_a 的集合, time
13		$t_{1,a}(x_a)$	路段 a 以流入流量为自变量的畅通状态阻抗函数, 由路段通行能力 C_a 、自由流通过时间 $t_{0,a}$ 等组成, 畅通状态下流量增大、密度增大、速度减小、通过时间增加, 故阻抗函数为单调递增函数
14		$t_{2,a}(y_a)$	路段 a 以流出流量为自变量的拥堵状态阻抗函数, 由路段通行能力 C_a 、自由流通过时间 $t_{0,a}$ 等组成, 拥堵状态下流量增大、密度减小、速度增大、通过时间减少, 故阻抗函数为单调递减函数
15		C_a	路段 a 的通行能力, 是通过该路段上瓶颈的最大流量, 简化为该路段固定的出口容量, pcu/time
16		γ_a	路段 a 的需求折算系数
17		$\gamma_{a,k}^{rs}$	出发地为 r 、目的地为 s 的 OD 间的第 k 条路径上, 导致次生瓶颈路段 a 拥堵的下游最近物理瓶颈路段的需求折算系数
18		K_a	路段 a 的拥堵比例, 是路段 a 上拥堵排队部分占该路段的比例
19		F_k^r	出发地为 r 、目的地为 s 的 OD 间第 k 条路径上的需求流量, pcu/time
20		$f_m^{(r^+s^+)}$	在局部畅通子网络中, 起讫点分别为 r^+, s^+ 的第 m 条路径上的流量, pcu/time
21		$f_n^{(r^-s^-)}$	在局部拥堵子网络中, 起讫点分别为 r^-, s^- 的第 n 条路径上的流量, pcu/time
22	路径属性	$\delta_{a,k}^{rs}$	路段-路径相关变量, 如果路段 a 属于从出发地 r 到目的地 s 的 OD 间的第 k 条路径, 则 $\delta_{a,k}^{rs} = 1$, 否则 $\delta_{a,k}^{rs} = 0$
23		$\mu_{a,k}^{rs}$	0-1 变量, 如果路段 a 是从出发地为 r 到目的地为 s 的 OD 间的第 k 条路径上的最上游首条路段, 则 $\mu_{a,k}^{rs} = 1$; 否则 $\mu_{a,k}^{rs} = 0$

续表

序号	类型	参数	含义
24	OD 属性	q_{rs}	出发地 r 和目的地 s 间的 OD 交通需求流量,是道路网中 r 、 s 间计划或预期分配的流量,pcu/time
25		$q_{r^+s^+}$	在局部畅通子网络中,起讫点分别为 r^+ 、 s^+ 间的交通分配流量,pcu/time
26		$q_{r^-s^-}$	在局部拥堵子网络中,起讫点分别为 r^- 、 s^- 间的交通分配流量,pcu/time
27		N_{rs}	出发地 r 与目的地 s 间的 OD 交通需求车辆数,是道路网中 r 、 s 间计划或预期分配的遇到瓶颈时产生空间排队的车辆数,pcu
28	节点	N	道路网中节点的集合
29		R	道路网中出发地的集合, $R \subset N$
30		S	道路网中目的地的集合, $S \subset N$
31	路段、路径集合	A	道路网中路段的集合
32		A^+	每次迭代过程中需求折算和拥堵回溯后,道路网中完全畅通状态的路段集合, $A^+ \subset A$
33		A^*	每次迭代过程中需求折算和拥堵回溯后,道路网中 $x_a > C_a$ 时导致形成拥堵空间排队的完全拥堵状态的物理瓶颈路段集合, $A^* \subset A$
34		A^-	每次迭代过程中需求折算和拥堵回溯后,道路网中 $x_a \leq C_a$ 但由于物理瓶颈导致的拥堵空间排队进行蔓延溢出而形成的完全拥堵状态的次生瓶颈路段集合, $A^- \subset A$
35		$A^\pm$	每次迭代过程中需求折算和拥堵回溯后,道路网中 $x_a \leq C_a$ 但由于物理瓶颈导致的拥堵空间排队进行蔓延溢出而形成的半畅通半拥堵状态的次生瓶颈路段集合, $A^\pm \subset A$
36		$A_{a,k}^r$	出发地为 r 、目的地为 s 的 OD 间的第 k 条路径上的最上游首条路段集合, $A_{a,k}^r \subset A$
37		$A_{a,k}^{rs}$	出发地为 r 、目的地为 s 的 OD 间的第 k 条路径上,路段 a 的所有上游路段集合,其中不包括路段 a , $A_{a,k}^{rs} \subset A$
38		$A_{a,k}^{rs}$	出发地为 r 、目的地为 s 的 OD 间的第 k 条路径上,导致次生瓶颈路段 a 拥堵的下游最近物理瓶颈的所有上游路段集合,其中不包括该物理瓶颈, $A_{a,k}^{rs} \subset A$
39		P_{rs}	出发地 r 和目的地 s 间的所有路径集合

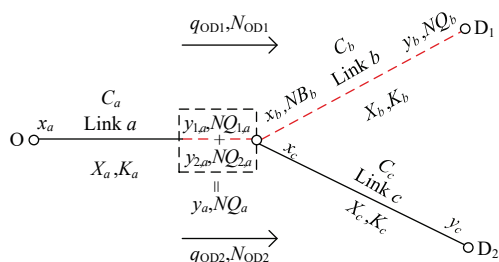


图 2 变量和参数解释示意图

Fig. 2 Schematic diagram of variable and parameter explanation

2.2 模型构建

本文考虑的道路网络为一般性网络,该网络中存在拥堵路段,故可将基础网络分为局部畅通子网络和局部拥堵子网络,以此构建用户均衡分配模型,求解分配流量,得到均衡条件下各路段的状态信息。根据 Wardrop 提出的畅通状态下用户均衡原理^[1]和完全拥堵状态下的拥堵用户均衡原理^[14,19],对于实际情况中存在局部畅通和局部拥堵的道路网络而言,其道路网络用户均衡需满足如下条件:对于整体道路网而言,当网络达到用户均衡状态时,各 OD 对加载流量的路径具有相等且最小的行程时间,没有加载流量的路径时间大于或等于最小行程时间;对于局部畅通子网络而言,行程时间随实际加载流量的增大而增加,需求

加载在行程时间短的路径上,故达到均衡状态时,畅通子网络中各 OD 对间加载流量的路径具有相等且最小的行程时间,没有加载流量的路径时间大于或等于最小行程时间;对于局部拥堵子网络而言,行程时间随实际加载流量的增大而减少,需求加载在行程时间长的路径上,每条路段都有加载的流量,故达到均衡状态时,子网络中各 OD 对间加载流量的路径具有相同的行程时间。

本文集成传统畅通用户分配的 Beckmann 模型^[2]和完全拥堵状态的用户分配模型^[14],构建考虑拥堵空间排队和溢出的交通流用户均衡分配模型。该模型为双层规划模型,上层规划模型是基于路段阻抗函数的整体道路网络需求交通流分配模型,为整体用户均衡分配模型,符合整体道路网的用户均衡原理;下层规划模型包括两个子规划模型,分别为基于局部畅通子网络的流入交通流分配模型和基于局部拥堵子网络的流出交通流分配模型,符合局部畅通子网络和局部拥堵子网络的用户均衡原理,对应局部畅通子网络和局部拥堵子网络不同的需求加载机制。模型构建思路如图 3 所示。

上层规划模型体现整体道路网络的均衡状态,需求加载在整体道路网中的最短路,目标函数为道

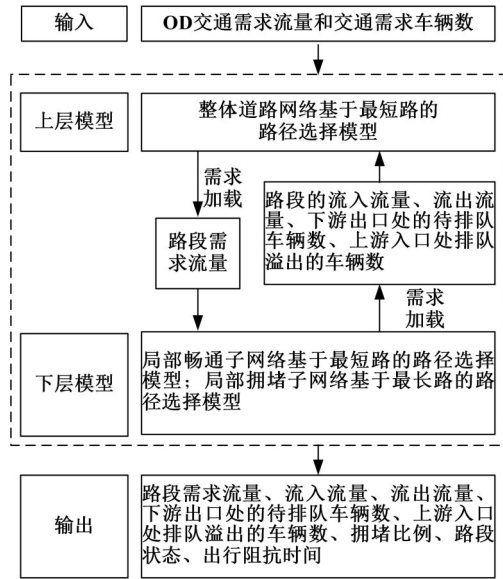


图3 模型构建思路图

Fig. 3 Model construction idea diagram

路网中所有路段阻抗函数积分求和的最小值:

$$\text{UP: } \min Z = \sum_{a \in A} \int_0^{X_a} t_a(\Omega) dX_a \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_k F_k^{(rs)} = q_{rs} \\ F_k^{(rs)} \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

下层规划模型1体现的是局部畅通子网络的均衡状态,包括完全畅通的路段和半畅通的路段。由于半畅通路段的阻抗函数随流量的增大也呈递增趋势,与完全畅通路段一致,且其路段拥堵比例也小于1,故将其与完全畅通路段均视为局部畅通区域。在局部畅通区域,交通流处于畅通状态,交通流密度小于临界密度,由于车流速度随密度的增大而减少、流量随密度的增大而增大,故行程时间随实际加载流量的增大而增加,需求加载在局部畅通子网络中阻抗最小的最短路径,目标函数为畅通子网络中路段阻抗函数积分求和的最小值,如式(3)(4)所示。

$$\text{LP}_1: \min Z_1 = \sum_{a \in (A^+ \cup A^\pm)} \int_0^{x_a} t_a(\Omega) dx_a \quad (3)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_m f_m^{(r^+s^+)} = q_{r^+s^+} \\ f_m^{(r^+s^+)} \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

下层规划模型2体现的是局部拥堵子网络的均衡状态,当局部拥堵区域内全部路段均处于拥堵状态时,交通流密度大于临界密度,由于交通流密度继续增大时速度继续减小,通过时间继续增加,而流量逐渐减小,故路阻随疏解(实际通过)流

量的增大而减小。所以在疏解流量守恒的条件下,通过选择最长路径(严重拥堵路径)加载更多的疏解流量(减少车辆数降低拥挤程度)、选择最短路径(轻微拥堵路径)加载更少的疏解流量(增加车辆数提高拥挤程度),实现逐步逼近拥堵区域的用户均衡状态。故需求加载在局部拥堵子网络中阻抗最大的最长路,目标函数为拥堵子网络中路段阻抗函数积分求和的最大值,即 $\max \sum_{a \in (A^+ \cup A^-)} \int_0^{y_a} t_a(\Omega) dy_a$ 。为便于模型统一和求解计算,将其转换为最小型,如下所示:

$$\min \sum_{a \in (A^+ \cup A^-)} \int_{y_a}^{C_a} t_a(\Omega) dy_a$$

则下层规划模型2构建如式(5)(6)所示。

$$\text{LP}_2: \min Z_2 = \sum_{a \in (A^+ \cup A^-)} \int_{y_a}^{C_a} t_a(\Omega) dy_a \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_n f_n^{(r^-s^-)} = q_{r^-s^-} \\ f_n^{(r^-s^-)} > 0 \end{cases} \quad (6)$$

各路段需求流量 X_a 与路径流量的关系为:

$$X_a = \sum_r \sum_s \sum_k F_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad (7)$$

$$\forall r \in R, s \in S, k \in P_{rs}, a \in A$$

各路段的流入流量 x_a 是通过从上游到下游依次进行需求折算得到的,物理瓶颈导致的需求折算用该路段的折算系数 γ_a 实现。路段的流入流量则为通过该路段的各路径需求流量与其上游路段总折算系数的乘积总和,路段流入流量和折算系数的计算分别如式(8)(9)所示。

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k \left(F_k^{rs} \cdot \delta_{a,k}^{rs} \cdot \prod_{\tilde{a} \in A_{a,k}^{(n)}} \gamma_{\tilde{a}} \right) \quad \forall r, s, k, a \quad (8)$$

$$\gamma_a = \begin{cases} \frac{C_a}{x_a}, & \forall x_a > C_a, a \in A \\ 1, & \forall x_a \leq C_a, a \in A \end{cases} \quad (9)$$

各路段的流出流量 y_a 、下游出口处待排队车辆数 NQ_a 、上游入口处排队溢出车辆数 NB_a 是通过从下游到上游依次进行拥堵回溯计算得到的。畅通状态路段的流出流量与其流入流量一致;物理瓶颈路段的流出流量是其通行能力,也是该路段所在各路径流入流量与该瓶颈路段折算系数的乘积之和;次生瓶颈路段的流出流量为干扰流部分 $y_{1,a}$ 和被干扰流部分 $y_{2,a}$ 之和,干扰流部分的流出流量是该路径下游最近物理瓶颈的流出流量,被干扰流的流出流量仍为其所在路径流入流量与

该路段折算系数的乘积。路段流出流量计算公式如式(10)~(12)所示。

$$y_a = \begin{cases} x_a, & \forall x_a \leq C_a, \forall NB_{\bar{a},k}^{rs} = 0 \\ y_{1,a} + y_{2,a}, & \forall x_a \leq C_a, \exists NB_{\bar{a},k}^{rs} > 0 \\ \sum_r \sum_s \sum_k \left(F_k^{rs} \cdot \delta_{a,k}^{rs} \cdot \prod_{\bar{a} \in A_{\bar{a},k}^{rs}} \gamma_{\bar{a}} \cdot \gamma_a \right), & \forall x_a > C_a \end{cases} \quad (10)$$

$$y_{1,a} = \sum_r \sum_s \sum_k \left(F_k^{rs} \cdot \delta_{a,k}^{rs} \cdot \prod_{\bar{a} \in A_{\bar{a},k}^{rs}} \gamma_{\bar{a}} \cdot \gamma_a^{rs} \right) \quad (11)$$

$$\forall NB_{\bar{a},k}^{rs} > 0, a \in A, \bar{a} \in A$$

$$y_{2,a} = \sum_r \sum_s \sum_k \left(F_k^{rs} \cdot \delta_{a,k}^{rs} \cdot \prod_{\bar{a} \in A_{\bar{a},k}^{rs}} \gamma_{\bar{a}} \cdot \gamma_a \right) \quad (12)$$

$$\forall NB_{\bar{a},k}^{rs} = 0, a \in A, \bar{a} \in A$$

在拥堵回溯过程中,既包括流量的回溯过程,也包括车辆数的回溯过程。车辆数的拥堵回溯在路段上产生的空间排队车辆数有两种:路段下游出口处的待排队车辆数 NQ_a 和路段上游入口处排队溢出的车辆数 NB_a 。路段下游出口处待排队车辆数与路段流出流量的回溯计算是同时进行的,畅通状态路段下游出口处没有待排队车辆数,物理瓶颈路段的下游出口处待排队车辆数包括两项:第1项为各 OD 对中需经该瓶颈的车辆数,按其路径加载流量占 OD 对总需求流量的比例分配后求和;第2项为瓶颈路段上完全拥堵时容纳的车辆数(本文假设瓶颈为出口瓶颈)。次生瓶颈路段下游出口处待排队车辆数同样也由于干扰流部分 $NQ_{1,a}$ 和被干扰流部分 $NQ_{2,a}$ 组成;干扰流部分的待排队车辆数是通过次生瓶颈的路径紧邻下游路段排队溢出车辆数按各自在下游路段的流出流量占下游路段总流出流量的比例进行分配,并求和得到;被干扰流部分的待排队车辆数是通过次生瓶颈路径在该路段加载的流出流量与干扰流部分拥堵溢出的车辆数通过路段下游出口处消散时间的乘积总和。路段下游出口处待排队车辆数的计算如式(13)~(15)所示:

$$NQ_a = \begin{cases} 0, & \forall x_a \leq C_a, \forall NB_{\bar{a},k}^{rs} = 0 \\ NQ_{1,a} + NQ_{2,a}, & \forall x_a \leq C_a, \exists NB_{\bar{a},k}^{rs} > 0 \\ \sum_r \sum_s \sum_k \left(N_{rs} \cdot \frac{F_k^{rs}}{q_{rs}} \cdot \delta_{a,k}^{rs} \right) + y_a \cdot t_{2,a}(y_a), & \forall x_a > C_a \end{cases} \quad (13)$$

$$NQ_{1,a} = \sum_r \sum_s \sum_k \left(NB_{\bar{a},k}^{rs} \cdot \frac{F_k^{rs} \cdot \prod_{\bar{a} \in A_{\bar{a},k}^{rs}} \gamma_{\bar{a}} \cdot \gamma_{\bar{a},k}^{rs}}{y_{\bar{a},k}^{(rs)}} \cdot \delta_{a,k}^{rs} \right) \quad (14)$$

$$\forall NB_{\bar{a},k}^{rs} > 0, a \in A, \bar{a} \in A$$

$$NQ_{2,a} = \sum_r \sum_s \sum_k \left(F_k^{rs} \cdot \delta_{a,k}^{rs} \cdot \prod_{\bar{a} \in A_{\bar{a},k}^{rs}} \gamma_{\bar{a}} \cdot \gamma_a \cdot \frac{NQ_{1,a}}{y_a} \right) \quad (15)$$

$$\forall NB_{\bar{a},k}^{rs} = 0, a \in A, \bar{a} \in A$$

路段上游入口处排队溢出的车辆数根据路段下游出口处的待排队车辆数和路段的存储容量计算得出,路段的存储容量根据路段流出流量与路段拥堵阻抗时间的乘积计算得到,如式(16)所示。

$$NB_a = \begin{cases} 0, & \forall NQ_a \leq y_a \cdot t_{2,a}(y_a), a \in A \\ NQ_a - y_a \cdot t_{2,a}(y_a), & \\ \forall NQ_a > y_a \cdot t_{2,a}(y_a), a \in A \end{cases} \quad (16)$$

根据路段的流量和车辆数信息,可以对路段的拥堵比例 K_a 和所处状态进行计算判定,从而进行拥堵区域的识别。路段下游出口处有待排队车辆数的路段拥堵比例根据待排队车辆数和路段存储容量的比值计算得出,若待排队车辆数超过路段存储容量,则其拥堵比例为1,如式(17)所示:

$$K_a = \begin{cases} 0, & \forall NQ_a = 0, a \in A \\ \frac{NQ_a}{y_a \cdot t_{2,a}(y_a)}, & \forall NQ_a > 0, \\ NQ_a \leq y_a \cdot t_{2,a}(y_a), a \in A \\ 1, & \forall NQ_a > y_a \cdot t_{2,a}(y_a), a \in A \end{cases} \quad (17)$$

根据拥堵比例,路网中的路段包含3种状态: $K_a = 1$ 时,为完全拥堵状态; $K_a = 0$ 时,为完全畅通状态; $0 < K_a < 1$ 时,拥堵排队蔓延至路段中间,所以路段下游部分有拥堵排队但上游部分没有排队的半畅通半拥堵状态(部分畅通部分拥堵状态)。根据流入流量和拥堵比例的不同,不同状态的路段包括完全畅通路段、半畅通半拥堵的次生瓶颈路段、完全拥堵的次生瓶颈路段、完全拥堵的物理瓶颈路段,路段 $x_a > C_a$ 时导致形成拥堵空间排队的处于完全拥堵状态的路段为物理瓶颈路段,路段 $x_a \leq C_a$ 但由于空间排队进行蔓延而形成的次生瓶颈包括半畅通半拥堵状态和完全拥堵状态的次生瓶颈路段,如式(18)所示。

$$a \in \begin{cases} A^+, & \forall x_a \leq C_a, K_a = 0 \\ A^\pm, & \forall x_a \leq C_a, 0 < K_a < 1 \\ A^-, & \forall x_a \leq C_a, K_a = 1 \\ A^*, & \forall x_a > C_a, K_a = 1 \end{cases} \quad (18)$$

需求加载根据路段的阻抗时间进行,在模型中,路段阻抗 t_a 主要由路段畅通部分阻抗和拥堵部分阻抗两部分构成:畅通部分的路阻函数 $t_{1,a}(x_a)$ 为单调递增的畅通状态阻抗函数,拥堵部分的路阻函数 $t_{2,a}(y_a)$ 为单调递减的拥堵状态阻抗函数。若是各路径的起始路段,则还包括该路段上游起点处进行点排队的阻抗,如式(19)(20)所示。

$$t_a(\Omega) = t_a(x_a, y_a, K_a, NB_a) = t_a(x_a, y_a, NQ_a, NB_a) = (1 - K_a) \cdot t_{1,a}(x_a) + K_a \cdot t_{2,a}(y_a) + \sum_r \sum_s \sum_k \sum_a \mu_{a,k}^{rs} \cdot \frac{NB_a \cdot \left(F_k^{rs} \cdot \prod_{\tilde{a} \in A_{a,k}^{rs}} \gamma_{\tilde{a}}^{rs} \cdot \gamma_{\tilde{a},k}^{rs} / y_a \right)}{y_a}, \forall r, s, k, a \quad (19)$$

$$\mu_{a,k}^{rs} = \begin{cases} 1, & \forall a \in A_k^{rs} \\ 0, & \forall a \notin A_k^{rs} \end{cases} \quad (20)$$

路段阻抗根据 x_a, y_a, K_a, NB_a 计算得出,而 K_a 又由 y_a, NQ_a 计算得出,故路段阻抗函数的自变量包括 x_a, y_a, NQ_a, NB_a 。除路径起始路段包含式(19)第3项外,完全畅通的路段阻抗计算只包含式(19)第1项,即 $(1 - K_a) \cdot t_{1,a}(x_a)$,完全拥堵的路段阻抗计算只包含式(19)第2项,即 $K_a \cdot t_{2,a}(y_a)$,为整体阻抗函数的特殊情况。

本文构建的交通流用户均衡分配模型,考虑了拥堵空间排队和溢出所导致的路段实际分配流量与传统分配流量的不同,采用流入流量和流出流量对实际情况进行描述,并考虑了流量和车辆数的加载回溯过程,有效描述了空间排队和溢出现象及其相关机制,是更符合一般路网状况的分配模型。而传统畅通用户分配的Beckmann模型和完全拥堵状态的用户分配模型都是本文模型在畅通状态或拥堵状态下的特殊情况。

2.3 解的均衡性证明

本文模型是Beckmann模型的拓展和更一般化的情况,其基于考虑拥堵空间排队和溢出的用户均衡原理提出,与Beckmann模型类似,本文模型的解满足考虑拥堵空间排队和溢出的用户均衡原理准则。

类似于Beckmann模型等价于Wardrop原理的证明,整体道路网络的上层规划模型等价于考虑拥堵空间排队和溢出的用户均衡原理中整体道路网均衡状态。根据模型构建其拉格朗日函数为:

$$L = Z(X) + \sum_{rs} u_{rs} \left(q_{rs} - \sum_k F_k^{rs} \right) \quad (21)$$

式中: u_{rs} 为拉格朗日乘子。

根据K-T条件,拉格朗日函数在极值点满足的条件等价于:

$$F_k^{rs} (c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 \text{ 和 } c_k^{rs} - u_{rs} \geq 0, \forall r, s, k \quad (22)$$

式中: c_k^{rs} 为该路径的总阻抗时间。

由式(22)可以看出,对于整体道路网而言,任何情况下, c_k^{rs} 总是不小于 u_{rs} ,则 u_{rs} 就是 r, s 之间最短路径的阻抗。当第 k 条路径上加载有从 r 到 s 的流量时,路径阻抗 c_k^{rs} 等于 r, s 之间最短路径的阻抗 u_{rs} ;当第 k 条路径上没有加载从 r 到 s 的流量时,路径阻抗 c_k^{rs} 大于或等于 r, s 之间最短路径的阻抗 u_{rs} 。这与考虑拥堵空间排队和溢出的用户均衡原理中整体道路网均衡状态等价。

同理可知,对于局部畅通子网络而言,当路径上加载流量时,其路径阻抗等于最短路径的阻抗;当路径上没有加载流量时,其路径阻抗大于或等于最短路径的阻抗。这与考虑拥堵空间排队和溢出的用户均衡原理中局部畅通子网络均衡状态等价。对于局部拥堵子网络而言,由于拥堵路网的每条路段都有加载的流量,故每个OD对各条加载流量的路径阻抗相等,拥堵用户均衡状态下所有路径疏解时间均相等,这与考虑拥堵空间排队和溢出的用户均衡原理中局部拥堵子网络均衡状态等价。

综上所述,本文双层规划模型与考虑拥堵空间排队和溢出的用户均衡原理是等价的,模型的解是均衡解,满足用户均衡原理的均衡准则。

2.4 解的唯一性证明

模型的解主要包括路段需求流量 X_a 和路段最终交通状态 (x_a, y_a, K_a, NB_a) ,后者即为计算路段阻抗的各项指标。由于 $t_a(\Omega) = t_a(x_a, y_a, K_a, NB_a)$ 是隐式函数,无法有效提供其显性公式,且在物理瓶颈上产生拥堵空间排队溢出时,其路段阻抗和交通状态是固定的,此时根据上层规划公式(1)构造的Hessian矩阵无法判定为正定,故路段需求流量的唯一性无法有效证明。证明交通状态 (x_a, y_a, K_a, NB_a) 的唯一性时,需要证明拥堵区域的固定性和唯一性,即每个路段的 K_a 是唯一的,并证明每个路段的 x_a, y_a 和路径起始路段的 NB_a 是唯一的。

首先,若模型达到均衡状态时其局部拥堵区

域的空间位置和形状大小是固定的,则对于局部畅通区域而言,即下层规划式(3)(4)等价于完全畅通的 Beckmann 模型,其最短路的选取和该区域的分配结果是唯一的;对于局部拥堵区域而言,即下层规划式(5)(6)等价于完全拥堵的分配模型,参考岳昊等的证明^[14],其最长路的选取和该区域的分配结果也是唯一的;综上,当模型达到均衡状态时的最终拥堵区域是固定区域时,模型解 (x_a, y_a, K_a, NB_a) 具有唯一性。

然后,由于 $t_a(\Omega)$ 是隐式函数,无法提供显性的数理证明,因此采用反证法证明模型达到均衡状态时其最终拥堵区域是固定区域,即模型解 (x_a, y_a, K_a, NB_a) 具有唯一性。若模型没有唯一均衡解,设其中一个均衡解为 Ω^* ,则存在另外一个均衡解 Ω^{**} , Ω^* 和 Ω^{**} 均满足用户均衡原理。若 Ω^* 和 Ω^{**} 各自对应的拥堵区域所在位置不同,说明 Ω^* 和 Ω^{**} 在进行分配时某些 OD 对的最短路径选择不一致,导致各路段分配流量的不同以及产生拥堵区域的不一致。对于相同的 OD 对而言,若 Ω^* 选择的路径是整体的最短路,则 Ω^{**} 选择的路径不是整体的最短路,其分配结果也不满足用户均衡原理,这与 Ω^{**} 也是模型的最优均衡解并满足用户均衡原理相矛盾。若 Ω^* 和 Ω^{**} 各自对应的拥堵区域所在位置相同但其形状大小不一致,由于 Ω^* 是模型的最优均衡解,满足用户均衡原理,故其在拥堵区域内每个 OD 对各条加载流量的路径具有相同行程时间,若将 Ω^* 的结果迭代转换成 Ω^{**} 的结果,则需要将其拥堵区域内某些 OD 对的流量从某些路径转移到另一些路径上,才能导致拥堵区域的形状大小不同,转移后涉及转换流量的路径行程时间就会发生变化,则转换后的结果(即 Ω^{**})存在拥堵区域内某些 OD 对各条加载流量路径行程时间不同的现象,这与 Ω^{**} 也是模型的最优均衡解并满足用户均衡原理相矛盾。

综上所述,模型达到均衡时的最终拥堵区域是唯一固定的区域,不存在两个及以上的最优均衡解,即模型的路段最终交通状态具有唯一解。

3 求解算法

由于本文构建的模型是传统静态畅通和拥堵交通流用户均衡分配模型的扩展,在求解过程中改进求解 Beckmann 模型的 FW 算法,将整体道路网络分为局部畅通子网络和局部拥堵子网络进行

处理,并在每一步迭代过程中引入需求折算、拥堵回溯、拥堵区域识别等机制之后再行需求加载,算法步骤如下所示。

Step1 初始化:令 $n=1$,根据 $t_a^0=t_a(0,0,0,0), \forall a$,选取各 OD 对间最短路作为第 1 次的迭代路径 $P^{rs}(n)$,进行全有全无分配,得到各路径分配需求流量 F_n^{rs} 。

Step2 加载初始需求:对所有加载流量路径的路段进行编号,基于此识别瓶颈,进行需求折算和拥堵回溯,得到第 n 次路网分配结果。

Step2.1 对所有加载流量的路径进行编号,路径最前面路段编号为 1,根据路径从上游到下游对路径上路段从小到大依次编号,当多个路径共同经过同一路段时,该路段取最大编号,下游各路段编号依次增加,遍历所有路径后,每条路径的大编号路段总在小编号路段的下游,从而保证需求折算和拥堵回溯的顺序性。

Step2.2 识别物理瓶颈和次生瓶颈,进行需求折算和拥堵回溯,得到第 n 次路网分配结果,包括路段的分配需求流量 X_a^n 、流入流量 x_a^n 、流出流量 y_a^n 、下游出口处待排队车辆数 NQ_a^n 、上游入口处排队溢出车辆数 NB_a^n 、第 k 条路径的分配需求流量 $F_{n,k}^{rs}$;物理瓶颈识别和需求折算从上游路段开始,从小编号到大编号依次进行;拥堵回溯和次生瓶颈识别从下游瓶颈开始,从大编号到小编号依次进行。

Step3 计算更新阻抗: $t_a^n=t_a(x_a^n, y_a^n, NQ_a^n, NB_a^n), \forall a$,计算被选择的各路径阻抗 $t_k^{n,rs}=\sum_a t_a(x_a^n, y_a^n, NQ_a^n, NB_a^n) \cdot \delta_{a,k}^{rs}$ 。

Step4 识别拥堵区域:识别加载流量路段的畅通/拥堵状态,确定拥堵区域。

Step4.1 识别拥堵区域终点:瓶颈路段的出口处端点,包括物理和次生瓶颈路段。

Step4.2 识别拥堵区域起点:根据所有经过瓶颈的路径进行回溯,直到遇到队尾,队尾的出口处端点即为拥堵区域起点,队尾路段一般是半畅通半拥堵状态。

Step4.3 根据所有经过拥堵区域起、终点的路段,找到路径上位于拥堵区域起、终点间的路段,其中所有加载流量的都属于拥堵区域内路段。

Step5 选取辅助路径:按照更新后的 $t_a^n, \forall a$,进行全有全无分配,确定第 n 次的辅助路径 $P_z^{rs}(n)$,得到其分配需求流量 ZF_n^{rs} ;只根据 $P_z^{rs}(n)$

进行需求加载,得到第 n 次路网辅助分配结果。

Step5.1 在整体路网中选取最短路,记为 $P_0^{rs}(n)$ 。

Step5.2 若 $P_0^{rs}(n)$ 完全畅通,不经过拥堵区域,则 $P_0^{rs}(n)$ 为辅助路径 $P_z^{rs}(n)$;若 $P_0^{rs}(n)$ 经过拥堵区域,保留其畅通段,在 $P_0^{rs}(n)$ 通过拥堵区域的起、终点间找最长路,与畅通段一起作为辅助路径 $P_z^{rs}(n)$ 。

Step5.3 ZF_n^{rs} 为 $P_z^{rs}(n)$ 的分配需求流量,数值等于 q_{rs} 。

Step5.4 只根据 $P_z^{rs}(n)$ 进行需求加载,通过路段编号、瓶颈识别、需求折算、拥堵回溯,得到第 n 次路网辅助分配结果,包括路段的辅助分配需求流量 ZX_a^n 、辅助流入流量 zx_a^n 、辅助流出流量 zy_a^n 、下游出口处辅助待排队车辆数 ZNQ_a^n 、上游入口处辅助排队溢出车辆数 ZNB_a^n 、第 k 条路径的辅助分配需求流量 $ZF_{n,k}^{rs}$ 。

Step6 计算需求流量转移的迭代系数 λ 。由于路段阻抗函数的自变量及其计算与路段拥堵状态有关,而辅助路径分配流量后路段的拥堵状态可能会发生变化,故将传统FW算法中基于路段的 λ 计算公式修改为基于路径的计算公式,具体而言,等式(23)左侧为路径的流量转移值与转移后的路径阻抗之积,用二分法求满足下式的 λ :

$$\sum_r \sum_s \sum_k \sum_a (ZF_{n,k}^{rs} - F_{n,k}^{rs}) \cdot \delta_{a,k}^{rs} \cdot t_a [x_a^n + \lambda(zx_a^n - x_a^n), y_a^n + \lambda(zy_a^n - y_a^n), NQ_a^n + \lambda(ZNQ_a^n - NQ_a^n), NB_a^n + \lambda(ZNB_a^n - NB_a^n)] = 0 \quad (23)$$

Step7 更新分配路径:将 $P_z^{rs}(n)$ 作为第 $n+1$ 条路径 $P^{rs}(n+1)$,即 $P^{rs}(n+1)=P_z^{rs}(n)$; $P^{rs}(n+1)$ 的分配需求流量为 $F_{n+1}^{rs}=\lambda \cdot ZF_n^{rs}$;第 $i=1,2,\dots,n$ 条路径 $P^{rs}(i)$ 的分配需求流量为 $F_i^{rs}=(1-\lambda)F_i^{rs}, i=1,2,\dots,n$ 。

Step8 更新分配结果:对所有 $i=1,2,\dots,n+1$ 条加载流量的路径进行需求加载,通过路段编号、瓶颈识别、需求折算、拥堵回溯,得到第 $n+1$ 次路网分配结果,包括路段分配需求流量 X_a^{n+1} 、流入流量 x_a^{n+1} 、流出流量 y_a^{n+1} 、下游出口处待排队车辆数 NQ_a^{n+1} 、上游入口处排队溢出车辆数 NB_a^{n+1} 、第 k 条路径的分配需求流量 $F_{n+1,k}^{rs}$ 。

Step9 计算更新阻抗: $t_a^{n+1}=t_a(x_a^{n+1}, y_a^{n+1}, NQ_a^{n+1}, NB_a^{n+1}), \forall a$, 计算被选择的各路径阻抗

$$t_k^{n+1,rs} = \sum_a t_a(x_a^{n+1}, y_a^{n+1}, NQ_a^{n+1}, NB_a^{n+1}) \cdot \delta_{a,k}^{rs}$$

Step10 判断迭代终止条件。如果满足 $e \leq \epsilon$ 的收敛精度要求,就停止迭代,分配结果为第 $n+1$ 次路网分配结果;否则令 $n=n+1$,返回Step4继续迭代。精度 e 的表达式为:

$$e = \frac{2 \sum_a (t_a^{n+1} - t_a^n)^2}{\sum_a t_a^n} \quad (24)$$

为描述拥堵空间排队和溢出现象,本文算法在改进FW算法过程中引入路段编号、瓶颈识别、需求折算、拥堵回溯、拥堵区域识别,同时在全局整体区域和局部拥堵区域内的需求加载分别选择全局最短路和局部最长路机制,算法计算复杂度与Beckmann模型的FW算法是相近的。

4 算例分析

4.1 简单算例

单OD对简单算例道路网包括5条路段和一个OD对(1~5),路网结构如图4所示,路段上数字代表各路段自由流通过时间 $t_{0,a}$ 和通行能力 C_a 。OD对间交通需求流量 $q_{rs}=8$,交通需求车辆数 $N_{rs}=1200$ 。OD对间有2条路径 $P_1(1-2-4-5)$ 和 $P_2(1-2-3-4-5)$ 。简单算例中包含了流量汇聚和分岔的基本形式,可作为典型算例代表实际路网。为计算方便,基于格林希尔兹表达式,路段畅通和拥堵状态的阻抗函数为:

$$t_{i,a} = \begin{cases} \frac{2t_{0,a}}{1 + \sqrt{1 - \frac{x_a}{C_a}}}, & i=1 \\ \frac{2t_{0,a}}{1 - \sqrt{1 - \frac{y_a}{C_a}}}, & i=2 \end{cases} \quad (25)$$

式中: x_a 为路段流入流量; y_a 为路段流出流量。

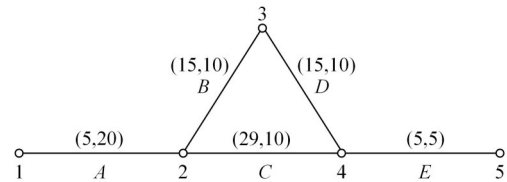


图4 单OD对简单道路网结构示意图

Fig. 4 Schematic diagram of simple road network structure with single OD pair

取收敛精度 $\epsilon=0.1\%$,在Win11的64位操作系统,AMD RYZEN 7 3700X 8-Core 3.6 GHz,16 GB内存的台式电脑上,利用Matlab对算

例进行求解,计算时间为 3.285 9 s,模型结果的误差精度 $e = 1.044 5 \times 10^{-5}$,远小于 0.1%,由此可见,模型算法可以高效求解路网的均衡状态。在计算迭代过程中,随迭代次数 n 的增加,迭代精度逐渐收敛,分配结果逐渐接近于均衡解,当 $n = 6$ 时,误差精度 $e = 1.044 5 \times 10^{-5}$,满足分配迭代精度,由此可见,模型算法计算效率较高,可以有效收敛到均衡解。

模型的流量分配结果如图 5 和表 2 所示,图 5 中虚线部分代表路段拥堵的部分,实线部分代表路段畅通的部分。路网达到均衡状态时,路径 P_1 和 P_2 的需求分配流量分别为 3.87 和 4.13,路径通过时间分别为 270.76 和 270.76,两条加载流量的路径具有相同行程时间,达到了用户均衡条件,符合用户均衡原理,说明本文模型可以有效计算路网均衡状态下的分配结果和交通状态。

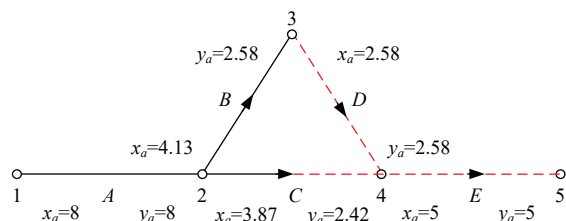


图 5 简单道路网的模型分配结果图

Fig. 5 Assignment results of the simple road network

表 2 简单道路网的模型分配结果

Table 2 Assignment results of the simple road network

路段	X_a	x_a	y_a	K_a	NQ_a	NB_a	t_a
A	8	8	8	0	0	0	5.635
B	4.13	4.13	2.58	0.11	61.18	0	38.824
C	3.87	3.87	2.42	0.53	580.43	0	255.128
D	4.13	2.58	2.58	1	619.57	61.18	216.301
E	8	5	5	1	1 250	1 200	10

分析各路段的流量结果,可以看出,由于路段 E 的通行能力为 5,小于其需求分配流量,故路段 E 为瓶颈路段,拥堵比例为 1,进行需求分配流量的折算,导致拥堵空间排队的发生,路段 E 上游入口处排队溢出的需求车辆数为交通需求分配车辆数(1 200);拥堵空间排队按照分配流量的比例分别向路段 C 和路段 D 回溯蔓延;根据路段 C、D 下游出口处待排队车辆数与路段存储容量的对比结果可知,路段 C 上的拥堵空间排队蔓延至其路段中部,路段 D 的拥堵空间排队继续溢出至路段 D 的上游路段 B;路段 D、E 为完全拥堵路段,路段 B、C 为半畅通半拥堵路段,路段 A 为完全畅通路段,符合拥堵空间排队和溢出的情况。若对路网进行结

构优化,可以考虑从拥堵瓶颈路段 E,以及拥堵溢出路段 D、C、B 等路段逐步进行调整优化扩容。

为验证模型在复杂环境下的适用性,通过参数的极端扰动进行灵敏度分析。首先,假定 OD 需求激增的极端情况,若设定 OD 对间的交通需求流量 $Q_{rs} = 8$,交通需求车辆数 $N_{rs} = 2 800$ (交通需求车辆数增加 130%),取收敛精度 $\epsilon = 0.1\%$,模型结果的误差精度 $e = 1.461 2 \times 10^{-4}$,流量分配结果如图 6 所示。路网达到均衡状态时,路径 P_1 和 P_2 的需求分配流量分别为 3.94 和 4.06,路径通过时间分别为 569.99 和 570.01,达到了用户均衡条件,说明本文模型在 OD 需求激增的情况下收敛性不受影响,仍保持稳定性和低误差。此时,路网中全部路段都处于完全拥堵状态,并且在起点 1 处形成交通起点处的点排队,模型可以有效地计算包含拥堵状态路网的均衡分配结果,明确显示路网中拥堵空间排队和点排队的交通状态。

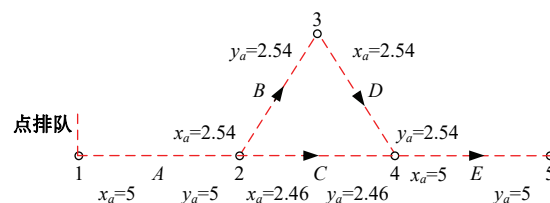


图 6 OD 需求激增的简单道路网分配结果图

Fig. 6 Assignment results of the simple road network of the surging OD demand

其次,假定通行能力骤降的极端情况,将路段 C 的通行能力修改为 3(通行能力降低 70%),OD 对间交通需求流量和交通需求车辆数仍为 $Q_{rs} = 8$, $N_{rs} = 1 200$,取收敛精度 $\epsilon = 0.1\%$,模型结果的误差精度 $e = 2.770 3 \times 10^{-6}$,流量分配结果如图 7 所示。路网达到均衡状态时,路径 P_1 和 P_2 的需求分配流量分别为 1.80 和 6.20,路径通过时间分别为 260.46 和 260.45,符合用户均衡原理,说明本文模型在通行能力骤降的情况下仍可以稳定收敛至均衡解,鲁棒性较好。同时,由于路段 C 通行能力下降,所以需求流量转移至路径 P_2 上,两条路径的拥堵程度都有所提高,路段 B、C 的拥堵比例都增大,与发生事故通行能力下降时,路网拥堵程度加剧的实际情况相一致,模型算法可以有效、真实地体现路网中拥堵的范围及发生变化时拥堵转移的情况。

4.2 对比分析

为验证本文模型和算法的有效性,针对该单 OD 对简单算例的道路网,分别将本文均衡分配

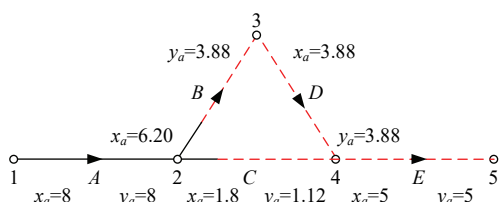


图 7 路段通行能力骤降的简单道路网分配结果图

Fig. 7 Assignment results of the simple road network of the sudden drop in link capacity

模型算法与传统 Beckmann 用户均衡分配模型,以及考虑拥堵空间排队的迭代加权的非均衡分配算法^[19]进行对比。

首先,针对该单 OD 对简单算例的道路网,将本文构建的交通流用户均衡分配模型与传统 Beckmann 用户均衡分配模型进行对比。为保持路段属性的一致性,同样基于格林希尔兹关于速度与密度关系的表达式,构建路段阻抗函数为:

$$t_a = \begin{cases} \frac{2t_{0,a}}{1 + \sqrt{1 - \frac{X_a}{C_a}}}, & X_a \leq C_a \\ \frac{2t_{0,a}}{1 + \sqrt{\frac{X_a}{C_a} - 1}}, & X_a > C_a \end{cases} \quad (26)$$

式中: X_a 为路段的需求分配流量。

取收敛精度 $\epsilon = 0.1\%$, Beckmann 模型的分配结果如图 8 所示,路网达到均衡状态时,路径 P_1 和 P_2 的需求分配流量分别为 4.47 和 3.53,且具有相等的行程时间,达到了用户均衡条件。

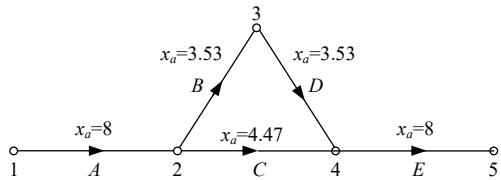


图 8 简单道路网的 Beckmann 模型分配结果图

Fig. 8 Assignment results of Beckmann model for the simple road network

分析路径 P_1 和 P_2 各自经过路段的属性,路段 C 和路段 B、D 的通行能力均为 10,路段 C 的自由流通过时间为 29,与路段 B、D 的自由流通过时间之和 30 较为相近,由此可见路径 P_1 和 P_2 的属性都较为相近,分配至两路径的需求交通也应较为相近。本文构建的用户均衡分配模型由于考虑到了实际路网空间排队溢出现象及不同需求加载机制,分配结果(见图 5)中两路径的分配流量分别为 3.87 和 4.13,相较 Beckmann 模型的分配结

果更符合路网宏观全局的运行状态。同时,Beckmann 模型的分配结果中路段 E 出现分配流量大于路段通行能力的情况,而本文模型分配结果中实际分配的流入、流出流量均不会超过路段通行能力,与实际情况更契合,相较 Beckmann 模型也可以更有效描述拥堵空间排队及溢出现象,更清晰识别瓶颈路段和拥堵区域。

其次,针对该单 OD 对简单算例的道路网,将本文构建的用户均衡分配模型及算法与考虑拥堵空间排队的迭代加权的非均衡分配算法^[19]二者的分配结果进行对比,路网属性和路段阻抗函数保持不变。取收敛精度 $\epsilon = 0.1\%$,非均衡分配算法^[19]的分配结果中路径 P_1 和 P_2 的需求分配流量分别为 6.74 和 1.26,路径通过时间分别为 256.03 和 281.65,分配结果中两条加载流量的路径的行程时间不相等,未收敛到用户均衡条件,同时针对于路径属性相近的两条路径而言,分配的需求流量差异很大,存在分配结果不合理的现象。而本文构建的用户均衡分配模型及算法可以有效地计算路网均衡状态下的分配结果和交通状态,分配结果也更符合路网属性特征。

针对于单 OD 对简单道路网,分析 Beckmann 模型、非均衡分配算法^[19]、本文均衡分配模型的分配结果,如表 3 所示,其中分配结果误差为分配结果中各 OD 对每条分配路径通过时间相对差值的平均值。可以看出,与 Beckmann 模型相比,本文模型和 Beckmann 模型的结果误差都很小且较为相近,计算时间也相差不多,说明其算法复杂性并没有太多增加,收敛性也可以达到 Beckmann 模型水平,且其分配结果更合理;与非均衡分配算法^[19]相比,本文模型的计算时间较长但相差不多,且分配结果更合理、结果误差更小、更接近于均衡解,其收敛性比非均衡分配算法^[19]更强。

表 3 单 OD 对简单道路网的分配结果对比

Table 3 Assignment results comparison of the simple road network with an OD pair

模型算法	分配结果误差	算法计算时间/s
Beckmann 模型	4.753×10^{-6}	2.881 6
非均衡分配算法 ^[19]	0.095 3	2.028 5
本文模型	1.044×10^{-5}	3.283 0

4.3 复杂算例

为进一步验证本文模型适应于一般城市的复杂道路网络,将简化的经典 Sioux Falls 网络作为

算例进行计算。复杂算例的道路网包括 24 个节点、38 条路段和 75 个 OD 对,路网结构如图 9 所示,路网的基本属性信息与经典 Sioux Falls 网络相同,图中路段上的数字分别代表各路段的 $t_{0,a}$ 和 C_a 属性。OD 对间的交通需求 q_{rs} 如表 4 所示,交通需求车辆数 N_{rs} (单位:pcu) 的数值为交通需求流量数值的 10 倍。为计算方便,路段畅通和拥堵状态的阻抗函数仍为式(25)。

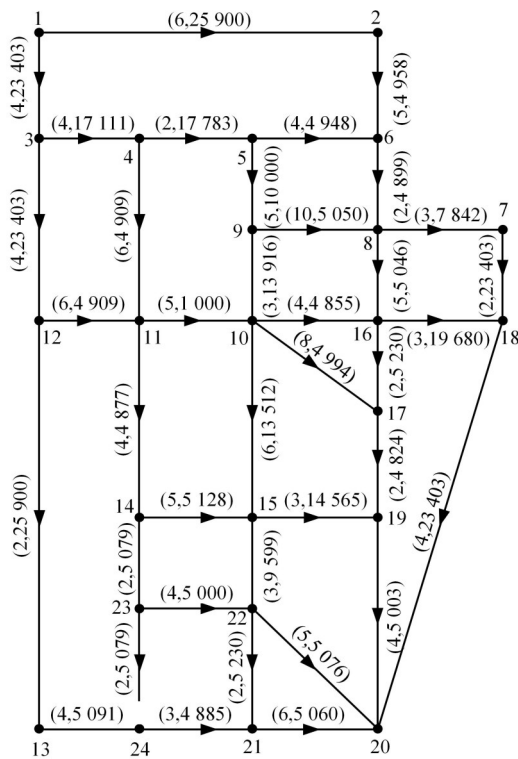


图 9 复杂道路网结构示意图

Fig. 9 Schematic diagram of complex road network

取收敛精度 $\epsilon = 0.1\%$, 在 Win11 的 64 位操作系统, AMD RYZEN 7 3700X 8-Core 3.6 GHz, 16 GB 内存的台式电脑上, 基于 Matlab 对算例进行求解, 计算时间为 206.461 8 s, 模型结果的误差精度 $e = 9.3557 \times 10^{-5}$, 远小于 0.1% , 由此可见, 模型算法可以高效求解一般城市复杂路网的均衡状态。在计算迭代过程中, 随迭代次数 n 的增加, 迭代精度逐渐收敛, 分配结果逐渐接近于均衡解, 当 $n = 19$ 时, 误差精度 $e = 9.3557 \times 10^{-5}$, 满足分配迭代精度, 可见本文模型针对于一般城市复杂路网的计算效率和收敛性也较高。

本文模型的分配结果如图 10 所示, 图中路段上的数字分别代表各路段实际分配的流入、流出流量, 拥堵部分的路段上方还标明了拥堵比例, 虚线代表路段拥堵的部分, 实线代表路段畅通的部

表 4 复杂道路网的 OD 对间交通需求

Table 4 OD traffic demand of complex road network

序号	起点	终点	$q_{rs}/(\text{pcu} \cdot \text{h}^{-1})$	序号	起点	终点	$q_{rs}/(\text{pcu} \cdot \text{h}^{-1})$
1	1	13	500	39	8	19	700
2	1	14	300	40	8	20	900
3	1	15	500	41	9	15	900
4	1	17	400	42	9	17	900
5	1	19	300	43	9	19	400
6	1	20	300	44	9	20	600
7	1	21	100	45	9	21	300
8	1	22	400	46	9	22	700
9	1	23	300	47	10	15	4 000
10	1	24	100	48	10	17	3 900
11	2	17	200	49	10	19	1 800
12	2	19	100	50	10	20	2 500
13	2	20	100	51	10	21	1 200
14	3	13	100	52	10	22	2 600
15	3	14	100	53	11	14	1 600
16	3	15	100	54	11	15	1 400
17	3	17	100	55	11	17	1 000
18	3	22	100	56	11	19	400
19	3	23	100	57	11	20	600
20	4	14	500	58	11	21	400
21	4	15	500	59	11	22	1 100
22	4	17	500	60	11	23	1 300
23	4	19	200	61	11	24	600
24	4	20	300	62	12	13	1 300
25	4	21	200	63	12	14	700
26	4	22	400	64	12	15	700
27	4	23	500	65	12	17	600
28	4	24	200	66	12	19	300
29	5	15	200	67	12	20	400
30	5	17	200	68	12	21	300
31	5	19	100	69	12	22	700
32	5	20	100	70	12	23	700
33	5	21	100	71	12	24	500
34	5	22	200	72	16	17	2 800
35	6	17	500	73	16	19	1 300
36	6	19	200	74	16	20	1 600
37	6	20	300	75	18	20	400
38	8	17	1 400				

分。每个 OD 对之间所有加载流量的路径在精度范围内具有相同行程时间, 达到了用户均衡条件。分析各路段的分配结果可以看出, 路段 10-17、11-14、16-17 为物理瓶颈路段, 并因排队车辆数大于其各自路段的存储容量而进一步导致拥堵排队的溢出蔓延, 拥堵空间排队按照分配流量的比

例分别向各自瓶颈的上游回溯蔓延,形成次生瓶颈9-10、11-10、4-11、12-11、8-16、10-16,构成局部拥堵区域,从而形成路网最终分配结果。当路网交通流分配达到均衡时,路网内存在完全畅通、完全拥堵、半畅通半拥堵3种交通状态的路段,真实体现了路网宏观全局运行状态和拥堵排队现象。同时,分配结果能够反映路网最容易产生拥堵的地方,识别路网中拥堵空间排队和溢出所导致的瓶颈路段和拥堵区域位置,可以作为路网结构优化扩容的重点关注区域,路网的分配情况也可以结合车路协同平台为交通诱导、需求管理和拥堵收费提供参考,对拥堵缓解有一定指导意义。

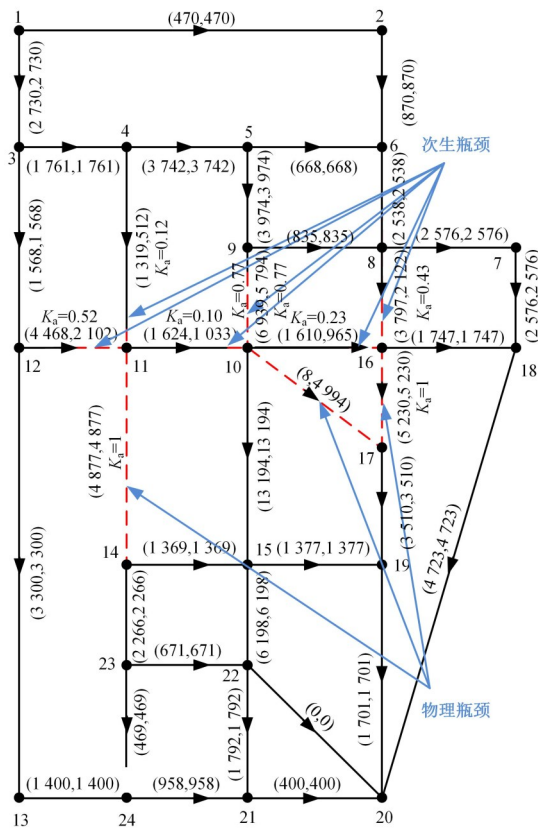


图10 复杂道路网的模型分配结果图

Fig. 10 Assignment results of the complex road network

5 结论

(1)本文用户均衡分配模型描述了由于路段通行能力和存储容量限制而导致的拥堵空间排队和溢出现象,是考虑畅通状态和拥堵状态的集成模型,可以更真实地描述道路网络不同交通状态下的需求加载机制。本文也证明了该模型符合考虑拥堵空间排队和溢出的用户均衡原理并存在唯一解;同时,在FW算法的基础上引入需求折算、

拥堵回溯、拥堵区域识别、需求加载的机制进行改进,提出需求流量转移系数的计算方法,构建了模型求解算法,并通过算例证明了其有效性。

(2)与传统静态交通流分配相比,本文模型可以有效描述路网的拥堵排队现象和拥堵状态,可以有效求解道路网络考虑拥堵排队和溢出的均衡状态及交通特性,是传统方法的丰富和发展,对于分析道路网络的交通特征具有重要意义。

(3)与动态交通流分配相比,本文模型可以体现道路网络更宏观整体的均衡状态,为交通管理部门的交通规划、需求管理提供指导意义,同时该模型相比动态交通流分配而言计算量小、复杂度低,可应用于一般城市道路网络交通流分配问题。

(4)模型分配结果中的流量、排队车辆数、拥堵区域和通过时间等,更符合路网宏观整体运行状态,可用于拥堵状态评价和指标计算,识别路网中的瓶颈位置和拥堵关键区域,为拥堵缓解提供理论基础和技术支撑。基于对路网整体运行状态的判断和评价,可通过瓶颈路段扩容、路网结构和土地利用优化、路径诱导、需求管理和拥堵收费等方式,从宏观全局角度进行交通规划和拥堵缓解。

参考文献:

- [1] Wardrop J G. Some theoretical aspects of road traffic research[J]. Proceedings of the Institute of Civil Engineers, 1952, 1(3): 325-378.
- [2] Beckmann M, McGuirec B, Winsten C B. Studies in the Economics of Transportation[M]. New Haven, Connecticut: Yale University Press, 1956.
- [3] Leblance L J, Morlok E K, Pierskalla W. An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem[J]. Transportation Research, 1975, 9(5): 309-318.
- [4] Larsson T, Patriksson M. An augmented lagrangean dual algorithm for link capacity side constrained traffic assignment problems[J]. Transportation Research Part B, 1995, 29: 433-455.
- [5] Bell M G H. Stochastic user equilibrium assignment in networks with queues[J]. Transportation Research Part B, 1995, 29(2): 125-137.
- [6] Smith M J. A link-based elastic demand equilibrium model with capacity constraints and queueing delays [J]. Transportation Research Part C, 2013, 29: 131-147.
- [7] Smith M, Huang W, Viti F. Equilibrium in capacitated network models with queueing delays, queue-stor-

- age, blocking back and control[J]. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2013, 80: 860-879.
- [8] Thompson W A, Payne H J. Traffic assignment on a transportation network with capacity constraints and queueing[C] //47th National ORSA/TIMS North American Meeting, Washington DC, USA, 1975: 232-239.
- [9] Smith M J. Traffic control and traffic assignment in a signal-controlled network with queueing[C]//Proceedings of the Tenth International Symposium on Transportation and Traffic Theory, New York, USA, 1987: 61-77.
- [10] Bliemer M C J, Raadsen M P H, Smits E S, et al. Quasi-dynamic traffic assignment with residual point queues incorporating a first order node model[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2014, 68: 363-384.
- [11] Lam W H K, Zhang Y. Capacity-constrained traffic assignment in network with residual queues[J]. *Journal of Transportation Engineering*, 2000, 126(2): 121-128.
- [12] Larrain H, Suman H K, Muñoz J C. Route based equilibrium assignment in congested transit networks[J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2021, 127: No. 103125.
- [13] 岳昊, 刘晓玲, 孟晓雨, 等. 拥堵道路网的静态交通流非均衡分配方法[J]. *北京交通大学学报*, 2017, 41(3): 1-6.
Yue Hao, Liu Xiao-ling, Meng Xiao-yu, et al. A non-equilibrium method to solve static traffic assignment problem at the congested road network[J]. *Journal of Beijing Jiaotong University*, 2017, 41(3): 1-6.
- [14] 岳昊, 张鹏, 刘晓玲, 等. 拥堵路网交通流均衡分配模型[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2019, 51(9): 103-109.
Yue Hao, Zhang Peng, Liu Xiao-ling, et al. The equilibrium model for congested traffic assignment in road networks[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2019, 51(9): 103-109.
- [15] Bliemer M C J, Raadsen M P H. Static traffic assignment with residual queues and spillback[J]. *Transportation Research Part B*, 2020, 132: 303-319.
- [16] 何胜学. 基于两阶段行程时间的交通流分配理论[J]. *交通运输系统工程与信息*, 2018, 18(1): 139-144.
He Sheng-xue. Traffic assignment theory based on two-stage travel time[J]. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2018, 18(1): 139-144.
- [17] 龙雪琴, 王瑞璇, 王晗. 考虑出行者不同理性程度的拥堵交通流分配方法[J]. *交通运输系统工程与信息*, 2023, 23(1): 216-223.
Long Xue-qin, Wang Rui-xuan, Wang Han. Traffic flow assignment method considering travelers' different rational degree under congestions[J]. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2023, 23(1): 216-223.
- [18] 岳昊, 任孟杰, 杨子玉, 等. 考虑拥堵空间排队与溢出的道路网静态交通流分配[J]. *中国公路学报*, 2022, 35(7): 241-250.
Yue Hao, Ren Meng-jie, Yang Zi-yu, et al. Static traffic assignment on road network with spatial queuing and spillback[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2022, 35(7): 241-250.
- [19] 岳昊, 张琦悦, 杨子玉, 等. 拥堵空间排队的静态交通流分配迭代加权算法[J]. *吉林大学学报: 工学版*, 2024, 54(1): 136-145.
Yue Hao, Zhang Qi-yue, Yang Zi-yu, et al. Iterative weighted algorithms of static congestion traffic assignment considering spatial queueing[J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2024, 54(1): 136-145.