doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023239

循环纯 phantom 态射

魏敏敏，赵仁育
（西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070）

摘要：通过引入循环纯 phantom 态射的概念，给出循环纯 phantom 态射的一些等价刻画，证明每个 R-模都有核为循环纯内射模的满的循环纯 phantom 覆盖，并讨论循环纯 phantom 预覆盖在环变换下的传递性.

关键词：循环纯；循环纯 phantom 态射；预覆盖
中图分类号：O153.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)02-0249-07

Cyclic Pure Phantom Morphisms

WEI Minmin, ZHAO Renyu
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: By introducing the notion of cyclic pure phantom morphisms, we gave some equivalent characterizations of cyclic pure phantom morphisms, proved that every R-module had an epic cyclic pure phantom cover with the kernel cyclic pure injective modules, and discussed the transitivity of cyclic pure phantom precover under change of rings.

Keywords: cyclic pure; cyclic pure phantom morphism; precover

Phantom 态射起源于拓扑学中关于 CW-复形间的态射研究. 文献[1]在三角范畴中引入了 phantom 态射的概念，文献[2-5]将 phantom 态射理论推广到了有限群环的稳定模范畴中；文献[6]将 phantom 态射的概念拓展到任意结合环 R 上的 R-模范畴中. 如果对每个(有限表示)左 R-模 A，Abel 群同态 $\mathrm{Tor}_1(f,A)$：$\mathrm{Tor}_1(M,A)\to\mathrm{Tor}_1(N,A)$是零同态，则一个右 R-模同态 f：$M\to N$ 称为 phantom 态射. Phantom 态射可视为是平坦模的态射，由于其在理想逼近理论[7]中具有重要作用，因此近年来得到广泛关注[8-12].

Phantom 态射与纯性有密切的关系. 作为纯性的推广，文献[13]引入了循环纯的概念；文献[14-15]研究了循环纯内射模和循环纯投射模；文献[16]研究了循环纯平坦模. 受上述研究结果的启发，本文引入并研究循环纯 phantom 态射.

1 预备知识

本文中 R 是有单位元的结合环，所涉及的模均为酉模. 用 Mod-R 表示右 R-模范畴. 将 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 和 $M\otimes_R N$ 分别简记为 $\mathrm{Hom}(M,N)$ 和 $M\otimes N$；将 $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ 和 $\mathrm{Tor}^R_1(M,N)$ 分别简记为 $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ 和 $\mathrm{Tor}_1(M,N)$. 用 Mor-R 表示所有右 R-模同态的范畴，即其中的对象是所有的右 R-同态 f：$M\to N$，对象 f：$M_1\to N_1$ 到对象 g：$M_2\to N_2$ 的态射是一对右 R-同态 (α_1,α_2)，使得下图可交换：

收稿日期：2023-06-12.

第一作者简介：魏敏敏(1999—)，女，汉族，硕士研究生，从事环的同调理论的研究，E-mail：18419376042@163.com. **通信作者简介**：赵仁育(1977—)，男，汉族，博士，教授，从事环的同调理论的研究，E-mail：zhaory@nwnu.edu.cn.

基金项目：国家自然科学基金(批准号：11861055；12061061).

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ N_1 & \xrightarrow{\alpha_2} & N_2 \end{array}.$$

如果 P_1 和 P_2 是投射右 R-模且 $\mathscr{P}$ 是可裂单态射，则 Mor-R 中的对象 $\mathscr{P}$: $P_1\to P_2$ 称为投射对象. 对偶地，如果 E_1 和 E_2 是内射右 R-模且 $\mathscr{E}$ 是可裂满态射，则 Mor-R 中的对象 $\mathscr{E}$: $E_1\to E_2$ 称为内射对象[9,17].

定义 1[13] 如果对 R 的任意(有限生成)左理想 I，序列 $0\to A\otimes(R/I)\to B\otimes(R/I)\to C\otimes(R/I)\to 0$ 正合，则一个右 R-模的正合序列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 称为循环纯正合列.

下面用 CP 表示循环纯.

定义 2[14-15] 如果对每个右 R-模的 CP-正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$，序列 $0\to \mathrm{Hom}(M,A)\to \mathrm{Hom}(M,B)\to \mathrm{Hom}(M,C)\to 0$ 正合，则称右 R-模 M 是 CP-投射的. 对偶地，如果对每个右 R-模的 CP-正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$，序列 $0\to \mathrm{Hom}(C,N)\to \mathrm{Hom}(B,N)\to \mathrm{Hom}(A,N)\to 0$ 正合，则称右 R-模 N 是 CP-内射的.

2 CP-phantom 态射

定义 3 如果对 R 的任意(有限生成)左理想 I，Abel 群同态 $\mathrm{Tor}_1(f,R/I)$: $\mathrm{Tor}_1(M,R/I)\to \mathrm{Tor}_1(N,R/I)$ 是零同态，则一个右 R-模的同态 f: $M\to N$ 称为 CP-phantom 态射.

令 $\mathscr{S}=\{R_R^n/G \mid n\in\mathbb{N}, G \text{ 是 } R_R^n \text{ 的循环子模}\}$. 关于 CP-phantom 态射，有如下等价刻画.

定理 1 设 f: $M\to N$ 是右 R-同态，则下列叙述等价：

1) f 是 CP-phantom 态射；

2) 对右 R-模的任意正合序列 η: $0\to A\to B\to N\to 0$，η 沿 f 的拉回 η'：

$$\begin{array}{ccccccccc} \eta'\colon 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & f\downarrow & & \\ \eta\colon 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

是 CP-正合列；

3) 对任意的 CP-投射右 R-模 A 及任意右 R-同态 g: $A\to M$，fg 可以通过投射右 R-模分解；

4) 对任意的 $A\in\mathscr{S}$ 及任意右 R-同态 g: $A\to M$，fg 可以通过投射右 R-模分解；

5) 对任意的 CP-内射右 R-模 X，$\mathrm{Ext}^1(f,X)=0$.

证明：1)⇒2). 设 η: $0\to A\to B\to N\to 0$ 是右 R-模的正合序列，η' 是 η 沿 f 的拉回，则对 R 的任意一个左理想 I，有下列行正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Tor}_1(M,R/I) & \xrightarrow{\beta} & A\otimes(R/I) & \xrightarrow{\alpha\otimes(R/I)} & B'\otimes(R/I) \\ \mathrm{Tor}_1(f,R/I)\downarrow & & \| & & \downarrow \\ \mathrm{Tor}_1(N,R/I) & \xrightarrow{\gamma} & A\otimes(R/I) & \longrightarrow & B\otimes(R/I) \end{array}.$$

由于 $\mathrm{Tor}_1(f,R/I)=0$，故 $\beta=\gamma\mathrm{Tor}_1(f,R/I)=0$，所以 $\alpha\otimes(R/I)$ 是单态射. 因此，η' 是一个 CP-正合列.

2)⇒3). 考察正合序列 δ: $0\to K\to P\to N\to 0$，其中 P 是投射模. 取 δ 的沿 f 的拉回 δ'：

$$\begin{array}{ccccccccc} \delta'\colon 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{v} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \sigma\downarrow & & f\downarrow & & \\ \delta\colon 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \xrightarrow{u} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

由 2)知 δ' 是 CP-正合列. 设 g: $A\to M$ 是右 R-同态，其中 A 是 CP-投射右 R-模，则存在右 R-同态 τ: $A\to Q$，使得 $g=v\tau$. 于是 $fg=fv\tau=\mu\sigma\tau$，表明 fg 可以通过投射右 R-模 P 进行分解.

3)⇒4). 由文献[16]中引理 2.5 及 3)可得.

4)⇒1). 由文献[16]中引理 2.6 知，存在 CP-正合序列 $0\to B\xrightarrow{\mu}A\xrightarrow{\nu}M\to 0$，其中 $A=\oplus A_i$，$A_i\in\mathscr{S}$. 考察下图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\mu} & A & \xrightarrow{\nu} & M & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0\ ,
\end{array}$$

其中 P 是投射右 R-模. 由 4)可知，$f\nu$ 可以通过投射模进行分解. 进而存在右 R-同态 $g: A\to P$，使得 $f\nu=\beta g$. 再由分解定理得右 R-同态 $h: B\to K$，使得 $g\mu=\alpha h$. 于是对 R 的任意一个左理想 I，有下列行正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Tor}_1(A,R/I) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1(M,R/I) & \xrightarrow{\varphi} & B\otimes(R/I) & \xrightarrow{\mu\otimes(R/I)} & A\otimes(R/I)\\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tor}_1(f,R/I)} & & \downarrow{\scriptstyle h\otimes(R/I)} & & \downarrow{\scriptstyle g\otimes(R/I)}\\
0=\mathrm{Tor}_1(P,R/I) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1(N,R/I) & \xrightarrow{\psi} & K\otimes(R/I) & \xrightarrow{\alpha\otimes(R/I)} & P\otimes(R/I)\ .
\end{array}$$

由于 $0\to B\xrightarrow{\mu}A\xrightarrow{\nu}M\to 0$ 是 CP-正合列，所以 $\mu\otimes(R/I)$是单态射，故 $\varphi=0$. 于是 $\psi\mathrm{Tor}_1(f,R/I)=0$. 而 ψ 是单态射，所以 $\mathrm{Tor}_1(f,R/I)=0$. 因此，f 是 CP-phantom 态射.

2)⇒5). 设 X 是 CP-内射右 R-模，$\zeta: 0\to X\to Z\to N\to 0$ 是右 R-模的正合列. 考虑 ζ 的沿 f 的拉回 ζ'：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\zeta': 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
\zeta: 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0\ .
\end{array}$$

由 2)及文献[15]中命题 3.4 知，ζ' 是 CP-可裂正合列. 于是 $\mathrm{Ext}^1(f,X)([\zeta])=[\zeta']=0$. 因此，$\mathrm{Ext}^1(f,X)=0$.

5)⇒2). 设 $\xi: 0\to A\to U\to N\to 0$ 是右 R-模的正合列，ξ'是 ξ 沿 f 的拉回：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xi': 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{m} & U' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
\xi: 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & U & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0\ .
\end{array}$$

对 A，由文献[15]中推论 2.6 知，存在一个 CP-正合列 $0\to A\xrightarrow{n}E\to V\to 0$，其中 E 是 CP-内射模. 考虑ξ'的沿 n 的推出 ω：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xi': 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{m} & U' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle n} & & \downarrow & & \| & & \\
\omega: 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{h} & U'' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0\ .
\end{array}$$

由文献[7]中命题 3 知，$\mathrm{Ext}^1(M,n)\mathrm{Ext}^1(f,A)=\mathrm{Ext}^1(f,E)\mathrm{Ext}^1(N,n)$. 由 5)可得，$\mathrm{Ext}^1(f,E)=0$，故 $\mathrm{Ext}^1(M,n)\mathrm{Ext}^1(f,A)=0$. 从而

$$[\omega]=\mathrm{Ext}^1(M,n)[\xi']=\mathrm{Ext}^1(M,n)\mathrm{Ext}^1(f,A)([\xi])=0.$$

因此 ω 可裂正合. 从而对 R 的任意一个左理想 I，$h\otimes(R/I)$是单态射. 又因为 $0\to A\xrightarrow{n}E\to V\to 0$ 是 CP-正合列，所以 $n\otimes(R/I)$是单态射，故$(h\otimes(R/I))(n\otimes(R/I))$是单态射，即 $m\otimes(R/I)$是单态射. 因此，ξ'是 CP-正合列.

设 $\mathscr{A}$是一个范畴，$\mathscr{C}$是 $\mathscr{A}$的满子范畴. 根据文献[18]，如果 $C\in\mathscr{C}$，并且对任意的 $C'\in\mathscr{C}$及 $\mathscr{A}$中任意态射 $\beta: C'\to A$，均存在 $\mathscr{A}$中的态射 $\gamma: C'\to C$，使得 $\beta=\alpha\gamma$，则称 $\mathscr{A}$中的态射 $\alpha: C\to A$ 是对象 A 的一个$\mathscr{C}$-预覆盖. 如果满足 $\alpha\gamma=\alpha$ 的态射是同构，则称 $\mathscr{C}$-预覆盖$\alpha: C\to A$ 是 A 的覆盖. 下面证明Mor-R中的每个对象都有满的 CP-phantom 覆盖.

命题 1　Mor-R 中 CP-phantom 态射的类关于正向极限封闭.

证明：设(M_i,φ_j^i)和(N_i,ψ_j^i)是 Mod-R 中的两个正向系，$(f_i: M_i\to N_i)_{i\in S}$是$(M_i,\varphi_j^i)$到$(N_i,\psi_j^i)$的态射集，且每个 f_i 是 Mod-R 中的 CP-phantom 态射. 对 R 的任意一个左理想 I，有交换图：

$$\begin{array}{ccc}\varinjlim \mathrm{Tor}_1(M_i,R/I) & \xrightarrow{\varinjlim \mathrm{Tor}_1(f_i,R/I)} & \varinjlim \mathrm{Tor}_1(N_i,R/I)\\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow\\ \mathrm{Tor}_1(\varinjlim M_i,R/I) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}(\varinjlim f_i,R/I)} & \mathrm{Tor}_1(\varinjlim N_i,R/I)\end{array}.$$

因为 $\varinjlim\mathrm{Tor}_1(f_i,R/I)=0$，所以 $\mathrm{Tor}_1(\varinjlim f_i,R/I)=0$. 因此 $\varinjlim f_i: \varinjlim M_i\to\varinjlim N_i$ 是 Mor-R 中的 CP-phantom 态射.

命题 2 设有 Mod-R 中行正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}\eta_1: & 0 & \longrightarrow & U_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & V_1 & \xrightarrow{\tau_1} & W_1 & \longrightarrow 0\\ & & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & \\ \eta_2: & 0 & \longrightarrow & U_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & V_2 & \xrightarrow{\tau_2} & W_2 & \longrightarrow 0\end{array}.$$

如果 η_1 是 CP-正合的，β 是 CP-phantom 态射，则 γ 是 CP-phantom 态射.

证明：对 R 的任意左理想 I，有行正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}\mathrm{Tor}_1(V_1,R/I) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1(\tau_1,R/I)} & \mathrm{Tor}_1(W_1,R/I) & \longrightarrow & U_1\otimes(R/I) & \xrightarrow{\sigma_1\otimes(R/I)} & V_1\otimes(R/I)\\ \mathrm{Tor}_1(\beta,R/I)\downarrow & & \mathrm{Tor}_1(\gamma,R/I)\downarrow & & \alpha\otimes(R/I)\downarrow & & \beta\otimes(R/I)\downarrow\\ \mathrm{Tor}_1(V_2,R/I) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1(\tau_2,R/I)} & \mathrm{Tor}_1(W_2,R/I) & \longrightarrow & U_2\otimes(R/I) & \xrightarrow{\sigma_2\otimes(R/I)} & V_2\otimes(R/I)\end{array}.$$

因为 β 是 CP-phantom 态射，所以 $\mathrm{Tor}_1(\beta,R/I)=0$. 故

$$\mathrm{Tor}_1(\gamma,R/I)\mathrm{Tor}_1(\tau_1,R/I)=\mathrm{Tor}_1(\tau_2,R/I)\mathrm{Tor}_1(\beta,R/I)=0.$$

又因为 η_1 是 CP-正合列，所以 $\sigma_1\otimes R/I$ 是单态射. 于是 $\mathrm{Tor}_1(\tau_1,R/I)$是满态射. 故 $\mathrm{Tor}_1(\gamma,R/I)=0$. 因此，$\gamma$ 是 CP-phantom 态射.

设 $\varphi: M\to N$ 是右 R-同态. 根据文献[7]，如果 φ 是 CP-phantom 态射，并且对任意的 CP-phantom 态射 $\psi: M'\to N$，均存在右 R-同态 $\sigma: M'\to M$，使得 $\psi=\varphi\sigma$，则称 φ 是 N 的 CP-phantom 预覆盖. 如果 M 的满足 $\varphi=\varphi\sigma$ 的自同态 σ 都是同构，则称 N 的 CP-phantom 预覆盖 $\varphi: M\to N$ 为 N 的 CP-phantom 覆盖.

定理 2 Mor-R 中每个对象都有一个满的 CP-phantom 覆盖.

证明：由命题 1 和命题 2 知，Mor-R 中 CP-phantom 态射的类关于正向极限和纯满态射的像封闭. 因此，由文献[19]中定理 2.6 知，Mor-R 中的每个对象都有 CP-phantom 覆盖. 而 Mor-R 的任意投射生成子是 CP-phantom 态射，故每个 CP-phantom 覆盖是满态射.

由定理 2，有：

定理 3 每个右 R-模都有一个满的 CP-phantom 覆盖，且其核是 CP-内射的.

证明：设 N 是一个右 R-模，由定理 2 知，$\mathrm{Id}_N: N\to N$ 有一个满的 CP-phantom 覆盖. 由文献[11]中引理 3.1 知，N 有一个满的 CP-phantom 覆盖. 设 $\varphi: M\to N$ 是 N 的一个满的 CP-phantom 覆盖. 令 $K=\mathrm{Ker}\,\varphi$，则由文献[15]中推论 2.6 可知，存在 CP-正合列 $0\to K\xrightarrow{\gamma}B\to L\to 0$，其中 B 是 CP-内射模. 考察以下推出图：

$$\begin{array}{ccccccccc}0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\varphi} & N & \longrightarrow & 0\\ & & \gamma\downarrow & & \theta\downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\beta} & M' & \xrightarrow{\psi} & N & \longrightarrow & 0\end{array}.$$

对 R 的任意左理想 I，有以下行正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Tor}_1(M,R/I) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1(\varphi,R/I)} & \mathrm{Tor}_1(N,R/I) & \xrightarrow{u} & K\otimes(R/I)\\ \mathrm{Tor}_1(\theta,R/I)\downarrow & & \| & & \gamma\otimes(R/I)\downarrow\\ \mathrm{Tor}_1(M',R/I) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1(\psi,R/I)} & \mathrm{Tor}_1(N,R/I) & \xrightarrow{v} & B\otimes(R/I)\end{array}.$$

因为 $\mathrm{Tor}_1(\varphi, R/I)=0$，所以 u 是单态射. 而 $\gamma\otimes(R/I)$ 也是单态射，故 v 是单态射. 因此 $\mathrm{Tor}_1(\psi,R/I)=0$，从而 $\psi: M'\to N$ 是 CP-phantom 态射. 由 $\varphi: M\to N$ 是 N 的 CP-phantom 覆盖知，存在 $\sigma: M'\to M$ 和 $\tau: B\to K$，使得下图可交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\varphi} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\beta} & M' & \xrightarrow{\psi} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \vdots{\scriptstyle\tau} & & \vdots{\scriptstyle\sigma} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 .
\end{array}$$

因为 $\varphi: M\to N$ 是 N 的 CP-phantom 覆盖，且 $\varphi\sigma\theta=\varphi$，所以 $\sigma\theta$ 是同构. 从而 $\tau\gamma$ 也是同构. 因此 K 是 B 的直和项，故 K 是 CP-内射的.

下面讨论 CP-phantom 预覆盖在环变换下的传递性.

引理 1　设 $R\to S$ 是一个环同态.

1) 如果 S_R 是平坦模，$\varphi: M_S\to N_S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 态射，则 $\varphi: M_R\to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 态射；

2) 如果 ${}_RS$ 是平坦模，$\psi: A_R\to B_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 态射，则 $\psi\otimes_R S: A\otimes_R S\to B\otimes_R S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 态射；

证明：1) 设 I 是 R 的左理想，则由文献[20]中定理 11.64 知，有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Tor}_1^R(M, R/I) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(\varphi,\, R/I)} & \mathrm{Tor}_1^R(N, R/I) \\
\cong\downarrow & & \cong\| \\
\mathrm{Tor}_1^S(M, S\otimes_R R/I) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^S(\varphi,\, S\otimes_R R/I)} & \mathrm{Tor}_1^S(N, S\otimes_R R/I) .
\end{array}$$

因为 S_R 是平坦模，所以序列 $0\to S\otimes_R I\to S\otimes_R R\to S\otimes_R(R/I)\to 0$ 正合，并且 $S\otimes_R I\cong SI$，故 $S\otimes_R(R/I)\cong S/SI$. 因此 $\mathrm{Tor}_1^S(\varphi, S\otimes_R(R/I))=0$，从而 $\mathrm{Tor}_1^R(\varphi,R/I)=0$. 于是，$\varphi: M_R\to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 态射.

2) 设 I 是 S 的左理想，则由文献[20]中推论 11.63 知，有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Tor}_1^R(A_R, R/I) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(\psi,\, R/I)} & \mathrm{Tor}_1^R(B_R, R/I) \\
\cong\downarrow & & \cong\| \\
\mathrm{Tor}_1^S(A\otimes_R S, S/I) & \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^S(\psi\otimes_R S, S/I)} & \mathrm{Tor}_1^S(B\otimes_R S, S/I) .
\end{array}$$

由于 $\mathrm{Tor}_1^R(\psi,R/I)=0$，所以 $\mathrm{Tor}_1^S(\psi\otimes_R S, S/I)=0$. 因此 $\psi\otimes_R S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 态射.

设 $R\to S$ 是环同态，M 是右 R-模，N 是右 S-模. 定义

$$\mu_N: N\otimes_R S\to N,\qquad x\otimes s\mapsto xs,$$
$$\nu_M: M_R\to M\otimes_R S,\qquad y\mapsto y\otimes 1s.$$

易证 μ_N 是右 S-同态，ν_M 是右 R-同态，且 $\mu_N\nu_N=\mathrm{Id}_N$，$(\mu_M\otimes_R S)(\nu_M\otimes_R S)=\mathrm{Id}_{M\otimes_R S}$.

设 R,S 是环，且 R 是 S 的子环. 根据文献[21]，如果下列条件成立，则称 S 是 R 的几乎优越扩张：

1) R,S 有相同的单位元，且存在 $s_1, s_2, \cdots, s_n\in S$，使得 $S=Rs_1+Rs_2+\cdots+Rs_n$，并且 $Rs_i=s_iR$，$i=1,2,\cdots,n$；

2) ${}_RS$ 是平坦模，S_R 是投射模；

3) 对任意的右 S-模 M 及 M 的任意右 S-子模 N，如果 N_R 是 M_R 的直和项，则 N_S 是 M_S 的直和项.

定理 4　设 $R\to S$ 是一个环同态，且 S_R 和 ${}_RS$ 是平坦模，$\varphi: M_S\to N_S$ 是右 S-同态. 如果 φ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 预覆盖，则 $\varphi: M_R\to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 预覆盖. 当 S 是 R 的几乎优越扩张时，其逆也成立.

证明：由引理 1 中 1)知，$\varphi: M_R\to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 态射. 设 $f: A_R\to N_R$ 是 Mod-R

中的 CP-phantom 态射，则由引理 1 中 2)知，$f\otimes_R S: A\otimes_R S\to N\otimes_R S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 态射. 于是 $\mu_N(f\otimes_R S): A\otimes_R S\to N_S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 态射. 因为 $\varphi: M_S\to N_S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 预覆盖，所以存在一个右 S-同态 $m: A\otimes_R S\to M_S$，使得下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} A_R & \xrightarrow{f} & N_R \\ {\scriptstyle \nu_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_N} \\ A\otimes_R S & \xrightarrow{f\otimes_R S} & N\otimes_R S \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_N} \\ M_S & \xrightarrow{\varphi} & N_S \end{array}.$$

故 $m\nu_A$ 是右 R-同态，且 $\varphi(m\nu_A)=(\varphi m)\nu_A=\mu_N(f\otimes_R S)\nu_A=\mu_N\nu_N f=f$. 因此 $\varphi: M_R\to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 预覆盖.

反之，设 S 是 R 的几乎优越扩张，$\varphi: M_R\to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 预覆盖. 则由引理 1 中 2)知，$\varphi\otimes_R S: M\otimes_R S\to N\otimes_R S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 态射. 注意到 $\varphi\mu_M=\mu_N(\varphi\otimes_R S)$，所以对 S 的任意左理想 J，有

$$\mathrm{Tor}_1^S(\varphi,S/J)\mathrm{Tor}_1^S(\mu_M,S/J)=\mathrm{Tor}_1^S(\mu_N,S/J)\mathrm{Tor}_1^S(\varphi\otimes_R S,S/J)=0.$$

由文献[21]中引理 1.1 知，$\mathrm{Tor}_1^S(\mu_M,S/J)$ 是满同态. 因此，$\mathrm{Tor}_1^S(\varphi,S/J)=0$. 故 $\varphi: M_S\to N_S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 态射. 设 $\alpha: B_S\to N_S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 态射，则由引理 1 中 1)知，$\alpha: B_R\to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 态射. 于是存在右 R-同态 $\beta: B_R\to M_R$，使得 $\alpha=\varphi\beta$. 因为 $\mu_B\nu_B=1_B$，所以 $B\otimes_R S=\mathrm{Ker}\,\mu_B\oplus\mathrm{Im}\,\nu_B$. 又因为 S 是 R 的几乎优越扩张，且 $\mathrm{Ker}\,\mu_B$ 作为右 R-子模是 $B\otimes_R S$ 的直和项，所以 $\mathrm{Ker}\,\mu_B$ 作为右 S-子模也是 $B\otimes_R S$ 的直和项. 因此，存在右 S-模 K，使得 $B\otimes_R S=(\mathrm{Ker}\,\mu_B)\oplus K$. 设 $\pi: B\otimes_R S\to K$ 是标准投射，定义 $\lambda: B_S\to B\otimes_R S$，$b\mapsto\pi(b\otimes_R 1)$，则 λ 是右 S-同态，且易见 $\mu_B\lambda=1_B$. 令 $\gamma=\mu_M(\beta\otimes_R S)\lambda$，则 $\gamma\in\mathrm{Hom}_S(B_S,M_S)$，并且

$$\psi\gamma=\varphi\mu_M(\beta\otimes_R S)\lambda=\mu_N(\varphi\otimes_R S)(\beta\otimes_R S)\lambda=\mu_N(\varphi\beta\otimes_R S)\lambda=\mu_N(\alpha\otimes_R S)\lambda=\alpha\mu_B\lambda=\alpha.$$

因此 $\varphi: M_S\to N_S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 预覆盖.

设 R 是交换环，S 是 R 的一个乘闭子集，则有 R 关于 S 的分式环 $S^{-1}R$，且存在典范环同态 $R\to S^{-1}R$，而且 $S^{-1}R$ 是平坦 R-模. 进一步，对 R-模 M，有 $S^{-1}R$-模 $S^{-1}M$，并且 $S^{-1}R\otimes_R M\cong S^{-1}M$. 由引理 1 和定理 4 可得：

推论 1 设 R 是交换环，S 是 R 的一个乘闭子集，$\varphi: M\to N$ 是 R-模同态，则下列结论成立：

1) $\varphi: M\to N$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 态射当且仅当 $S^{-1}\varphi: S^{-1}M\to S^{-1}N$ 是 Mod-$S^{-1}R$ 中的 CP-phantom 态射.

2) 如果 $S^{-1}\varphi: S^{-1}M\to S^{-1}N$ 是 Mod-$S^{-1}R$ 中的 CP-phantom 预覆盖，则 $\varphi: M\to N$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 预覆盖.

推论 2 设 $R\to S$ 是一个满的环同态，且 S_R 和 ${}_R S$ 是平坦模，$\varphi: M_S\to N_S$ 是右 S-同态，则下列结论成立：

1) $\varphi: M_S\to N_S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 预覆盖当且仅当 $\varphi: M_R\to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 预覆盖；

2) $\varphi: M_S\to N_S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 覆盖当且仅当 $\varphi: M_R\to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 覆盖.

证明：1) 必要性. 由定理 4 可得.

充分性. 因为 $R\to S$ 是一个满的环同态，所以对任意的右 S-模 G，$\mu_G: G\otimes_R S\to G$ 是同构. 因此由 $\varphi: M_R\to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 预覆盖及引理 1 中 2) 知，$\varphi: M_S\to N_S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 态射. 设 $\alpha: B_S\to N_S$ 是 Mod-S 中的 CP-phantom 态射，则由引理 1 中 1)知，$\alpha: B_R\to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 态射. 于是存在右 R-同态 $\beta: B_R\to M_R$，使得 $\alpha=\varphi\beta$. 令 $\gamma=\mu_M(\beta\otimes_R S)\mu_B^{-1}$，则 $\gamma\in\mathrm{Hom}_S(B_S,M_S)$，并且 $\varphi\gamma=\varphi\mu_M(\beta\otimes_R S)\mu_B^{-1}=\varphi\beta\mu_B\mu_B^{-1}=\varphi\beta=\alpha$. 因此 $\varphi: M_S\to N_S$ 是 Mod-S 中的

CP-phantom 预覆盖.

2）必要性. 由 1）知，$\varphi: M_R \to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 预覆盖. 设 $\beta: M_R \to M_R$ 是右 R-同态，且 $\varphi\beta=\varphi$. 则 $\mu_M(\beta\otimes_R S)\mu_M^{-1} \in \mathrm{Hom}_S(M_S, M_S)$，并且 $\varphi(\mu_M(\beta\otimes_R S)\mu_M^{-1})=\varphi\mu_M\mu_M^{-1}\beta=\varphi\beta=\varphi$. 由 $\varphi: M_S \to N_S$ 是 CP-phantom 覆盖可得 $\beta=\mu_M(\beta\otimes_R S)\mu_M^{-1}$ 是同构. 因此 $\varphi: M_R \to N_R$ 是 Mod-R 中的 CP-phantom 覆盖.

充分性显然.

参 考 文 献

[1] NEEMAN A. The Brown Representability Theorem and Phantomless Triangulated Categories [J]. Journal of Algebra, 1992, 151(1): 118-155.

[2] BENSON D J. Phantom Maps and Purity in Modular Representation Theory. Ⅲ [J]. Journal of Algebra, 2002, 248(2): 747-754.

[3] BENSON D J, GNACADJA G P. Phantom Maps and Purity in Modular Representation Theory. Ⅰ [J]. Fundamenta Mathematicae, 1999, 162(1/2): 37-91.

[4] BENSON D J, GNACADJA G P. Phantom Maps and Purity in Modular Representation Theory. Ⅱ [J]. Algebras and Representation Theory, 2001, 4(4): 395-404.

[5] GNACADJA G P. Phantom Maps in the Stable Module Category [J]. Journal of Algebra, 1998, 201(2): 686-702.

[6] HERZOG I. The Phantom Cover of a Module [J]. Advances in Mathematics, 2007, 215(1): 220-249.

[7] FU X H, GUIL ASENSIO P A, HERZOG I, et al. Ideal Approximation Theory [J]. Advances in Mathematics, 2013, 244: 750-790.

[8] MAO L X. Precovers and Preenvelopes by Phantom and Ext-Phantom Morphisms [J]. Communications in Algebra, 2016, 44(4): 1704-1721.

[9] MAO L X. RD-Phantom and RD-Ext-Phantom Morphisms [J]. Filomat, 2018, 32(8): 2883-2895.

[10] MAO L X. Neat-Phantom and Clean-Cophantom Morphisms [J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2021, 20(9): 2150172-1-2150172-24.

[11] MAO L X. Higher Phantom Morphisms with Respect to a Subfunctor of Ext [J]. Algebras and Representation Theory, 2019, 22(2): 407-424.

[12] 张春霞，唐强玲. (n,d)-phantom 与 (n,d)-Ext-phantom 态射 [J]. 山东大学学报(理学版)，2023，58(2)：79-87. (ZHANG C X, TANG Q L. On (n,d)-Phantom and (n,d)-Ext-Phantom Morphisms [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2023, 58(2): 79-87.)

[13] HOCHSTER M. Cyclic Purity versus Purity in Excellent Noetherian Rings [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1977, 231(2): 463-488.

[14] DIVAANI-AAZAR K, ESMKHANI M A, TOUSI M. A Criterion for Rings Which Are Locally Valuation Rings [J]. Colloquium Mathematicum, 2009, 116(2): 153-164.

[15] DIVAANI-AAZAR K, ESMKHANI M A, TOUSI M. Some Criteria of Cyclically Pure Injective Modules [J]. Journal of Algebra, 2006, 304(1): 367-381.

[16] MAO L X. Modules with Respect to Cyclic Purity [J]. Mathematica Scandinavica, 2011, 108(2): 177-197.

[17] ESTRADA S, GUIL ASENSIO P A, OZBEK F. Covering Ideals of Morphisms and Module Representations of the Quiver $\mathbb{A}_2$ [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2014, 218(10): 1953-1963.

[18] ENOEHS E E, OYONARTE L. Covers, Envelopes and Cotorsion Theories [M]. New York: Nova Science Publishers, 2002: 1-113.

[19] CRIVEI S, PREST M, TORRECILLAS B. Covers in Finitely Accessible Categories [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2010, 138(4): 1213-1221.

[20] ROTMAN J J. An Introduction to Homological Algebra [M]. New York: Academic Press, 1979: 1-376.

[21] XUE W M. On Almost Excellent Extensions [J]. Algebra Colloquium, 1996, 3(2): 125-134.

（责任编辑：赵立芹）