doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023521

一类非直积三角模的构造

陈子文，刘西民
（大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

摘要：考虑乘积格上非直积三角模的构造问题，给出乘积格上一类非直积三角模，从而解决了在乘积格上是否存在其他形式非直积三角模的一个公开问题.

关键词：非直积；三角模；乘积格
中图分类号：O159 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)05-1085-06

Construction of a Class of Non-direct Product Triangular Norms

CHEN Ziwen, LIU Ximin
(*School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *Liaoning Province, China*)

Abstract: We considered the construction problem of non-direct product triangular norms on product lattices, and gave a class of non-direct product triangular norms on product lattices, thus solving an open problem of whether there were other forms of non-direct product triangular norms on product lattices.

Keywords: non-direct product; triangular norm; product lattice

0 引 言

Menger[1]引入的三角模是一类重要的聚合函数，旨在统计度量空间框架下的推广三角不等式. 为得到更恰当、更一般的形式，Schweizer 等[2]定义了弱统计度量空间的概念，并讨论了 Menger 推广的三角不等式，给出了单位区间上三角模的公理化定义. 由于三角模较好地反映了“逻辑与”的性质，因此三角模在多值逻辑学研究中得到广泛关注. 目前，三角模已广泛应用于统计度量空间、多值逻辑、决策支持、函数方程、测度理论等领域，对三角模的研究已取得了丰富的成果，并将其推广到一般序结构上，特别是有界格上三角模的构造和刻画[3-7].

单位区间$[0,1]$与有界格的区别是格中的元素具有不可比较性，即底层结构上的序关系有本质不同，故在逐点序的乘积格上赋予三角模的研究备受关注. De Baets 等[8]研究了乘积格上的直积三角模，并提出一个公开问题：在$[0,1]^2$上是否存在连续的非直积三角模.

Jenei 等[9]给出了一个构造乘积格L^n上非直积三角模的方法，解决了上述问题，并进一步提出以下公开问题：

(i) 在乘积格上是否存在其他形式的非直积三角模；

(ii) 刻画一类乘积格上非直积三角模；

(iii) 若T是乘积格L上的三角模，则是否存在$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L$，使得$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}=\boldsymbol{1}$，$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$，

收稿日期：2023-12-06.

第一作者简介：陈子文(1999—)，女，满族，硕士研究生，从事拓扑及其应用的研究，E-mail：ziwenchenok@163.com. **通信作者简介**：刘西民(1968—)，男，汉族，博士，教授，博士生导师，从事拓扑与微分几何的研究，E-mail：ximinliu@dlut.edu.cn.

基金项目：国家自然科学基金(批准号：12331003).

$T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}$ 蕴含 T 的直积分解性.

Karaçal 等[10]通过一个反例说明了公开问题(iii)的答案是否定的，并给出直积三角模的一个刻画定理，解决了公开问题(ii). 对于公开问题(i)，Karaçal[11]给出了乘积格上一个非直积三角模的实例.

本文讨论更一般乘积格 $\prod_{i=1}^{n}L_i$ 上的非直积三角模，构造乘积格 $\prod_{i=1}^{n}L_i$ 上一类非直积三角模，对 Jenei 等[9]提出的公开问题(i)给出不同的答案.

1 预备知识

定义 1[12] 有界格$(L,\leqslant,0_L,1_L)$是有最大元 1_L 和最小元 0_L 的格.

定义 2[8] 设$(L,\leqslant,0_L,1_L)$是一个有界格，若对任意的 $x,y,z\in L$，满足下列条件：

1) $T(x,y)=T(y,x)$；

2) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$；

3) $\forall\, y\leqslant z$，$T(x,y)\leqslant T(x,z)$；

4) $T(x,1_L)=x$.

则 L 上的一个二元运算 $T:L^2\to L$ 称为一个三角模.

下面给出有界格上的最大三角模和最小三角模：

$$T_{\wedge}(x,y)=x\wedge y,$$

$$T_D(x,y)=\begin{cases}x\wedge y, & 1_L\in\{x,y\},\\ 0_L, & \text{其他}.\end{cases}$$

命题 1[8] 设 T_1 是有界格 L_1 上的三角模，T_2 是有界格 L_2 上的三角模，则 T_1 和 T_2 的直积

$$T_1\times T_2((x_1,x_2),(y_1,y_2))=(T_1(x_1,y_1),T_2(x_2,y_2))$$

是乘积格 $L_1\times L_2$ 上的三角模.

假设本文有界格 L 均满足 $|L|\geqslant 2$，并记 $\mathbf{1}=(1_{L_1},\cdots,1_{L_{n-1}},1_{L_n})$，$\mathbf{0}=(0_{L_1},\cdots,0_{L_{n-1}},0_{L_n})$，$\mathbb{N}$ 表示自然数集，$\mathbb{F}=\{1,2,\cdots,n\}$ 表示 $\mathbb{N}$ 的前 n 项.

2 主要结果

设 $n\in\mathbb{N}$，$n\geqslant 2$，$(L_i,\leqslant,0_{L_i},1_{L_i})_{i\in\mathbb{F}}$是一族有界格，$\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{F}$ 的非空子集. 对任意 $j,k\in\mathbb{P}$，$i\in\mathbb{F}$，定义 L_j 上的二元运算$\oplus_j$ 满足如下性质：

1) $x\oplus_j y=y\oplus_j x$；

2) $(x\wedge y)\oplus_j z=(x\oplus_j z)\wedge(y\oplus_j z)$；

3) $x\wedge y\leqslant x\oplus_j y$.

映射 $\delta_{ij}:L_i\to L_j$ 满足如下性质：

4) $\delta_{ij}(x\wedge y)=\delta_{ij}(x)\wedge\delta_{ij}(y)$；

5) $\delta_{ij}(0_{L_i})=0_{L_j}$；

6) $\delta_{jj}=id_{L_j}$；

7) $\delta_{jk}\circ\delta_{ij}=\delta_{ik}$.

对乘积格 $\prod_{i=1}^{n}L_i$ 中的任意元 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_{n-1},y_n)$，定义

$$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=(x_1\wedge y_1,\cdots,x_{n-1}\wedge y_{n-1},x_n\wedge y_n),$$

$$\mathscr{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\Big(\bigwedge_{i\in\mathbb{F}}\delta_{ij}(x_i)\Big)\oplus_j\Big(\bigwedge_{i\in\mathbb{F}}\delta_{ij}(y_i)\Big),\tag{1}$$

$$\mathscr{U}^{(i)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{cases}\mathscr{U}_{\delta_i}^{\oplus_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), & i\in\mathbb{P},\\ 1_{L_i}, & \text{其他}.\end{cases}$$

定理 1 设 $n\in\mathbb{N}$，$n\geqslant 2$，$(L_i,\leqslant,0_{L_i},1_{L_i})_{i\in\mathbb{F}}$是一族有界格，$\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{F}$ 的非空子集. 对任意 $j\in\mathbb{P}$，

$i\in\mathbb{F}$，L_j 上的二元运算$\oplus_j$ 满足性质 1)～3)，且映射 $\delta_{ij}:L_i\to L_j$ 满足性质 4)～7)，则二元运算

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{cases}\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}, & \mathbf{1}\in\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\},\\ (x_1\wedge y_1\wedge\mathcal{U}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\cdots,x_n\wedge y_n\wedge\mathcal{U}^{(n)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})), & \text{其他}\end{cases}$$

是 $\prod_{i=1}^{n}L_i$ 上的三角模. 特别地，下列结论等价：

1) T 是一个非直积三角模；

2) 对某个 $j\in\mathbb{P}$，存在 $a,b\in L_j$，满足 $a\oplus_j b\neq 1_{L_j}$.

证明：单位元和交换性易证. 下面验证保序性和结合性.

保序性. 假设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\prod_{i=1}^{n}L_i$，且 $\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}$. 如果 $\mathbf{1}\in\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$，则保序性显然. 如果 $\mathbf{1}\notin\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$，则由 δ_{ij} 和 $\oplus_j$ 保序易知 T 保序.

结合性. 需证明对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\prod_{i=1}^{n}L_i$，$T(T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z})=T(T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),\boldsymbol{x})$ 成立. 对 $\mathbf{1}\in\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$，显然. 对 $\mathbf{1}\notin\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$，$j\in\mathbb{F}$ 且 $\mathbb{P}=\{i_1,\cdots,i_s\}$ 具有序 $i_1<i_2<\cdots<i_s$，考虑如下两种情形.

① 如果 $j\notin\mathbb{P}$，则 $T(T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z})$ 和 $T(\boldsymbol{x},T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))$ 的第 j 项坐标显然均为 $x_j\wedge y_j\wedge z_j$.

② 如果 $j\in\mathbb{P}$，假设 $j=i_1$，则 $T(T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z})$ 的第 j 项坐标为

$$\begin{aligned}&x_j\wedge y_j\wedge z_j\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\wedge((\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(x_k)\wedge\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(y_k)\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\wedge\\ &\bigwedge_{i_2\leqslant t\leqslant i_s}\delta_{tj}(\mathcal{U}_{\delta_t}^{\oplus_t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))\oplus_j(\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(z_k)))=\\ &x_j\wedge y_j\wedge z_j\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\wedge((\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(x_k)\wedge\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(y_k)\wedge\\ &\bigwedge_{i_2\leqslant t\leqslant i_s}\delta_{tj}(\mathcal{U}_{\delta_t}^{\oplus_t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))\oplus_j(\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(z_k))).\end{aligned}$$

对每个 $i_2\leqslant t\leqslant i_s$，有

$$\begin{aligned}&\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(x_k)\wedge\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(y_k)\wedge\delta_{tj}(\mathcal{U}_{\delta_t}^{\oplus_t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\ &\delta_{tj}\circ\delta_{jt}(\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(x_k)\wedge\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(y_k))\wedge\delta_{tj}(\mathcal{U}_{\delta_t}^{\oplus_t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\ &\delta_{tj}(\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kt}(x_k)\wedge\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kt}(y_k))\wedge\delta_{tj}(\mathcal{U}_{\delta_t}^{\oplus_t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\ &\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(x_k)\wedge\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(y_k).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&x_j\wedge y_j\wedge z_j\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\wedge((\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(x_k)\wedge\\ &\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(y_k)\wedge\bigwedge_{i_2\leqslant t\leqslant i_s}\delta_{tj}(\mathcal{U}_{\delta_t}^{\oplus_t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))\oplus_j(\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(z_k)))=\\ &x_j\wedge y_j\wedge z_j\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\wedge((\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(x_k)\wedge\\ &\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(y_k))\oplus_j(\bigwedge_{k\in\mathbf{F}}\delta_{kj}(z_k)))=\\ &x_j\wedge y_j\wedge z_j\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

类似地，$T(T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),\boldsymbol{x})$ 的第 j 项坐标为

$$y_j\wedge z_j\wedge x_j\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}).$$

根据 $\wedge$ 和 $\oplus_j$ 的交换性，有

$$\begin{aligned}&x_j\wedge y_j\wedge z_j\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\\ &y_j\wedge z_j\wedge x_j\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\wedge\mathcal{U}_{\delta_j}^{\oplus_j}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

因此 T 是 $\prod_{i=1}^{n}L_i$ 上的三角模.

2)⇒1). 假设 T 是一个直积的三角模，对任意 $j\in\mathbb{P}$，有

$$T((0_{L_1},\cdots,1_{L_j},\cdots,0_{L_n}),(0_{L_1},\cdots,1_{L_j},\cdots,0_{L_n}))=$$
$$(0_{L_1},\cdots,1_{L_j}\wedge(\bigwedge_{i\in\mathbf{F},\,i\neq j}\delta_{ij}(0_{L_i})\oplus_j\bigwedge_{i\in\mathbf{F},\,i\neq j}\delta_{ij}(0_{L_i})),\cdots,0_{L_n})=$$
$$(0_{L_1},\cdots,0_{L_j}\oplus_j 0_{L_j},\cdots,0_{L_n})=(0_{L_1},\cdots,1_{L_j},\cdots,0_{L_n}).$$

因此，对任意 $a,b\in L_j$，$0_{L_j}\oplus_j 0_{L_j}=1_{L_j}$，$a\oplus_j b=1_{L_j}$，矛盾.

1)⇒2). 显然成立.

注 1 对任意 $i,j\in\mathbb{P}$，易证 L_i 和 L_j 同构. 因此，如果 $\mathbb{P}=\mathbb{F}$，则由定理 1 可得 L^n 上的一类非直积三角模.

上述结果是在更一般的乘积格 $\prod_{i=1}^{n}L_i$ 上构造了一类非直积三角模，推广了文献[9]中乘积格 L^n 上的结果，对 Jenei 等提出的公开问题(i)给出了不同回答. 基于定理 1 可继续研究 De Baets 等[8]提出的公开问题.

定理 2 设 $n\in\mathbb{N}$，$n\geqslant 2$，$(L,\leqslant,0_L,1_L)$是一个有界格，$\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{F}$ 的非空子集. 对任意的 $j\in\mathbb{P}$，$i\in\mathbb{F}$，L 上的二元运算$\oplus_j$ 满足性质 1)～3)，且映射 $\delta_{ij}:L\to L$ 满足性质 4)～7)，则二元运算

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{cases}\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}, & \mathbf{1}\in\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\},\\ (x_1\wedge y_1\wedge\mathscr{U}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\cdots,x_n\wedge y_n\wedge\mathscr{U}^{(n)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})), & \text{其他}\end{cases}$$

是 L^n 上的三角模. 进一步，下列结论等价：

1) T 是一个非直积三角模；

2) 对某个 $j\in\mathbb{P}$，存在 $a,b\in L$，满足 $a\oplus_j b\neq 1_L$.

证明类似定理 1，故略.

下面利用上述结果，研究乘积格$[0,1]^3$ 上的非直积三角模.

例 1 对于乘积格$[0,1]^3$，设$\mathbb{F}=\{1,2,3\}$且$\mathbb{P}$ 是$\mathbb{F}$ 的非空子集.

情形 1) 对 $\mathbb{P}=\{1\}$，$0<a,b\leqslant 1$，定义映射矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_1=(\delta_{i1})_{i\in\mathbf{F}}$，$\delta_{i1}:[0,1]\to[0,1]$为

$$\boldsymbol{\Delta}_1=\begin{pmatrix}\delta_{11}\\ \delta_{21}\\ \delta_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{[0,1]}\\ x^a\\ x^b\end{pmatrix}.$$

由定理 1 知，

$$T_1((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=(x_1\wedge y_1\wedge((x_1\wedge x_2^a\wedge x_3^b)\vee(y_1\wedge y_2^a\wedge y_3^b)),$$
$$x_2\wedge y_2,x_3\wedge y_3)$$

是非直积三角模.

情形 2) 对 $\mathbb{P}=\{2\}$，$0<a,b\leqslant 1$，定义映射矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_2=(\delta_{i2})_{i\in\mathbf{F}}$，$\delta_{i2}:[0,1]\to[0,1]$为

$$\boldsymbol{\Delta}_2=\begin{pmatrix}\delta_{12}\\ \delta_{22}\\ \delta_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^a\\ \mathrm{id}_{[0,1]}\\ x^b\end{pmatrix}.$$

由定理 1 知，

$$T_2((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=(x_1\wedge y_1,x_2\wedge y_2\wedge$$
$$((x_1^a\wedge x_2\wedge x_3^b)\vee(y_1^a\wedge y_2\wedge y_3^b)),x_3\wedge y_3)$$

是非直积三角模.

情形 3) 对 $\mathbb{P}=\{3\}$，$0<a,b\leqslant 1$，定义映射矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_3=(\delta_{i3})_{i\in\mathbf{F}}$，$\delta_{i3}:[0,1]\to[0,1]$为

$$\boldsymbol{\Delta}_3=\begin{pmatrix}\delta_{13}\\ \delta_{23}\\ \delta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^a\\ x^b\\ \mathrm{id}_{[0,1]}\end{pmatrix}.$$

由定理 1 知，

$$T_3((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=(x_1\wedge y_1,x_2\wedge y_2,x_3\wedge y_3\wedge((x_1^a\wedge x_2^b\wedge x_3)\vee(y_1^a\wedge y_2^b\wedge y_3)))$$

是非直积三角模.

情形 4) 对 $\mathbb{P}=\{1,2\}$, $0<a,b\leqslant 1$, 定义映射矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_4=(\delta_{ij})_{i\in\mathbf{F},\,j\in\mathbf{P}}$, $\delta_{ij}:[0,1]\to[0,1]$为

$$\boldsymbol{\Delta}_4=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}\\ \delta_{21}&\delta_{22}\\ \delta_{31}&\delta_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{[0,1]}&x^{1/a}\\ x^a&\mathrm{id}_{[0,1]}\\ x^b&x^{b/a}\end{pmatrix}.$$

由定理 1 知,

$$T_4((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=(x_1\wedge y_1\wedge((x_1\wedge x_2^a\wedge x_3^b)\vee(y_1\wedge y_2^a\wedge y_3^b)),x_2\wedge y_2\wedge((x_1^{1/a}\wedge x_2\wedge x_3^{b/a})\vee(y_1^{1/a}\wedge y_2\wedge y_3^{b/a})),x_3\wedge y_3)$$

是非直积三角模.

情形 5) 对 $\mathbb{P}=\{1,3\}$, $0<a,b\leqslant 1$, 定义映射矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_5=(\delta_{ij})_{i\in\mathbf{F},\,j\in\mathbf{P}}$, $\delta_{ij}:[0,1]\to[0,1]$为

$$\boldsymbol{\Delta}_5=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{13}\\ \delta_{21}&\delta_{23}\\ \delta_{31}&\delta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{[0,1]}&x^{1/b}\\ x^a&x^{a/b}\\ x^b&\mathrm{id}_{[0,1]}\end{pmatrix}.$$

由定理 1 知,

$$T_5((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=(x_1\wedge y_1\wedge((x_1\wedge x_2^a\wedge x_3^b)\vee(y_1\wedge y_2^a\wedge y_3^b)),x_2\wedge y_2,x_3\wedge y_3\wedge((x_1^{1/b}\wedge x_2^{a/b}\wedge x_3)\vee(y_1^{1/b}\wedge y_2^{a/b}\wedge y_3)))$$

是非直积三角模.

情形 6) 对 $\mathbb{P}=\{2,3\}$, $0<a,b\leqslant 1$, 定义映射矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_6=(\delta_{ij})_{i\in\mathbf{F},\,j\in\mathbf{P}}$, $\delta_{ij}:[0,1]\to[0,1]$为

$$\boldsymbol{\Delta}_6=\begin{pmatrix}\delta_{12}&\delta_{13}\\ \delta_{22}&\delta_{23}\\ \delta_{32}&\delta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^a&x^{a/b}\\ \mathrm{id}_{[0,1]}&x^{1/b}\\ x^b&\mathrm{id}_{[0,1]}\end{pmatrix}.$$

由定理 1 知,

$$T_6((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=(x_1\wedge y_1,x_2\wedge y_2\wedge((x_1^a\wedge x_2\wedge x_3^b)\vee(y_1^a\wedge y_2\wedge y_3^b)),x_3\wedge y_3\wedge((x_1^{a/b}\wedge x_2^{1/b}\wedge x_3)\vee(y_1^{a/b}\wedge y_2^{1/b}\wedge y_3)))$$

是非直积三角模.

情形 7) 对 $\mathbb{P}=\mathbb{F}$, $0<a,b\leqslant 1$, 定义映射矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_7=(\delta_{ij})_{i\in\mathbf{F},\,j\in\mathbf{F}}$, $\delta_{ij}:[0,1]\to[0,1]$为

$$\boldsymbol{\Delta}_7=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\delta_{13}\\ \delta_{21}&\delta_{22}&\delta_{23}\\ \delta_{31}&\delta_{32}&\delta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{[0,1]}&x^{1/a}&x^{1/b}\\ x^a&\mathrm{id}_{[0,1]}&x^{a/b}\\ x^b&x^{b/a}&\mathrm{id}_{[0,1]}\end{pmatrix}.$$

由定理 1 知,

$$T_7((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=(x_1\wedge y_1((x_1\wedge x_2^a\wedge x_3^b)\vee(x_1\wedge x_2^a\wedge x_3^b)),x_2\wedge y_2\wedge((x_1^{1/a}\wedge x_2\wedge x_3^{b/a})\vee(y_1^{1/a}\wedge y_2\wedge y_3^{b/a})),x_3\wedge y_3\wedge((x_1^{1/b}\wedge x_2^{a/b}\wedge x_3)\vee(y_1^{1/b}\wedge y_2^{a/b}\wedge y_3)))$$

是非直积三角模.

易证 $p_j\circ T_i:[0,1]^3\times[0,1]^3\to[0,1]$是连续的, p_j 是从$[0,1]^3$ 到$[0,1]$的投射. 因此 T_i 是一个连续的非直积三角模, 其中 $i\in\{1,2,\cdots,7\}$, $j\in\{1,2,3\}$.

注 2　例 1 说明随着参数 a 和 b 的取值不同, $[0,1]^n$ 上存在足够多的连续的非直积三角模. 显然, 文献[9]中的结果是 a 和 b 都等于 1 的情形, 表明本文的结果也回答了 De Baets 等[8]提出的公开问题.

参　考　文　献

[1] MENGER K. Statistical Metrics [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of

America, 1942, 28: 535-537.

[2] SCHWEIZER B, SKLAR A. Assoclative Functions and Statistical Triangular Inequalities [J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 1961, 8(1/2): 169-186.

[3] SUN X R, LIU H W. On the Constructions of t-Norms on Bounded Lattices [J]. Information Sciences, 2021, 575: 173-184.

[4] AŞICI E. Constructing t-Norms and t-Conorms by Using Interior and Closure Operators on Bounded Lattices [J]. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2022, 19(1): 125-140.

[5] ÇAYLI G D. On a New Class of t-Norms and t-Conorms on Bounded Lattices [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 332: 129-143.

[6] DAN Y X, HU B Q, QIAO J S. New Construction of t-Norms and t-Conorms on Bounded Lattices [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 395: 40-70.

[7] ZHANG D X. Triangular Norms on Partially Ordered Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 153(2): 195-209.

[8] DE BAETS B, MESIAR R. Triangular Norms on Product Lattices [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 104(1): 61-75.

[9] JENEI S, DE BAETS B. On the Direct Decomposability of t-Norms over Direct Product Lattices [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 139(3): 699-707.

[10] KARAÇAL F, KHADJIEV D. $\vee$-Distributive and Infinitely $\vee$-Distributive t-Norms on Complete Lattices [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 151(2): 341-352.

[11] KARAÇAL F. On the Direct Decomposability of Strong Negations and S-Implication Operators on Product Lattices [J]. Information Sciences, 2006, 176(20): 3011-3025.

[12] BIRKHOFF G. Lattice Theory [M]. Providence, RI: American Mathematical Society Colloquium Publishers, 1967: 6.

(责任编辑:李 琦)